Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А. Я. Савченко

(Донецк)

Доказываются некоторые теоремы об устойчивости движений консервативных механических систем при постоянно действующих возмущениях, подчиненных определенным ограничениям.

При исследовании устойчивости такого типа обычно предполагается лишь малость постоянно действующих возмущений [1]. В такой постановке из рассмотрения выпадает важный класс консервативных механических систем, движения которых не обладают асимптотической устойчивостью в силу существования у них интегрального инварианта. Однако во многих задачах относительно структуры постоянно действующих возмущений имеется некоторая информация, позволяющая оценить их влияние на устойчивость движения консервативной механической системы [2–4]. Подробнее этот вопрос освещен в работах [5–8].

1. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad s = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

допускающая частное решение

$$x_s = 0 \qquad s = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Относительно правых частей уравнений (1.1) будем предполагать, что они в области

$$t \geqslant t_0, \qquad x^2 \leqslant H^2 \tag{1.3}$$

непрерывны и допускают существование единственного решения при заданных начальных условиях.

Здесь и всюду в дальнейшем $x^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $R^2 = R_1^2 + \ldots + R_n^2$.

Наряду с уравнениями (1.1) рассмотрим систему уравнений

$$dx_s/dt = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

где функции R_s характеризуют постоянно действующие возмущения. Эти функции R_s также определены и непрерывны в области (1.3) и удовлетворяют условию, что уравнения (1.4) имеют при заданных начальных условиях единственное решение.

Относительно устойчивости решения (1.2) системы (1.1) при постоянно действующих возмущениях R_s справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решение (1.2) системы (1.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если существуют функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $V_*(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие в области (1.3) следующим условиям:

1) V_* — определенно-положительная функция, допускающая бесконечно малый высший предел;

2) для каждого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что как только $R^2 < \delta_1^2$, то

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n) - V_*(t, x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon_1 \tag{1.5}$$

3) для каждого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что как только $R^2 < \delta_2^2$, то

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (X_i + R_i)\frac{\partial V}{\partial x_i} \leqslant 0 \tag{1.6}$$

вне шара $x^2 < \varepsilon_2^2$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно условию 1), в области (1.3) справедливо неравенство

$$V_*(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.7}$$

где W — не зависящая явно от t определенно-положительная функция. Обозначим через α точный нижний предел функции W на сфере $x^2 = \varepsilon^2$. Тогда в силу (1.7) всюду на этой сфере

$$V_*(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha \qquad (t \geqslant t_0) \tag{1.8}$$

Пусть $0 < l < \alpha$. Рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ подвижную поверхность

$$V_*(t, x_1, \ldots, x_n) = l \tag{1.9}$$

Из (1.8) следует, что для всех точек этой поверхности справедливо неравенство $x^2 < \varepsilon^2$ при $t \geqslant t_0$. А так как функция V_* допускает бесконечно малый высший предел, то поверхность (1.9) при любом $t \geqslant t_0$ лежит между сферами $x^2 = \varepsilon^2$ и $x^2 = \varepsilon_2^2$, где $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$. Обозначим эту область через Q, а ее замыкание через $\bar{Q}$. В области $\bar{Q}$ выполняется условие 3).

Пусть $x_s = x_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ — решение системы (1.4), удовлетворяющее при $t = t_0$ условию

$$x_s(t_0) = x_{0s} \quad (s = 1, \ldots, n), \quad x_0^2 < \varepsilon_2^2 \tag{1.10}$$

Покажем, что при любом $t \geqslant t_0$

$$x^2(t) < \varepsilon^2 \tag{1.11}$$

если $R^2 < \delta^2$, где $\delta > 0$ — некоторое число.

