Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

К ВОПРОСУ О ДОПУСТИМОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕЦЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. Р. Меркин

(Ленинград)

В гироскопических системах широко применяются прецессионные уравнения. Условия, при выполнении которых применение этих уравнений в известном смысле законно, установлены для линейных автономных и некоторых частных случаев нелинейных систем [1–3]. Ниже дается обоснование прецессионной теории для широкого класса нелинейных и неавтономных систем.

Рассмотрим систему, на которую действуют гироскопические силы, линейно зависящие от большого положительного параметра H, силы сопротивления с полной диссипацией и другие обобщенные силы $Q_k(q, t)$, зависящие от координат q и времени t. В обобщенные силы $Q_k(q, t)$ могут входить потенциальные, позиционно-неконсервативные (радиально-коррекционные) и другие силы, зависящие от координат, возмущающие силы, зависящие явно от времени, силы инерции и т. п.

Будем считать, что уравнения движения можно записать в следующей форме [1, 2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q_k^{\cdot}} - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k(q, t) - \sum_{j=1}^{s}(b_{kj} + Hg_{kj})\, q_j^{\cdot} \qquad (k = 1, \ldots, s) \tag{1}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{kj} q_k^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

Здесь T_2 — определенно-положительная квадратичная форма обобщенных скоростей $q^{\cdot}$. Предполагается, что коэффициенты инерции $a_{kj} = a_{jk}$, коэффициенты диссипативных сил $b_{kj} = b_{jk}$ и гироскопические коэффициенты $g_{kj} = -g_{jk}$ — непрерывные функции координат q и времени t.

К уравнениям вида (1) сводятся многие задачи о движении нелинейных гироскопических устройств на подвижном основании.

Подставляя значение T_2 в (1), получим эквивалентное векторно-матричное уравнение

$$\frac{d}{dt} A\mathbf{q}^{\cdot} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{q}^{\cdot}\cdot\mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{Q} - (B + HG)\,\mathbf{q}^{\cdot} \tag{2}$$

$$A = \|a_{kj}\|, \quad B = \|b_{kj}\|, \quad G = \|g_{kj}\|$$

$$\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_s), \qquad \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_s)$$

Здесь под первым слагаемым в правой части понимается вектор, проекции которого определяются равенствами

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{q}^{\bullet}\cdot\mathbf{q}^{\bullet}\right)_k = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial q_k}\mathbf{q}^{\bullet}\cdot\mathbf{q}^{\bullet}$$

В переменных Гамильтона $\mathbf{q}$, $\mathbf{p} = A\mathbf{q}^{\bullet}$ уравнение (2) эквивалентно двум уравнениям первого порядка ($\mu = H^{-1}$ — малый параметр)

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}^{\bullet} = A^{-1}\mathbf{p} \\ &\mu\mathbf{p}^{\bullet} = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}A^{-1}\mathbf{p}\cdot A^{-1}\mathbf{p} + \mu\mathbf{Q} - (\mu B + G)A^{-1}\mathbf{p} \end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения — частный случай следующей сингулярно-возмущенной системы:

$$\mathbf{q}^{\bullet} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu), \qquad \mu\mathbf{p}^{\bullet} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu) \tag{4}$$

укороченные уравнения которой имеют вид (в укороченных уравнениях векторам $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ соответствуют векторы $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$)

$$\mathbf{u}^{\bullet} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t, \mu), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t, \mu) = 0 \tag{5}$$

Для случая, когда правые части уравнений (4) не зависят от малого параметра μ, А. Н. Тихонов [4] доказал теорему, согласно которой при выполнении ряда условий решение $\mathbf{q}(t, \mu)$, $\mathbf{p}(t, \mu)$ полных уравнений (4) стремится при $\mu \to 0$ к решению $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ укороченной системы (5). В. Вазов [5] отметил, что все результаты применимы и для случая, когда правые части уравнений (4) зависят достаточно регулярным образом от малого параметра μ. Необходимо только учесть, что это замечание справедливо при выполнении следующих дополнительных условий, непосредственно вытекающих из доказательства теоремы А. Н. Тихонова: 1) функция $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu)$ должна иметь нулевой порядок относительно параметра μ; 2) уравнение $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu) = 0$ должно иметь изолированный корень $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, t, \mu)$ при $\mu = 0$.

Вернемся к уравнениям (3). Очевидно, что первое дополнительное условие выполнено, а второе требует, чтобы матрица G, составленная из гироскопических коэффициентов, была неособенная (отсюда вытекает, в частности, что число координат должно быть четным). Покажем, что при сделанных предположениях и при $\det G \neq 0$ будут выполнены все условия теоремы А. Н. Тихонова.

