Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.36

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В. М. Лахаданов

(Минск)

Исследуется устойчивость систем в зависимости от структуры сил, которые могут быть диссипативными, ускоряющими, гироскопическими, потенциальными и неконсервативными [1].

1. Рассмотрим системы

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Px = 0 \tag{1.1}$$

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Px = X(x, x^{\cdot}) \tag{1.2}$$

Здесь и далее x — матрица-столбец с элементами $x_1, \ldots, x_n$; $D = D'$, $P = -P' \not\equiv 0$ — постоянные $n \times n$-матрицы; $X(x, x^{\cdot})$ — матрица-столбец с элементами $X_1(x, x^{\cdot}), \ldots, X_n(x, x^{\cdot})$, содержащими x_i, $x_i^{\cdot}$ в степени не ниже второй, причем $X(0, 0) \equiv 0$. Члены $Dx^{\cdot}$ характеризуют диссипативные и ускоряющие силы, члены Px — неконсервативные силы, члены $X(x, x^{\cdot})$ — нелинейные силы. Везде следуем терминологии, принятой в [1].

О системах (1.1) и (1.2) известно:

1) система (1.1) не является асимптотически устойчивой [2];

2) системы (1.1) и (1.2) неустойчивы, если $D \equiv 0$ [1, 3];

3) системы (1.1) и (1.2) неустойчивы, если $\operatorname{Sp} D < 0$ [2];

4) система (1.1) неустойчива, если D знакоположительна и определитель $|P| \neq 0$ [3].

В работе [3] утверждается, что система (1.1) неустойчива при четном n и знакоположительной D. Однако приведенное в [3] доказательство справедливо только в случае $|P| \neq 0$, причем в этом случае оно справедливо для произвольной постоянной матрицы D.

Рассмотрим характеристическое уравнение (E — единичная матрица)

$$|E\lambda^2 + D\lambda + P| = 0 \tag{1.3}$$

Теорема 1. Характеристическое уравнение (1.3) не имеет корней на мнимой оси, отличных от нуля. Если $|P| \neq 0$, то уравнение (1.3) имеет n корней с положительной вещественной частью и n корней с отрицательной.

Доказательство. Пусть $\lambda = ki$ $(k \neq 0)$ — корень уравнения (1.3). Тогда система

$$(-Ek^2 + Dki + P)\, y = 0$$

имеет ненулевое решение $y = a + bi$, и для k получаем уравнение

$$(a - bi)'\,(-Ek^2 + Dki + P)\,(a + bi) = 0$$

или

$$-(a'Ea + b'Eb)\, k^2 + (a'Da + b'Db)\, ki + 2a'Pbi = 0$$

Это уравнение нельзя удовлетворить ни одним действительным $k \neq 0$, так как $a'Ea + b'Eb \neq 0$. Первая часть теоремы доказана. Если $|P| \neq 0$, то уравнение

$$(1.4)\qquad |E\lambda^2 + \varepsilon D\lambda + P| = 0$$

не имеет вообще никаких корней на мнимой оси при любом ε. Так как корни уравнения (1.4) непрерывно зависят от ε, а уравнение (1.3) получается из уравнения

$$(1.5)\qquad |E\lambda^2 + P| = 0$$

при непрерывном изменении ε в (1.4) от нуля до единицы, то число корней уравнения (1.3) с положительной вещественной частью совпадает с таковым для уравнения (1.5), которое имеет, как легко доказать, n корней с положительной вещественной частью и n с отрицательной. Теорема доказана.

Следствие 1. Системы (1.1) и (1.2) неустойчивы, если $\mathrm{Sp}D = 0$.

Действительно, из теоремы 1 следует, что уравнение (1.3) всегда имеет корни с отличной от нуля вещественной частью. Так как

$$\sum_{i=1}^{2n} \mathrm{Re}\,\lambda_i = -\,\mathrm{Sp}\,D = 0$$

то среди корней характеристического уравнения (1.3) всегда есть корни с положительной вещественной частью, что и доказывает неустойчивость систем (1.1) и (1.2).

Следствие 2. Системы (1.1) и (1.2) неустойчивы, если $|P| \neq 0$.

Теорема 2. Система (1.1) всегда неустойчива.