Предположим противное: траектория решения системы (1.4) с начальными условиями (1.10) покидает ε-шар $x^2 \leqslant \varepsilon^2$. Тогда существует участок этой траектории Γ с началом на ε_2-сфере и концом на ε-сфере. Пусть t_1 и t_2 — соответствующие моменты времени, когда траектория решения пересекла эти сферы. Следовательно, при $t \in [t_1, t_2]$ траектория решения, соответствующая участку Γ, целиком принадлежит области $\bar{Q}$. Поскольку подвижная поверхность (1.9) принадлежит области Q, то имеем

$$V_*(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = l_1 < l \tag{1.12}$$

$$V_*(t_2, x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2)) = l_2 \geqslant \alpha > l \tag{1.13}$$

Рассмотрим поведение функции времени $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при $t \in [t_1, t_2]$, где $x_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ — решение системы (1.4) с начальными условиями (1.10). В области $\bar{Q}$ справедливо неравенство (1.6), поэтому функция времени $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ — невозрастающая.

С другой стороны, если в качестве ε_1 взять $\varepsilon_1 = (l_2 - l_1)/2$, то по условию 2) при $t = t_1$, с учетом (1.12), имеем для V оценку сверху

$$V(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) < (l_1 + l_2)/2 \tag{1.14}$$

а при $t = t_2$, с учетом (1.13),— оценку снизу

$$V(t_2, x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2)) > (l_1 + l_2)/2 \tag{1.15}$$

Сопоставляя (1.14) и (1.15), устанавливаем, что функция времени $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ возрастает вдоль траектории решения при $t \in [t_1, t_2]$, что противоречит условию (1.6). Таким образом, если решение системы (1.4) при $t = t_0$ удовлетворяет условию (1.10), то во все время движения справедлива оценка (1.11), если $R^2 < \delta^2 = \min(\delta_1^2, \delta_2^{\,2})$, т. е. решение (1.2) системы (1.1) устойчиво при таких постоянно действующих возму ениях.

Замечание. В условиях теоремы, кроме обычного требования малости постоянно действующих возмущений, имеется дополнительное их ограничение, отраженное в неравенстве (1.6).

Следствие. Если неравенство (1.6) выполняется во всей области (1.3), то теорема остается справедливой и при отсутствии у функции $V_*(t, x_1, \ldots, x_n)$ бесконечно малого высшего предела.

2. Введем некоторые определения. Пусть система (1.1) имеет k интегралов

$$V_i(t, x_1, \ldots, x_n) = c_i, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

где V_i — однозначные, дифференцируемые функции, причем $V_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$, а система (1.4) — m аналогичных по свойствам интегралов

$$V_j'(t, x_1, \ldots, x_n) = c_j', \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2.2}$$

Определение 1. Постоянно действующие возмущения R_s сохраняют интеграл $V_s(t, x_1, \ldots, x_n) = c_s$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$ и $V_j'(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, что как только $R^2 < \delta^2$, то

$$|V_s(t, x_1, \ldots, x_n) - V_j'(t, x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

в области (1.3).

Определение 2. Интеграл $V_s(t, x_1, \ldots, x_n) = c_s$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$ устойчив относительно постоянно действующих возмущений, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1(\varepsilon, t_0)$, $\delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$, что как только

$$R^2 < \delta_1^2, \quad |V_s(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))| < \delta_2$$

то отсюда следует $|V_s(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| < \varepsilon$. Здесь $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — решение системы (1.4).

Очевидно, что если постоянно действующие возмущения сохраняют интеграл $V_s = c_s$, то он устойчив относительно таких постоянно действующих возмущений.

Предположим, что $p \leqslant m$ первых интегралов (2.1) сохраняются. Тогда, если в качестве функций V и V_* взять $V = V_1'^2 + \ldots + V_p'^2$, $V_* = V_1^2 + \ldots + V_p^{2\prime}$, то они удовлетворяют всем условиям следствия из теоремы 1, и, следовательно, достаточными условиями устойчивости решения (1.2) системы (1.1) при постоянно действующих возмущениях будут условия знакоопределенности функции V_*. Таким образом, в рассматриваемом случае появляется возможность использовать p сохранившихся интегралов системы (1.1) для оценки устойчивости решения (1.2).

