Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

ИНВАРИАНТЫ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ РЕЗОНАНСНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Описание инвариантов, порождаемых в системах обыкновенных уравнений гомеоморфизмами окрестности особой точки, связано как с задачей устойчивости [1, 2], так и с более широкой задачей топологической, аналитической (или формальной) классификации таких систем [3, 4].

Если собственные значения линейной части системы связаны лишь одним резонансным соотношением, приведение к нормальной форме [5] позволяет распространить полученные в работе [6] результаты по инвариантам на системы n-го порядка [7]. Именно, показано, что группа всех аналитических гомеоморфизмов окрестности особой точки порождает в пространстве коэффициентов уравнений nh инвариантных множеств, зависящих от первых $2qh+1$ членов разложения правых частей (q — порядок резонанса, h — коразмерность вырождения системы). Кроме них группа может иметь лишь особые инвариантные множества (зависящие от всех коэффициентов системы).

1. Формулировка результата. Рассматриваются автономные системы порядка n

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $f(x)$ — вектор-функции, аналитические в окрестности точки $x = 0$.

Собственные числа λ_i линейной части связаны единственным резонансным соотношением

$$\lambda_1 n_1 + \ldots + \lambda_n n_n = 0 \tag{1.2}$$

Существует единственный формальный степенной ряд

$$u = u_q + u_{q+1} + \ldots, \qquad u_q = x_1^{n_1} \ldots x_n^{n_n} \tag{1.3}$$

удовлетворяющий условиям:

1) в разности $u - u_q$ отсутствуют резонансные слагаемые

2) $Lu \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_{h+1} u_q^{h+1} + g_{h+2} u_q^{h+2} + \ldots, \qquad g_{h+1} \neq 0$

Число $h \geqslant 1$ будем называть коразмерностью вырождения системы (1.1). Знак числа g_{h+1} определяет устойчивость точки $x = 0$ в критических случаях одного нулевого или пары чисто мнимых корней.

Группа G всех аналитических гомеоморфизмов окрестности точки $x = 0$ порождает в пространстве коэффициентов разложения $f(x)$ систему инвариантных множеств. Пусть ρ_s — число тех из них, которые зависят лишь от членов разложения $f(x)$ порядка не выше s. С ростом s число ρ_s не убывает. Однако справедливо утверждение.

Теорема. Число $\rho_{s_0} = \max\limits_{s<\infty} \rho_s$ инвариантных множеств, зависящих лишь от конечного отрезка $f(x)$, конечно

$$\rho_{s_0} = nh$$

а максимальный порядок s_0 этого отрезка определяется формулой

$$s_0 = 2q\imath + 1$$

Этим исчерпываются все инвариантные множества формальных преобразований. Кроме них, аналитическая группа G может иметь лишь особые инвариантные множества (зависящие от всех коэффициентов разложения $f(x)$), ответственные за сходимость преобразований.

2. Доказательство теоремы. Изложение этапов доказательства, аналогичных тем, которые имеются в работе [6], не будет подробным.

Для произвольного степенного ряда $\xi_k = \Sigma c^{(k)}_{k_1\ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и оператора $Z = \Sigma \xi_k \partial / \partial x_k$ положим

$$\xi_k^\mu = \sum_{k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n=\mu} c^{(k)}_{k_1\ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \qquad Z^\nu = \sum_k \xi_k^{\nu+\lambda_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

2.1. Поскольку формальное преобразование любой аналитической системы к нормальной форме всегда существует [5], задача равносильна классификации нормальных форм относительно группы G преобразований их сохраняющих.

Для произвольного элемента Z соответствующей алгебры $[L, Z] = 0$. В частности, $[L, Z]^\nu \equiv [L^\circ, Z^\nu] = 0$. Отсюда

$$[L_1, Z_l^\nu] = -\sum_{\alpha+\beta=l+1} [L_\alpha, Z_\beta^\nu]$$

Поскольку

$$[L_1, Z_l^\nu] = \nu Z_l^\nu \, (L_1 \equiv \Sigma \lambda_k x_k \partial / \partial x_k)$$

то при $\nu \neq 0$ из $Z_1^\nu = \ldots = Z_{l-1}^\nu = 0$ следует $Z_l^\nu = 0$. Поэтому нормальную форму сохраняют лишь преобразования с операторами вида $Z = Z^\circ$.

