Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

В. Г. Демин, Ф. И. Киселев

(Москва)

В задаче о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в центральном ньютоновском силовом поле (в частности в поле де Брюна [1]) методом малого параметра Пуанкаре доказывается существование семейства периодических решений. Предполагается, что тело мало отличается от динамически симметричного, а его центр тяжести достаточно близок к закрепленной точке. Доказательство проводится с использованием аппарата гамильтоновых систем.

Исследуем движение твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле тяготения, воспользовавшись для этой цели каноническими переменными Деприи [2], которые введем следующим образом. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O, ось аппликат которой направлена вертикально вверх, а $Oxyz$ — система осей, направленных вдоль главных осей инерции для точки O. Пусть далее φ, ψ, ϑ — эйлеровы углы, определяющие положение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной. Введем плоскость, содержащую точку O и перпендикулярную кинетическому моменту G. Положение этой плоскости зададим долготой h ее линии узлов на плоскости OXY и ее наклоном I к той же плоскости. Введем, наконец, еще два эйлеровых угла, определяющих положение подвижной системы осей относительно плоскости, перпендикулярной кинетическому моменту: угол собственного вращения l и угол нутации b.

Примем теперь в качестве координат введенные углы l, g, h. Сопряженные с ними канонические импульсы соответственно L, G, H, где

$$H = G\cos I, \qquad L = G\cos b$$

Движение твердого тела с одной закрепленной точкой в центральном ньютоновском поле сил определяется гамильтонианом

$$K = T - U$$

$$T = \frac{G^2 - L^2}{2AB}(A\cos^2 l + B\sin^2 l) + \frac{L^2}{2C}$$

$$U = -P(x_c\gamma + y_c\gamma' + z_c\gamma'') - \frac{3P}{2mR}(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)$$

Здесь P — вес тела, m — его масса, x_c, y_c, z_c — координаты центра инерции тела в подвижной системе координат, A, B, C — главные моменты инерции, γ, γ', γ'' — направляющие косинусы радиус-вектора закрепленной точки R, исходящего из притягивающего центра, в подвижной системе.

Направляющие косинусы выражаются через канонические переменные следующим образом:

$$\gamma = \frac{1}{G^2}[H\sqrt{G^2 - L^2}\sin l + L\sqrt{G^2 - H^2}\cos g \sin l +$$
$$+ G\sqrt{G^2 - H^2}\sin g \cos l]$$
$$\gamma' = \frac{1}{G^2}[H\sqrt{G^2 - L^2}\cos l + L\sqrt{G^2 - H^2}\cos g \cos l -$$
$$- G\sqrt{G^2 - H^2}\sin g \sin l]$$
$$\gamma'' = \frac{1}{G^2}[HL - \sqrt{(G^2 - L^2)(G^2 - H^2)}\cos g]$$

Дальнейшие рассуждения справедливы в равной мере для двух следующих случаев. В первом случае центр инерции достаточно близок к закрепленной точке тела, а само тело мало отличается от динамически симметричного. Другой случай характеризуется достаточно большой по модулю угловой скоростью. В обоих случаях надлежащим введением малого параметра можно добиться разделения гамильтониана на две части, необходимого для приложения метода малого параметра Пуанкаре.

В первом случае в качестве малого параметра можно взять величину

$$\mu = \max\left\{\sqrt{\frac{A-B}{m}}, \frac{A}{mR}, \frac{B}{mR}, \frac{C}{mR}, x_c, y_c, z_c\right\}$$

Представим функцию Гамильтона в виде

(1) $$K = K_0 + K_1$$

$$K_0 = \frac{G^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C}, \quad K_1 = \frac{A-B}{2AB}(G^2 - L^2)\cos^2 l - U$$

Здесь K_0 — гамильтониан упрощенной системы канонических уравнений движения, определяющий порождающее решение, а K_1— возмущающий гамильтониан.