Составим уравнение пограничного слоя

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}A^{-1}\mathbf{p}\cdot A^{-1}\mathbf{p} + \mu\mathbf{Q} - (\mu B + G)A^{-1}\mathbf{p} \tag{6}$$

В этом уравнении $\mathbf{q}$ и t фиксированы, а независимой переменной является τ. Приравняем правую часть уравнения (6) к нулю и представим полученное равенство в следующем виде:

$$(\mu B + G)A^{-1}\mathbf{p} = \mu\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}}A^{-1}\mathbf{p}\cdot A^{-1}\mathbf{p} \tag{7}$$

Будем искать решение этого уравнения методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем $\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 = 0$.

Подставим это значение в правую часть равенства (7) и найдем первое приближение

$$\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\varphi}_1 = \mu[(\mu B + G)A^{-1}]^{-1}\mathbf{Q}$$

(в работе [2] доказывается, что при полной диссипации матрица в квадратных скобках неособенная). Очевидно, что второе приближение $\mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2$ будет отличаться от $\boldsymbol{\varphi}_1$ на член, содержащий μ^3. Поэтому при достаточно малом μ особая точка $\boldsymbol{\varphi}$ уравнения пограничного слоя (6) определяется равенством

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, t, \mu) = \mu\, [(\mu B + G) A^{-1}]^{-1}\, \mathbf{Q} + O(\mu^3) \tag{8}$$

Исследуем устойчивость особой точки пограничного слоя при фиксированных $\mathbf{q}$ и t. Для этого положим $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{z}$, внесем это выражение для $\mathbf{p}$ в уравнение (6) и учтем, что $\boldsymbol{\varphi}$ — корень правой части. Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\Big[(\mu B + G) A^{-1}\mathbf{z} - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} A^{-1}\boldsymbol{\varphi}\cdot A^{-1}\mathbf{z} - \\ - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} A^{-1}\mathbf{z}\cdot A^{-1}\boldsymbol{\varphi}\Big] + \frac{1}{2}\mu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} A^{-1}\mathbf{z}\cdot A^{-1}\mathbf{z} \tag{9}$$

При фиксированных $\mathbf{q}$ и t коэффициенты при $\mathbf{z}$ следует рассматривать как постоянные матрицы. Особая точка имеет порядок μ, поэтому при достаточно малом значении μ уравнение первого приближения примет вид

$$A\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + (\mu B + G)\mathbf{x} = 0 \qquad (A^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{x})$$

В работе [2] показано, что все корни соответствующего характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части (по предположению матрицы A и B определенно-положительны). На основании теоремы Ляпунова об устойчивости по уравнениям первого приближения заключаем, что при достаточно малых значениях $|\mathbf{z}|$ нулевое решение $\mathbf{z} = 0$ нелинейного уравнения (9), а вместе с ним особая точка $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, t, \mu)$ уравнения пограничного слоя (6) при фиксированных $\mathbf{q}$ и t асимптотически устойчивы. Из этого следует, что применима теорема А. Н. Тихонова, и решение полных уравнений (3) будет достаточно точно определяться решением укороченной системы

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = A^{-1}\mathbf{v}, \quad \frac{1}{2}\mu\frac{\partial A}{\partial \mathbf{u}} A^{-1}\mathbf{v}\cdot A^{-1}\mathbf{v} + \mu\mathbf{Q} - (\mu B + G) A^{-1}\mathbf{v} = 0$$

На основании равенства (8) первое слагаемое во втором уравнении можно отбросить, в результате чего укороченная система примет вид

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = A^{-1}\mathbf{v}, \qquad \mu\mathbf{Q} - (\mu B + G) A^{-1}\mathbf{v} = 0$$

или, если снова перейти к лагранжевым переменным и заменить μ на H^{-1}

$$(B + HG)\,\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, t) \tag{10}$$

что представляет векторно-матричную запись прецессионных уравнений (они получаются из уравнений (1) при $T_2 = 0$).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Если на материальную систему действуют гироскопические силы, зависящие от большого параметра H, силы сопротивления с полной диссипацией и другие обобщенные силы $Q_k(q, t)$, то при условии, что определитель матрицы $G(q, t)$, составленной из гироскопических коэффициентов, отличен от нуля, решение полных нелинейных и неавтономных дифференциальных уравнений (1) достаточно точно совпадает с решением прецессионных уравнений. (Конечно, предполагается, что начальные значения вектора $\mathbf{p}_0 = A(\mathbf{q}_0, t_0)\,\mathbf{q}_0^{\bullet}$ входят в область влияния корня $\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{q}, t, \mu)$ уравнения пограничного слоя (7).)