2.2. Ряд (1.3) определяется условиями $u^\circ = u_q$, $(Lu)^\nu = 0$ при всех $\nu \neq 0$. Под действием нормализующего преобразования $x = x'\,(1 + \omega(x'))$, $\omega(0 = 0$ ряд u и оператор L преобразуются соответственно в u' и оператор

$$L^\circ = L_1 + \overset{\circ}{L}_{qm+1} + \ldots + \overset{\circ}{L}_{q(m+1)+1} + \ldots$$

в нормальной форме. При этом $Lu = L^\circ u'$. Получим

$$(Lu)^\nu = (L^\circ u')^\nu = L^\circ u'^\nu = 0$$

Легко найти $u' = u'^\circ$, причем в новых переменных $u'^\circ = u_q + \ldots$. Далее

$$L^\circ u' = (L^\circ u')^\circ = (Lu)^\circ = g_{h+1} u_q^{h+1} + \ldots |_{x\to x'} = g_{h+1} u_q^{h+1} + \ldots$$

Отсюда видно, что при нормализующем преобразовании числа h, g_{h+1} сохраняются. Кроме того

(2.1) $\qquad m \leqslant h$

(2.2) $\qquad L^\circ u_q = \overset{\circ}{L}_{q(h+1)} u_q + \ldots = g_{h+1} u_q^{h+1} + \ldots$

2.3. Встречающиеся в дальнейшем операторы образуют ряды, составленные из операторо з вида

$$Z_{q\mu+1} = u_q^{\mu}\left(\alpha_{\mu,1}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_{\mu,n}x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \equiv u_q^{\mu} Z_1(\alpha_\mu) \tag{2.3}$$

Если $Z_1(\alpha_\mu)\, u_q \neq 0$, то $Z(\alpha_\mu)\, u_q = \beta u_q$, $\beta = \alpha_{\mu,1} n_1 + \ldots + \alpha_{\mu,n} n_n$ и имеет место разложение

$$Z_1(\alpha_\mu) = Z_1(\alpha_\mu') + \frac{\beta}{q} X_1$$

$$Z_1(\alpha_\mu')\, u_q = 0, \qquad X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Рассмотрим n линейно независимых операторов

$$X_1,\ Z_1(\alpha_1), \ldots,\ Z(\alpha_{n-1}) \qquad (Z_1(\alpha_k)\, u_q = 0) \tag{2.4}$$

Любой оператор вида (2.3) может быть записан как их линейная комбинация

$$Z_{q\mu+1} = u_q^{\mu}(\beta_0 X_1 + \beta_1 Z_1(\alpha_1) + \ldots + \beta_{n-1} Z_1(\alpha_{n-1}))$$

Всякий оператор $Z_{(\mu)} \equiv Z_{q\mu+1} + Z_{q(\mu+1)+1} + \ldots$ удовлетворяет тождеству

$$[L, Z_{(\mu)}] = [L, Z]^\circ_{pq+1} + [L, Z]^\circ_{q(p+1)+1} + \ldots$$

при некотором натуральном p. Если операторы $Z_{q(\mu+1)+1}$, $Z_{q(\mu+2)+1}, \ldots$ выбраны так, что при заданном $Z_{q\mu+1}$ число p максимально, оператор $Z_{(\mu)}$ называется максимальным и ему сопоставляется натуральное число $\tau = q(p - \mu)$.

Ближайшая задача состоит в вычислении чисел τ для всех максимальных операторов, формальные разложения которых начинаются с операторов (2.4), умноженных на u_q^{μ}, $\mu = 0, 1, \ldots$

Для операторов $Z_1(\alpha_k)$ тривиальным образом получается $[L, Z_1(\alpha_k)] = 0$, и, значит, $\tau = \infty$.

2.4. Рассмотрим оператор $X = X_1 + \overset{\circ}{X}_{q+1} + \overset{\circ}{X}_{2q+1} + \ldots$.