Запишем теперь упрощенную систему уравнений движения

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = 0$$
$$\frac{dl}{dt} = \frac{A-C}{AC}L, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{G}{A}, \quad \frac{dh}{dt} = 0$$

Ее общее решение дается формулами

(2) $$L = L_0 = \text{const}, \quad G = G_0 = \text{const}, \quad H = H_0 = \text{const}$$
$$l = \omega_1 t + \beta_1, \quad g = \omega_2 t + \beta_2, \quad h = \beta_3$$
$$\omega_1 = \frac{A-C}{AC}L_0, \quad \omega_2 = \frac{G_0}{A}$$

Решение (2) будет периодическим, если при каких-либо целых числах k_1 и k_2 будет $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$. При этом период порождающего решения равен

(3) $$\tau = 2\pi k_2/\omega_1 = 2\pi k_1/\omega_2$$

Докажем теперь существование периодических решений с периодом (3) системы уравнений с гамильтонианом (1), совпадающих с порождающим решением при $\mu = 0$.

Известные условия существования периодических решений Пуанкаре [3] для гамильтоновых систем можно упростить, приняв во внимание, что уравнения движения допускают два интеграла: интеграл живых сил и интеграл момента количеств движения. В силу сказанного вместо гессиана функции K_0 должен быть отличен от нуля следующий малый гессиан:

$$\frac{D(K'_{0L_0}, K'_{0G_0})}{D(L_0, G_0)} \neq 0 \tag{4}$$

Вторая группа условий периодичности имеет вид (для упрощения записи формально не выделяем в K_1 малый параметр)

$$\frac{\partial \overline{K}_1}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \left(\overline{K}_1 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau K_1\, dt\right) \tag{5}$$

Условие (4) при $A \neq C$ выполняется всегда, так как

$$\frac{D(K'_{0L_0}, K'_{0G_0})}{D(L_0, G_0)} = \frac{A-C}{AC} L_0 \neq 0$$

Что же касается второй группы условий (5), то здесь могут представиться следующие случаи:

$$|k_1| + |k_2| \geqslant 4, \quad |k_1| = 1, \quad |k_2| = 2$$

$$|k_1| = |k_2| = 1, \quad |k_1| = 2, \; |k_2| = 1$$

В первом случае среднее значение гамильтониана за период, как показывают вычисления, не зависит от постоянных β_i и поэтому условия (5) выполняются тождественно.

Три последних случая рассматриваются аналогично. В качестве примера рассмотрим случай $k_1 = k_2 = 1$, для которого в порождающем решении $l - g = \beta_1 - \beta_2$, что и приводит к необходимости дополнительных рассмотрений. Здесь

$$\overline{K}_1 = \overline{K}_{10}(L_0, G_0, H_0) + \frac{P}{2mG_0^2}\sqrt{G_0^2 - H_0^2}(L_0 - G_0)[x_c \sin(\beta_1 - \beta_2) + \\ + y_c \cos(\beta_1 - \beta_2)] - \frac{3P(A-B)}{16mRG_0^4}(G_0^2 - L_0^2)(G_0 - L_0)^2 \cos 2(\beta_1 - \beta_2) \tag{6}$$

Из (6) видно, что третье из условий (5) ($= 3$) выполняется тождественно, а два первые сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \overline{K}_1}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial \overline{K}_1}{\partial \beta_2} = \frac{P}{mG_0^2}\sqrt{G_0^2 - L_0^2}\,[(L_0 + G_0)x_c \cos(\beta_1 - \beta_2) - \\ - (L_0 - G_0) y_c \sin(\beta_1 - \beta_2)] + \frac{3P(G_0^2 - L_0^2)}{8mR}(G_0 - L_0)^2 (A - B) \sin 2(\beta_1 - \beta_2) = 0 \tag{7}$$

Очевидно, что при надлежащем выборе произвольных постоянных условие (7) выполняется, и следовательно, в рассматриваемом случае также существует семейство периодических решений (но с меньшим числом произвольных постоянных).

Заметим, что в пределе при $R \to \infty$ приходим к классической задаче о движении твердого тела в однородном поле тяжести, для которой при достаточно малых $A - B$, x_c, y_c, z_c в первых двух случаях имеют место периодические решения. Последние два случая, как показывают более детальные исследования, приводят к периодическим решениям, присущим только для поля де Брюна и центрального ньютоновского поля.

Поступила 21 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Brun F.* Rotation Kring en fix punkt. Öfversigt of Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stookholm, 1893.
2. *Депри А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Механика, Сб. перев., 1968, № 2.
3. *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 2. М., «Наука», 1972.