Доказательство. Если $|P| \neq 0$, то неустойчивость системы (1.1) уже доказана. Отметим только, что в этом случае неустойчивость системы (1.1) можно доказать и с помощью первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, рассматривая функцию

$$V = x'Ex^{\bullet} + \frac{1}{2}x'Dx + \varepsilon x'Px^{\bullet} + \frac{\varepsilon}{2}x^{\bullet\prime}Dx^{\bullet}$$

полная производная по времени которой в силу системы (1.1)

$$V^{\bullet} = x^{\bullet\prime}(E - \varepsilon D^2)\,x^{\bullet} + \varepsilon\,(Px)'\,Px$$

определенно-положительна при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|P| = 0$. В этом случае с помощью преобразования $x = Ty$, где T — постоянная ортогональная матрица, систему (1.1) можно записать в виде [4]

$$(1.6)\qquad y^{\bullet\bullet} + D_1 y^{\bullet} + P_1 y = 0$$

$$P_1 = \begin{Vmatrix} P_{rr} & P_{rq} \\ P_{qr} & P_{qq} \end{Vmatrix} = -P_1'$$

Здесь блоки P_{rr}, P_{rq}, P_{qr} тождественно равны нулю, а $|P_{qq}| > 0$; индексы r, q указывают размеры блоков, причем $r + q = n$. Пусть соответственно с P_1

$$D_1 = \begin{Vmatrix} D_{rr} & D_{rq} \\ D_{qr} & D_{qq} \end{Vmatrix}$$

а) $|D_{rr}| \neq 0$. В этом случае можно показать, что уравнение (1.4) имеет ровно r нулевых корней при любом $\varepsilon \neq 0$. Уравнение (1.5) имеет q корней с положительной вещественной частью, поэтому и характеристическое уравнение (1.3) имеет, по крайней мере, q корней с положительной вещественной частью, что можно усмотреть, изменяя ε в уравнении (1.4) от нуля до единицы. Таким образом, и в этом случае система (1.1) неустойчива.

б) $|D_{rr}| = 0$. В этом случае система (1.6) имеет решения вида

$$y = at + b \tag{1.7}$$

где постоянные матрицы-столбцы a и b выбраны следующим образом. Матрица-столбец a имеет вид $a = (a_r, 0)$, где a_r — ненулевое решение системы $D_{rr}z = 0$. Матрица-столбец b — решение системы $P_1 z + D_1 a = 0$, которая в рассматриваемом случае всегда имеет ненулевое решение. Наличие решений вида (1.7) доказывает неустойчивость системы (1.6), а значит и системы (1.1), в случае $|P| = 0$, $|D_{rr}| = 0$. Теорема доказана.

Следствие. При $|P| = 0$, $|D_{rr}| \neq 0$ система (1.2) неустойчива.

Остается не исследованной возможность стабилизации системы (1.1) нелинейными силами $X(x, x^{\cdot})$ в случае, когда $|P| = 0$, $|D_{rr}| = 0$, $\operatorname{Sp} D > 0$.

Пример 1. Пусть в системе (1.2) матрица D определенно-положительна. Тогда система (1.2) неустойчива. Действительно, в этом случае $|D_{rr}| > 0$ при любом возможном r, как главный диагональный минор определенно-положительной матрицы D_1, и, согласно доказанному, система (1.2) неустойчива.

2. Рассмотрим системы

$$x^{\cdot\cdot} + Gx^{\cdot} + Px = 0 \tag{2.1}$$

$$x^{\cdot\cdot} + Gx^{\cdot} + Px = X(x, x^{\cdot}) \tag{2.2}$$

где G — постоянная кососимметричная $n \times n$-матрица, матрица P та же, что и в системе (1.1). Члены $Gx^{\cdot}$ характеризуют гироскопические силы.

О системах (2.1) и (2.2) известно:

1) система (2.1) не является асимптотически устойчивой [2];

2) система (2.1) при $P \equiv 0$ устойчива тогда и только тогда, когда $|G| \neq 0$ [2].

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$|E\lambda^2 + G\lambda + P| = 0 \tag{2.3}$$

Теорема 3. Системы (2.1) и (2.2) неустойчивы, если $G = kP$, $P \not\equiv 0$, k — произвольная постоянная.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что уравнение (2.3) в данном случае не имеет корней на мнимой оси, отличных от нуля. Вместе с условием $\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2 + \ldots + \operatorname{Re}\lambda_{2n} = 0$ это доказывает теорему.