Имеем

$$[L, X]_{kq+1} = 0, \qquad k < m$$

$$[L, X]_{mq+1} = [L_1, \overset{\circ}{X}_{mq+1}] + [\overset{\circ}{L}_{mq+1}, X_1] = -mq\overset{\circ}{L}_{mq+1}$$

Следовательно, $[L, X] = -mq\overset{\circ}{L}_{mq+1} + \ldots$ независимо от выбора операторов $\overset{\circ}{X}_{kq+1}$, $k \geqslant 1$, так что для оператора X будет $\tau = qm$.

Для операторов вида $X_{(\mu)} = u_q^\mu X_1 + \ldots$ будет $\tau = qm$. В самом деле, независимо от выбора $\overset{\circ}{X}_{q(\mu+1)+1}, \ldots$

$$[L, X_{(\mu)}] = [\overset{\circ}{L}_{mq+1}, u_q^\mu X_1] + \ldots = -mqu_q^\mu L_{mq+1} + \ldots$$

2.5. Вычислим τ для операторов вида

$$Z_{(\mu)} = u_q^\mu \left(\alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \ldots, \quad \alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_n n_n = 0$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
(2.5)\qquad & L = \varphi_1(u)\, x_1 \partial / \partial x_1 + \ldots + \varphi_n(u)\, x_n \partial / \partial x_n \\
& \varphi_k(u) = \lambda_k + a_{km} u^m + \ldots \\
& (a_{1l} n_1 + \ldots + a_{nl} n_n = 0, \ l < h \ \text{в силу (2.2)}) \\
& Z_{(\mu)} = \psi_1(u)\, x_1 \partial / \partial x_1 + \ldots + \psi_n(u)\, x_n \partial / \partial x_n \\
& \psi_k(u) = \alpha_{k\mu} u^\mu + \ldots
\end{aligned}$$

Получим

$$[L, Z_{(\mu)}] = \sum_l (\varphi\psi_l' - \psi\varphi_l')\, u_q x_l \frac{\partial}{\partial x_l} \equiv \sum_l u_q x_l \Phi_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$\varphi = n_1\varphi_1 + \ldots + n_n\varphi_n, \qquad \psi = n_1\psi_1 + \ldots + n_n\psi_n$$

$$\sum_k n_k \Phi_k = \varphi\psi' - \psi\varphi'$$

Пусть $\sigma(f)$ означает наинизшую степень, встречающуюся в разложении f в степенной ряд (по u). Из равенства (2.5) следует, что

$$\sigma(u\Phi_k) \leqslant \mu + 2h - m \quad \text{при} \quad \mu \neq m$$

В самом деле

$$\sigma(\varphi) = h, \ \sigma(\varphi') = h - 1, \ \sigma(\Phi_k) \geqslant \mu + h$$

Существует такое k, что $\sigma(\varphi\psi_k' + \Phi_k) = h + \mu - 1$. Далее

$$\sigma(\psi) = \sigma\left(\frac{\varphi\psi_k' + \Phi_k}{\varphi_k'}\right) \leqslant h - m + \mu$$

Отсюда, в силу условия $\mu \neq m$

$$\sigma(\Phi_k) \leqslant \sigma\left(\sum_k n_k\Phi_k\right) = \sigma(\psi\varphi' - \varphi\psi') = 2h - m + \mu - 1$$

Следовательно, $\sigma(u\Phi_k) \leqslant \mu + 2h - m$.

Пусть $\psi = cu^{\mu+h-m} + \ldots$. Чтобы получить $\sigma(u\Phi_k) = \mu + 2h - m$, необходимо, чтобы равенства $\psi\varphi_k' - \varphi\psi_k' = 0$, $k = 1, \ldots, n$ выполнялись до порядка $2h - m - 1$ включительно.

В частности, должны выполняться условия

$$mca_{km} - \mu b\alpha_{km} = 0 \quad (b = a_{1h}n_1 + \ldots + a_{nh}n_n)$$

Другими словами, оператор, для которого $\tau = q(2i - m)$, определяется единственным образом. Для прочих операторов, как линейно независимых с указанным, равенства $\alpha_{km} = \lambda a_{km}$ не могут выполняться ни при каком λ. Следовательно, для этих операторов $mca_{km} - \mu b\alpha_{km} \neq 0$ и $\tau = qh$.