Г. К. Пожарицким [9] установлено, что условия знакоопределенности функции $V_* = V_1^2 + \ldots + V_p^2$ являются необходимыми и достаточными для существования какой-либо знакоопределенной функции $\varphi(V_1, \ldots, V_p)$ от известных p интегралов системы (1.1). Отсюда, в частности, следует утверждение: если устойчивость по Ляпунову решения (1.2) установлена построением знакоопределенной функции $\varphi(V_1, \ldots, V_k)$ (например, методом Четаева [10]), то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, сохраняющих все k интегралов.

Для параметрических возмущений определенного типа и при более жестких ограничениях на интегралы (2.2) подобное утверждение доказано В. Г. Деминым [8].

Пример 1. Уравнения движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки допускают однопараметрическое семейство стационарных решений. Этому семейству решений соответствуют равномерные вращения тела вокруг некоторых его осей, совмещенных с вертикалью, с фиксированной угловой скоростью. Достаточные условия устойчивости таких движений установлены В. В. Румянцевым [11] методом Четаева [10] построения функции Ляпунова в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения

$$V_1 = A(\xi_1^2 + 2p_0\xi_1) + B(\xi_2^2 + 2q_0\xi_2) + C(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) + 2P(x_0\eta_1 + y_0\eta_2 + z_0\eta_3) = \text{const} \tag{2.3}$$

$$V_2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3) = 0 \tag{2.4}$$

$$V_3 = A(p_0\eta_1 + \alpha\xi_1 + \xi_1\eta_1) + B(q_0\eta_2 + \beta\xi_2 + \xi_2\eta_2) + C(r_0\eta_3 + \gamma\xi_3 + \xi_3\eta_3) = \text{const} \tag{2.5}$$

Исследуем устойчивость таких равномерных вращений при постоянно действующих возмущениях, обусловленных воздействием малого постоянного гиростатического момента. Уравнения [12], соответствующие уравнениям (1.4), допускают интегралы (2.3), (2.4) и интеграл

$$V_3' = A(p_0\eta_1 + \alpha\xi_1 + \xi_1\eta_1) + B(q_0\eta_2 + \beta\xi_2 + \xi_2\eta_2) + C(r_0\eta_3 + \gamma\xi_3 + \xi_3\eta_3) + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_3\eta_3 = \text{const} \tag{2.6}$$

Сопоставляя интегралы (2.5) и (2.6), заключаем, что постоянно действующие возмущения рассматриваемого типа сохраняют интеграл (2.5) в смысле определения 1, т. е. при достаточно малом $\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ разность $|V_3 - V_3'|$ также мала равномерно относительно ξ_i, η_i $(i = 1, 2, 3)$ в области

$$\sum_{i=1}^{3} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \leqslant H$$

Следовательно, все равномерные вращения, устойчивость которых доказана [11] построением функции Ляпунова из интегралов (2.3) — (2.5), устойчивы и при постоянно действующих возмущениях, обусловленных малым постоянным гиростатическим моментом.

3. Рассмотрим случай, когда p первых интегралов (2.1) сохраняются и q следующих устойчивы ($p + q \leqslant k$) относительно постоянно действующих возмущений R_i ($i = 1, \ldots, n$).

Теорема 2. Если устойчивость по Ляпунову решения (1.2) системы (1.1) доказана построением функции Ляпунова из $p + q$ первых интегралов (2.1), p из которых сохраняются и q устойчивы относительно постоянно действующих возмущений, то это решение устойчиво при таких постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку устойчивость по Ляпунову решения (1.2) системы (1.1) доказана построением функции Ляпунова из $p + q$ первых интегралов (2.1), то в силу теоремы [9] функция

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p+q} V_i^2(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{3.1}$$

является определенно-положительной, т. е. существует $W(x_1, \ldots, x_n)$ — определенно-положительная, такая, что