Следствие. Системы (2.1) и (2.2) при $n = 2$ и $P \not\equiv 0$ всегда неустойчивы.

Теорема 4. Система (2.1) неустойчива, если матрицы G и P коммутативны и $P \not\equiv 0$.

Эта теорема является следствием теоремы Четаева [5] о неустойчивости, которой удовлетворяет функция

$$V = x'Px^{\cdot} + \frac{1}{2}x'PGx$$

Теорема 5. Если матрицы G и P коммутативны и $|P| \neq 0$, то система (2.2) неустойчива.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V = \varepsilon x'\,Ex^{\cdot} + x'Px^{\cdot} + \frac{1}{2}x'PGx \tag{2.4}$$

полная производная по времени которой в силу системы (2.2) равна

$$V^{\cdot} = \varepsilon\left(x^{\cdot} + \frac{1}{2}Gx\right)'\left(x^{\cdot} + \frac{1}{2}Gx\right) + \frac{\varepsilon}{4}x'GGx + (Px)'\,Px +$$
$$+ x'(\varepsilon E + P)\,X(x, x^{\cdot})$$

Очевидно, функция (2.4) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости, что и доказывает теорему.

Теорема 6. Система (2.1) при нечетном n всегда неустойчива.

Доказательство. При нечетном n определители $|G| = |P| = 0$. Как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что система (2.1) в этом случае всегда имеет решения вида (1.7), что и доказывает теорему.

Рассмотрим три примера.

Пример 2. Система

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot\cdot} + g_1x_2^{\cdot} + g_2x_3^{\cdot} &= 0 \\ x_2^{\cdot\cdot} - g_1x_1^{\cdot} + g_3x_3^{\cdot} + px_3 &= 0 \\ x_3^{\cdot\cdot} - g_2x_1^{\cdot} - g_3x_2^{\cdot} - px_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $p \neq 0$, охватывает все [4] системы вида (2.1) при $n = 3$. Согласно теореме 6, она неустойчива, так как имеет решения вида (1.7)

$$x_1 = at + b,\ x_2 = -ag_2/p,\ x_3 = ag_1/p$$

где $a \neq 0$. Характеристическое уравнение системы (2.5) при $g_3 \neq 0$ имеет корни с положительной вещественной частью, что говорит о невозможности ее стабилизации нелинейными силами. Если же $g_3 = 0$, то при условии $g_1^2 + g_2^2 > 4p^2$ такая стабилизация возможна.

Пример 3. Рассмотрим систему (2.1), у которой

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{Vmatrix}$$

Если здесь положим $P \equiv 0$ либо $G \equiv 0$, то получим соответственно чисто гироскопическую неустойчивую ($|G| = 0$) систему либо чисто неконсервативную неустойчивую систему. Характеристическое уравнение системы

$$\lambda^2(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 3)(\lambda^2 + 6) = 0$$

Очевидно, неустойчивость может быть только в связи с двойным нулевым корнем, т. е. из-за возможности существования решения вида (1.7)

$$x_i = a_it + b_i \quad (i = 1, \ldots, 4), \qquad \sum_{i=1}^{4} a_i^2 \neq 0$$

Подставляя это решение в систему, находим, что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Таким образом, система устойчива.

Пример 3 доказывает возможность гироскопической стабилизации неустойчивой чисто неконсервативной системы в случае $|P| = 0$ и возможность стабилизации неконсервативными силами неустойчивой чисто гироскопической системы.

Пример 4. Рассмотрим систему (2.1), у которой

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & g^+ \\ 0 & 0 & g^- & 0 \\ 0 & -g^- & 0 & 0 \\ -g^+ & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Положим здесь

$$g^{\pm} = \sqrt{11 \pm \frac{\sqrt{20010}}{24}}, \quad p_1 = \frac{\sqrt{1991 + \sqrt{425137}}}{8\sqrt{3}}, \quad p_2 = 4\sqrt{6}\, p_1^{-1}$$

Тогда характеристическое уравнение системы

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 3)(\lambda^2 + 16) = 0$$

имеет чисто мнимые не равные между собой корни, что говорит об устойчивости системы.

Этот пример доказывает возможность гироскопической стабилизации неустойчивой чисто неконсервативной системы в случае $|P| \neq 0$.