Функции Φ_k максимальной степени $\mu + 2h - m$ получаются следующим образом. Определим ψ_k условиями

$$u^{\mu-m}\varphi_1' - \psi_1' = (m-\mu)\, u^{\mu-m-1}\varphi, \qquad u^{\mu-m}\varphi_k' - \psi_k' = 0, \qquad k \geqslant 2$$

Тогда $u^{\mu-m}\varphi' - \psi' = (m - \mu)\, u^{\mu-m-1}\varphi$, откуда $\psi = u^{\mu-m}\varphi$. Поэтому

$$\psi\varphi_k' - \varphi\psi_k' = \varphi\,(u^{\mu-m}\varphi_k' - \psi_k') = \delta_k^1\,(m-\mu)\, u^{\mu-m-1}\varphi^2$$

т. е. $\sigma(\psi\varphi_k' - \varphi\psi_k') = \mu + 2h - m - 1,\ k \geqslant 1$.

Таким образом, при $\mu \neq m$ для всех операторов, кроме одного (обозначим его $Y_{(\mu)}$), $Z_{(\mu)} = u_q^{\mu} Z_1 + \ldots$ будет $\tau = qh$.

Для оператора $Y_{(\mu)}$ будет $\tau = q\,(2h - m)$.

2.6. Рассмотрим случай $\mu = m$.

2.6.1. Если выбрать $\psi_k' = \varphi_k'$, $k \geqslant 1$, то будет $\Phi_k = 0$, $k \geqslant 1$, так что для соответствующего оператора $(Y_{(m)})$ $\tau = \infty$.

2.6.2. Если $\psi_k' \neq \varphi_k'$, то не могут совпадать и первые члены разложений ψ_k' и φ_k', так как это приведет к максимальному оператору, уже рассмотренному в п. 2. 6. 1. Отсюда следует, что $\sigma(\psi\varphi_k' - \varphi\psi_k') = \mu + h - 1$ и, значит, $\tau = qh$.

2.7. Упорядоченный набор коэффициентов a полиномов фиксированной степени s, являющихся отрезками разложений $f(x)$, будем рассматривать как координаты точек евклидового пространства R_s. Отношение порядка для R_s и R_{s+k} на совпадающем множестве элементов предполагаются одинаковым. Бесконечномерное линейное пространство R всех коэффициентов можно рассматривать как индуктивный предел последовательности $R_2, R_3, \ldots$.

Группа G всех аналитических преобразований окрестности точки $x = 0$, оставляющих эту точку на месте и сохраняющую линейную часть системы (1.1), индуцируют группу преобразований G' в $R : G' \times R \to R$. Пространства R_s инвариантны относительно преобразований группы G', а совокупность преобразований из G', нетождественно действующих в R, образует группу Ли G_s'. Пусть

$$Z = \sum_i \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Z^* = Z + \sum_k \zeta_k(a)\frac{\partial}{\partial a_k}$$

— операторы, отвечающие однопараметрическим подгруппам групп G и $G \times G'$. Условие инвариантности системы (1.1) относительно преобразований группы $G \times G'$ дает $[L, Z^*] = 0$, или, что то же самое

$$[L, Z] = \sum_{i,k} \zeta_k(a)\frac{\partial f_i}{\partial a_k}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) выполняется тождественно по x и служит для вычисления элементов $\zeta_k^{\,j}(a)$ векторной матрицы $(\zeta_k^{\,j})$ алгебры, отвечающей группе G'. Эта матрица имеет блочно-треугольное строение. Если оператор Z — максимальный, то обращаются в нуль, сверх того, все элементы его строки, принадлежащие $\tau = q(p - \mu)$ ненулевым блокам. При этом никакой линейной комбинацией оператора Z с операторами более высокого порядка это число нельзя увеличить.

Число ρ_s инвариантных множеств, порождаемых группой G' в пространстве R_s, определяется числом нулевых строк в соответствующей матрице $(\zeta_k^{\,j})_s$, т. е. числом максимальных операторов $Z_{(\mu)}$, для которых одновременно

$$qp + 1 > s, \qquad q\mu + 1 \leqslant s \tag{2.7}$$

Если система (1.1) с самого начала записывается в нормальной форме, то $s = qs^* + 1$, $s^* = 0, 1, \ldots$. Полагая $\tau^* = p - \tau$, неравенства (2.7) запишем в виде

$$s^* - \tau^* < \mu \leqslant s^* \tag{2.8}$$

Пусть r_1, r_2, r_3 — число нулевых строк, порождаемых в матрице $(\zeta_k^{\,j})_s$ операторами, для которых $\tau^* = m, h, 2h - m$ соответственно Из неравенств (2.8) с учетом предыдущих результатов получим

$$r_1 = m \quad (s^* \geqslant m) \qquad r_3 = \begin{cases} 2h - m & (2h - m \leqslant s^* < 2h) \\ 2h - m + 1 & (s^* \geqslant 2h) \end{cases}$$
$$r_2 = (n-2)h \quad (s^* \geqslant h)$$