Этой теореме можно дать простую геометрическую интерпретацию. Одно прецессионное уравнение (10) эквивалентно двум следующим уравнениям:

$$\mathbf{u}^{\bullet} = \mathbf{v}, \qquad (\mu B + G)\,\mathbf{v} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, t)$$

В $2s$-мерном фазовом пространстве ($\mathbf{u} = \mathbf{q}$; $\mathbf{v} = \mathbf{q}^{\bullet}) = (q_1, \ldots, q_s; q_1^{\bullet}, \ldots \ldots, q_s^{\bullet})$ второе уравнение определяет интегральную кривую γ (с течением времени t кривая γ для неавтономных систем деформируется и перемещается в пространстве), по которой движется изображающая точка $N(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ прецессионных уравнений. При выполнении условий теоремы изображающая точка $M(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet})$ полных уравнений движения (1) быстро приближается к кривой γ и затем движется вдоль нее.

Заметим, что за счет уменьшения параметра μ модуль разности $\mathbf{q}(t, \mu) - \mathbf{u}(t, \mu)$ можно сделать сколь угодно малой величиной не для всех $t > 0$, а только в некотором промежутке времени $(0, T)$. Если пренебречь разностью в скоростях движения изображающих точек M и N вдоль кривой γ, то можно считать, что решение $\mathbf{u}(t, \mu)$ прецессионных уравнений приемлемо для всех $t \geqslant 0$.

Доказанная теорема о приемлемости решений прецессионных уравнений для нелинейных и неавтономных систем требует наличия сил сопротивления с полной диссипацией. Поэтому она не может заменить доказанные в работах [1,2] аналогичные теоремы для линейных автономных систем, не содержащих силы сопротивления.

Покажем, к чему приводит нарушение условия $\det G \neq 0$ при выполнении всех прочих условий. Пусть полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\alpha^{\bullet\bullet} + k\alpha^{\bullet} + Hg_1\beta^{\bullet} + Hg_2\gamma^{\bullet} = 0 \\ &\beta^{\bullet\bullet} + k\beta^{\bullet} - Hg_1\alpha^{\bullet} + Hg_3\gamma^{\bullet} = 0 \\ &\gamma^{\bullet\bullet} + k\gamma^{\bullet} - Hg_2\alpha^{\bullet} - Hg_3\beta^{\bullet} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

На систему действуют силы сопротивления $-k\alpha^{\bullet}$, $-k\beta^{\bullet}$, $-k\gamma^{\bullet}$ с полной диссипацией и гироскопические силы с матрицей

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ -g_1 & 0 & g_3 \\ -g_2 & -g_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Прецессионные уравнения (u, v, w соответствуют α, β, γ)

$$\begin{aligned} &ku^{\bullet} + Hg_1v^{\bullet} + Hg_2w^{\bullet} = 0, \\ &kv^{\bullet} - Hg_1u^{\bullet} + Hg_3w^{\bullet} = 0, \\ &kw^{\bullet} - Hg_2u^{\bullet} - Hg_3v^{\bullet} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

при $k \neq 0$ и $\mu = H^{-1} \neq 0$ имеют единственное решение

$$u = \alpha_0, \quad v = \beta_0, \quad w = \gamma_0 \tag{13}$$

Если разделить уравнения (11) на H, ввести малый параметр $\mu = H^{-1}$, затем проинтегрировать их и сохранить в общем решении только главные члены, то будем иметь

$$\alpha = \alpha_0 + g_3E, \ \beta = \beta_0 - g_2E, \ \gamma = \gamma_0 + g_1E$$

где

$$E = \frac{g_3\alpha_0^{\cdot} - g_2\beta_0^{\cdot} + g_1\gamma_0^{\cdot}}{k(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)}(1 - e^{-kt})$$

Это решение отличается от решения (13) на слагаемые, не зависящие от малого параметра $\mu = H^{-1}$, поэтому переход от полных уравнений (11) к прецессионным уравнениям (12) недопустим (в данном примере $\det G = 0$).

Поступила 26 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* О некоторых общих свойствах материальных систем, содержащих гироскопы. Вестн. ЛГУ, сер. матем., физ. и химии, 1952, № 9.
2. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
3. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости движения гирорамы. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5.
4. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31(73), № 3.
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.