Примеры *3* и *4* опровергают утверждение работы [6] о том, что чисто неконсервативную систему нельзя стабилизировать с помощью одних только гироскопических сил.

3. Рассмотрим системы

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Fx + Px = 0 \tag{3.1}$$

$$x^{\cdot\cdot} + Dx^{\cdot} + Fx + Px = X(x, x^{\cdot}) \tag{3.2}$$

где $F = F' \not\equiv 0$ — постоянная $n \times n$-матрица, матрицы D и P те же, что и в системе (1.1).

О системах (3.1) и (3.2) известно:

1) если $\operatorname{Sp} D < 0$, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы [2];

2) если F определенно-отрицательная, то системы (3.1) и (3.2) при нечетном n неустойчивы [2];

3) если n четное, F определенно-отрицательная и D определенно-положительная, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы [2];

4) утверждение 3) справедливо и при знакоположительной D [3];

5) если $D \equiv 0$, то система (3.1) не является асимптотически устойчивой, но может быть устойчивой [1,2];

6) если $D \equiv 0$ и коэффициенты Пуанкаре равны между собой, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы [1,3].

Предложенное в [2] доказательство утверждения 3) справедливо и в случае знакоположительной D ($D \not\equiv 0$). Предложенное в [3] доказательство утверждения 4) справедливо для любой постоянной матрицы D.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$|E\lambda^2 + D\lambda + F + P| = 0 \tag{3.3}$$

Теорема 7. **Если матрица F определенно-отрицательная, то уравнение (3.3) имеет половину корней с положительной вещественной частью и половину с отрицательной.**

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, показываем, что уравнение

$$|E\lambda^2 + \varepsilon D\lambda + F + \varepsilon P| = 0 \tag{3.4}$$

не имеет корней на мнимой оси при любом действительном ε, если F определенно-отрицательная. Изменяя ε в уравнении (3.4) от нуля до единицы, устанавливаем справедливость теоремы.

Следствие. Если F определенно-отрицательная, то системы (3.1) и (3.2) неустойчивы.

Пусть в системе (3.2) матрицы F и P зависят от x, $x^{\cdot}$, t.

Теорема 8. Если матрица $F(x, x^{\cdot}, t)$ удовлетворяет обобщенному критерию Сильвестра [1] для определенно-отрицательных квадратичных форм, то система (3.2) неустойчива.

Доказательство. Справедливость этой теоремы можно установить с помощью первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, которой удовлетворяет функция

$$V = x'Ex^{\cdot} + \frac{1}{2}x'Dx$$

Пример 5. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x_1^{\cdot\cdot} + b_1x_1^{\cdot} + c_1x_1 = 0 \\ x_2^{\cdot\cdot} + b_2x_2^{\cdot} + c_2x_2 = 0 \\ b_1b_2 < 0, \ c_1 < 0, \ c_2 < 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

В [2] на примере однорельсового гироскопического вагона показана возможность гироскопической стабилизации неустойчивой системы (3.5). Из следствия к теореме 7 видно, что систему (3.5), в том числе и однорельсовый гироскопический вагон при остановленном гироскопе, нельзя стабилизировать одними неконсервативными силами (вне зависимости от нелинейных членов $X(x, x^{\cdot})$).

Теорема 9. Если $D \equiv 0$ и $\operatorname{Sp} F \leqslant 0$, то система (3.1) неустойчива.

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение системы, которое в случае $D \equiv 0$ имеет вид

$$\lambda^{2n} + a_2\lambda^{2n-2} + \ldots + a_{2n} = 0 \tag{3.6}$$

Можно показать, что $a_2 = \operatorname{Sp} F$. Если $\operatorname{Sp} F < 0$, то уравнение (3.6) должно иметь корни с положительной вещественной частью, что и доказывает теорему в этом случае. Пусть $\operatorname{Sp} F = 0$ и система (3.1) устойчива. Тогда все корни уравнения (3.6) должны иметь вид $\lambda_j = \pm k_j i$ $(j = 1, \ldots, n)$, а само уравнение можно записать в виде

$$(\lambda^2 + k_1^2)(\lambda^2 + k_2^2)\ldots(\lambda^2 + k_n^2) = 0$$

откуда получаем

$$k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_n^2 = a_2 = \operatorname{Sp} F = 0$$

Из последнего равенства следует, что все корни уравнения (3.6) при сделанных предположениях равны нулю, но тогда легко показать, что система (3.1) неустойчива. Полученное противоречие доказывает теорему и в этом случае.