При вычислении r_3 учтено, что хотя для $s^* \geqslant 2h$ будет $\mu > s^* - \tau^* \geqslant 2h - (2h - m) = m$, в число операторов, удовлетворяющих неравенствам (2.8), следует включить еще один — $Y_{(m)}$. Число инвариантных множеств вычисляется по формуле $\rho_s = r_1 + r_2 + r_3 - 1$ (неучтенное выше преобразование подобия уменьшает число инвариантных множеств на единицу). Отсюда $\rho_{s_0} = nh$. Из формул для r_i видно, что это число перестает увеличиваться при $s^* \geqslant 2h$. Следовательно, $s_0 = 2qh + 1$.

3. Пример. Рассмотрим систему четвертого порядка в нормальной форме с коразмерностью вырождения $h = 1$

$$\begin{aligned} &x_i^{\cdot} = x_i(\lambda_i + a_{i1}u + a_{i2}u^2 + \ldots), \quad i \leqslant 4 \\ &u = x_1^{n_1} \ldots x_4^{n_4}, \quad \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 + \lambda_4 n_4 = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Согласно теореме этой статьи, система (3.1) имеет четыре инварианта, зависящих от отрезков правых частей порядка не выше $2q + 1$, т. е. от коэффициентов $a_{11}, \ldots, a_{42}$.

Найдем эти инварианты.

Компоненты операторов, отвечающих однопараметрическим группам, сохраняющим нормальную форму уравнений (3.1), имеют вид (рассматриваются лишь преобразования, затрагивающие коэффициенты $a_{11}, \ldots, a_{42}$)

$$\xi_i = \alpha_i x_i u$$

Из определяющих уравнений

$$\alpha_i x_i \sum_{j=0}^{\infty} (a_{ij} + n_1 a_{1j} + \ldots + n_n a_{nj})\, u^{j+1} = \alpha_i x_i \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} u^{j+1} +$$

$$+ x_i \sum_{j=0}^{\infty} j a_{ij} u^{j-1} (\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_n n_n) + x_i \sum_j \zeta_{ij}(c)\, u^j$$

находим

$$\zeta_{i,j+1}(a) = \alpha_i (n_1 a_{1j} + \ldots + n_n a_{nj}) - j a_{ij} (\alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_n n_n), \quad j = 0,\ 1,\ \ldots$$

Отсюда, если не учитывать преобразования подобия ($\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$), использованием известной стандартной процедуры найдем следующие инварианты:

(3.2) $$a_{i1} = \mathrm{Inv},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\omega_1 [n_3 (q^* - a_{31} q) + n_4 (q^* - a_{41} q)] - \omega_2 [n_1 (q^* - a_{11} q) + n_2 (q^* - a_{21} q)] = \mathrm{Inv}$$

$$(\omega_1 = n_1 a_{12} + n_2 a_{22},\ \omega_2 = n_3 a_{32} + n_4 a_{42},\ q^* = n_1 a_{11} + \ldots + n_n a_{41})$$

Таким образом, любая аналитическая система четвертого порядка при $h = 1$ и одном резонансном соотношении (1.2) может быть приведена формальным преобразованием к виду

$$x_i^{\cdot} = x_i (\lambda_i + a_{i1} u + a_{i2} u^2)$$

где a_{i1} фиксирован, а a_{i2} связаны единственным условием (3.2).

Поступила 18.IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1971.
4. *Рейзинь Л. Э.* Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, «Зинатне», 1971.
5. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25; 1972, т. 26.
6. *Мархашов Л. М.* Аналитическая эквивалентность систем второго порядка при произвольном резонансе. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
7. *Мархашов Л. М.* Инварианты многомерных систем с одним резонансным соотношением. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.