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.2}$$

Укажем $l > 0$ такое, что поверхность

$$W(x_1, \ldots, x_n) = l \tag{3.3}$$

целиком лежит внутри шара $x^2 \leqslant \varepsilon^2$. Так как V — непрерывная функция V_i ($i = 1, \ldots, p + q$), то по условиям теоремы она будет интегралом системы (1.1), устойчивым относительно рассматриваемых постоянно действующих возмущений. Это означает, что для каждого $l > 0$ существуют $\delta(l, t_0) > 0$, $\delta_1(l, t_0) > 0$ такие, что как только

$$R^2 < \delta_1^2, \quad V(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) < \delta \tag{3.4}$$

то для всех $t \geqslant t_0$

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) < l \tag{3.5}$$

где $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) — решение системы (1.4).

Таким образом, если начальные данные удовлетворяют условию $x^2(t_0) < \eta^2$, где $x^2 = \eta^2$ — сфера, целиком лежащая внутри поверхности $V(t_0\, x_1, \ldots, x_n) = \delta$, то во все время движения при выполнении первого из условий (3.4) будет выполняться неравенство (3.5). Но это с учетом (3.2) означает, что решение системы (1.4) не может покинуть область, ограниченную поверхностью (3.3), и следовательно, во все время движения выполняется неравенство $x^2(t) < \varepsilon^2$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Рассмотрим задачу о перманентных вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Для гироскопа Эйлера доказано, что равномерные вращения вокруг большой и малой главной оси его эллипсоида инерции устойчивы. Этот факт можно установить построением функции Ляпунова из интегралов энергии, площадей, геометрического и постоянство модуля момента количества движения

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const} \tag{3.6}$$

В. И. Арнольдом [2] доказано, что интеграл (3.6) устойчив в смысле определения 2 при постоянно действующих возмущениях, сохраняющих гамильтонову структуру системы (например параметрические возмущения, обусловленные малыми возмущениями конструктивных параметров). Следовательно, равномерные вращения вокруг большой и малой главных осей эллипсоида инерции гироскопа Эйлера устойчивы при таких постоянно действующих возмущениях в силу теоремы 2. Это утверждение совпадает с результатами работы [2].

Для гироскопа Лагранжа необходимым и достаточным условием устойчивости равномерных вращений вокруг его динамической оси симметрии служит критерий Майевского, который можно установить построением функции Ляпунова из интегралов энергии, площадей, геометрического и интеграла Лагранжа $r = \text{const}$. В работе [13] доказано, что интеграл $r = \text{const}$ устойчив при постоянно действующих возмущениях типа описанного выше ($z_0 \neq 0$). Таким образом, в силу теоремы 2 критерий Майевского является критерием устойчивости таких равномерных вращений при постоянно действующих возмущениях, сохраняющих гамильтонову структуру системы, т. е. в определенном смысле он универсален.

Автор благодарит П. В. Харламова и А. М. Ковалева за полезное обсуждение статьи.

Поступила 8 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
2. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5.
3. *Демин В. Г.* Об устойчивости перманентного вращения тяжелого твердого тела, мало отличающегося от гироскопа Ковалевской. Тр. ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы. Теор. механика, т. 1, 1963, вып. 2.
4. *Демин В. Г.* Об устойчивости поступально-вращательного движения стреловидного спутника планеты. Тр. ун-та Дружбы Народов им. П. Лумумбы. Теор. механика, т. 17, 1966, вып. 4.
5. *Дубошин Г. Н.* К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Тр. Гос. астрон. ин-та им. Штернберга, 1940, т. 14, вып. 1.
6. *Четаев Н. Г.* Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1931, т. 91, кн. 4. Матем., вып. 1.
7. *Кузьмин П. А.* Устойчивость при параметрических возмущениях. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
8. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
9. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
10. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.— Л., Гостехтеориздат, 1946.
11. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1957, т. 20, вып. 1.
12. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел. В кн. Механика твердого тела, 1972, вып. 4.
13. *Ковалев А. М.* Сохранение интегралов движения при малом изменении функции Гамильтона в некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.