Следствие. Если $D \equiv 0$ и $\operatorname{Sp} F < 0$, то система (3.2) неустойчива.

Задача. При каких условиях неустойчивую систему

$$x^{\cdot\cdot} + Fx = 0. \tag{3.7}$$

можно стабилизировать неконсервативными силами, т. е. подобрать постоянную кососимметричную матрицу P так, чтобы система

$$x^{\cdot\cdot} + Fx + Px = 0 \tag{3.8}$$

была устойчивой.

Из теоремы 9 следует, что такая стабилизация может быть возможна только при условии

$$\operatorname{Sp} F > 0 \tag{3.9}$$

Из результатов, приведенных в [1] (стр. 198, 199), видно, что имеет место следующая теорема.

Теорема 10. Неустойчивую систему (3.7) при $n = 2$ можно стабилизировать неконсервативными силами тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (3.9).

Ниже будет показано, что теорема 10 справедлива и при $n = 3$. Действительно, не уменьшая общности, положим в системах (3.7) и (3.8)

$$F = \begin{Vmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{Vmatrix}, \qquad P = \begin{Vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & 0 & p_3 \\ -p_2 & -p_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

где имеют место неравенства

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3, \qquad f_3 \leqslant 0 \tag{3.10}$$

Если выполнено неравенство $f_2 + f_3 > 0$, то полагаем $p_1 = p_2 = 0$, и вопрос сводится к уже рассмотренному случаю $n = 2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай

$$f_2 + f_3 \leqslant 0 \tag{3.11}$$

Характеристическое уравнение системы (3.8)

$$f(y) = y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0 \qquad (y = \lambda^2) \tag{3.12}$$

Здесь

$$\begin{gathered} a_1 = f_1 + f_2 + f_3, \quad a_2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3 \\ a_3 = f_3 p_1^2 + f_2 p_2^2 + f_1 p_3^2 + f_1 f_2 f_3 \end{gathered} \tag{3.13}$$

Система будет устойчивой, если уравнение (3.12) имеет различные отрицательные корни.

Положим

$$a_2 = {}^1/_4 a_1^2, \qquad a_3 = {}^1/_{108} a_1^3 \tag{3.14}$$

Тогда можно проверить, что все условия отрицательности корней уравнения (3.12) [7] выполняются, если выполнено неравенство (3.9). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что корни уравнения $f'(y) = 0$ при этом не являются корнями уравнения (3.12), т. е. все корни уравнения

(3.12) различны. Таким образом, система (3.8) будет устойчивой, если выполнены условия (3.9), (3.14). Полагая $p_2 = 0$ и используя (3.13), условия (3.14) записываем в виде линейной системы относительно p_1^2, p_3^2. Эта система при выполнении условий (3.9), (3.11) имеет единственное положительное решение, что и завершает доказательство теоремы 10 для $n = 3$.

Отметим, что вопрос о стабилизации чисто неконсервативной системы (3.8) при $F \equiv 0$ потенциальными силами сводится [4] к случаю $n = 2$ и всегда имеет положительное решение, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Чисто неконсервативную систему всегда можно стабилизировать потенциальными силами.

Пример 6. Частица единичной массы упруго соединена с осями неподвижной системы координат $Oxyz$. Уравнения движения частицы

$$x^{\cdot\cdot} + f_1 x = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + f_2 y = 0, \quad z^{\cdot\cdot} + f_3 z = 0$$

Начало координат O является тривиальным положением равновесия, неустойчивым при условиях (3.10), (3.11). Предположим, что выполнено условие (3.9). Тогда, согласно доказанному выше, это положение равновесия можно сделать устойчивым, если к действующим на частицу потенциальным силам добавить неконсервативную силу P, перпендикулярную радиус-вектору частицы с проекциями на оси координат $P_x = -p_1 y$, $P_y = p_1 x - p_3 z$, $P_z = p_3 y$, где p_1, p_3 удовлетворяют системе (3.14) ($p_2 = 0$).

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 8 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.
2. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
3. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1972, № 4.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
6. *Метелицин И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 1.
7. *Кац А. М.* К вопросу о критерии апериодической устойчивости. ПММ, 1951, т. 15, вып. 1.