Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

А. Г. Ченцов

(Свердловск)

Рассматривается нелинейная дифференциальная игра сближения — уклонения на конечном промежутке времени. Для решения используется вспомогательная программная конструкция. Статья примыкает к исследованиям [1-8].

1. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается уравнениями вида

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q$$

Множества P и Q полагаются компактными, а функция $f(\cdot)$ — непрерывной по совокупности и непрерывно дифференцируемой по x. Предполагается, что всякое решение $x(t)$ уравнения

$$dx(t)/dt \in \overline{\text{co}}\ \{y\colon y = f(t, x(t), u, v); \quad u \in P, v \in Q\}$$

при условиях $x(t_*) \in K$, $t_* \in [t_0\vartheta_0]$ равномерно ограничено на $[t_*, \vartheta_0]$ для всякого ограниченного $K \subset R^n$ числом $\beta(t_0, K, \vartheta_0)$.

На множестве $\{(\vartheta, x, m) : \vartheta \in T, x \in R^n, m \in M_v\}$ задана функция $\omega(\vartheta, x, m)$. При этом множества $T \subset [t_0, \vartheta_0]$ и $M = \{(\vartheta, m) : \vartheta \in T, m \in M_\vartheta\}$ полагаются компактными, а функция $\omega(\cdot)$ — непрерывной по совокупности и непрерывно дифференцируемой по x в области $\omega_0 < \omega < \omega^0$. Первый игрок, распоряжаясь выбором управления $u \in P$ момента $\vartheta \in T$ и точки $m \in M_\vartheta$, стремится обеспечить неравенство $\omega(\vartheta, x[\vartheta], m) \leqslant \varepsilon$, где ε — заданное число. Второй игрок распоряжается выбором управления $v \in Q$ и преследует противоположную цель.

Аналогично [2] стратегию U первого игрока отождествим с функцией $U(t, x) \subset P$. Движением $x[t] = x_U[t] = x[t, t_0, x_0, U]$ назовем всякий равномерный предел ломаных Эйлера $x_{\Delta(i)}[t]$, почти всюду удовлетворяющих уравнению

$$dx_{\Delta(i)}[t]/dt = f(t, x_{\Delta(i)}[t], u[\tau_k^{(i)}], v[t])$$

$$\tau_{k+1}^{(i)} - \tau_k^{(i)} \leqslant \Delta_i, \qquad u[\tau_k^{(i)}] \in U(\tau_k^{(i)}, x_{\Delta(i)}[\tau_k^{(i)}])$$

$$v[t] \in Q \text{ — измерима}$$

Здесь и ниже $\{\Delta_i\}$ — сходящаяся к нулю последовательность ($\Delta_i > 0$).

Контрстратегию U_v отождествим с функцией $U_v(t, x, v) \subset P$, а движением $x[t] = x_{U_v}[t] = x[t, t_0, x_0, U_v]$ назовем всякий равномерный предел ломаных Эйлера $x_{\Delta(i)}[t]$, почти всюду удовлетворяющих уравнению

$$dx_{\Delta(i)}[t]/dt = f(t, x_{\Delta(i)}[t], u_t, v[t])$$

$$t \in [\tau_k^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)}], \tau_{k+1}^{(i)} - \tau_k^{(i)} \leqslant \Delta_i$$

$$u_t, v[t] \in Q \text{ — кусочно-постоянные}$$

$$u_t \in U_v(\tau_k^{(i)}, x_{\Delta(i)}[\tau_k^{(i)}], v[t])$$

Аналогично с понятными изменениями в обозначениях определяются стратегии V второго игрока и порожденные ими движения $x[t] = x_V[t] = x[t, t_0, x_0, V]$.

Движением $x[t] = x_{U,V}[t]$, порожденным парой стратегий (U, V), назовем всякий равномерный предел ломаных Эйлера $x_{\Delta(i)}[t]$, удовлетворяющих уравнению

$$dx_{\Delta(i)}[t]/dt = f(t, x_{\Delta(i)}[t], u[\tau_k^{(i)}], v[\tau_l^{*(i)}])$$

$$u[\tau_k^{(i)}] \in U(\tau_k^{(i)}, \quad x_{\Delta(i)}[\tau_k^{(i)}])$$

$$v[\tau_l^{*(i)}] \in V(\tau_l^{*(i)}, \quad x_{\Delta(i)}[\tau_l^{*(i)}])$$

$$\tau_{k+1}^{(i)} - \tau_k^{(i)} \leqslant \Delta_i, \quad \tau_{l+1}^{*(i)} - \tau_l^{*(i)} \leqslant \Delta_i$$

2. *Задача 1.* При данных t_0, x_0 и ϑ_0 для заданного числа ε найти контрстратегию U_v°, гарантирующую для любого движения $x_{U_v^\circ}[t]$ выполнение соотношения

$$\omega(\vartheta, x_{U_v^\circ}[\vartheta], m) \leqslant \varepsilon$$

при некоторых $\vartheta \in T$, $m \in M_\vartheta$.

Задача 2. При данных t_0, x_0 и ϑ_0 для заданного числа ε найти стратегию U°, гарантирующую для любого движения $x_{U^\circ}[t]$ выполнение соотношения

$$\omega(\vartheta, x_{U^\circ}[\vartheta], m) \leqslant \varepsilon$$

при некоторых $\vartheta \in T$, $m \in M_\vartheta$.

Задача 2 решается в предположении о существовании седловой точки в «маленькой игре» [3] $s'f(\cdot)$.

Аналогично [4] для решения задач 3 и 4 строится стабильная система множеств W_ε. Тогда при условии, что $(t_0, x_0) \in W_\varepsilon$, с помощью контрстратегии U_v° или стратегии U°, осуществляющих аналогично [5,6] экстремальное прицеливание на некоторое ведущее движение, содержащееся в множестве W_ε вплоть до реализации выигрыша $\omega \leqslant \varepsilon$ первым игроком, задача 1 и соответственно задача 2 могут быть решены.

Для решения поставленных позиционных игровых задач используется следующая программная конструкция. Для всяких $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определим класс $\{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ программных управлений $\eta(\cdot)$, как множество всех регулярных борелевских мер на $T_*^{(\vartheta)} \times P \times Q$, где $T_*^{(\vartheta)} = [t_*, \vartheta]$, имеющих лебеговскую проекцию на $T_*^{(\vartheta)}$: для любого борелевского $G \subset T_*^{(\vartheta)}$

$$\eta(G \times P \times Q) = m(G)$$

где $m(\cdot)$ — лебеговская мера на прямой.

Класс $\{E(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ программных управлений второго игрока отождествим с множеством всех регулярных борелевских мер $\nu(\cdot)$ на $T_*^{(\vartheta)} \times Q$, имеющих лебеговскую проекцию на $T_*^{(\vartheta)}$.

Для всякого управления $\nu(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ программу $\{\Pi(\nu(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ определим как множество всех мер $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$, согласованных с мерой $\nu(\cdot)$: для любых борелевских $\Delta \subset T_*^{(\vartheta)}$ и $B \subset Q$

$$\eta(\Delta \times P \times B) = \nu(\Delta \times B)$$

Программным движением $\varphi(t, t_*, x_*, \eta(\cdot))$ для каждого $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ на отрезке $T_*^{(\vartheta)}$ назовем, аналогично [7], всякую абсолютно непрерывную функцию, почти всюду удовлетворяющую уравнению

$$dx/dt = \int\limits_P \int\limits_Q f(t, x, u, v)\, \eta_t(du \times dv)$$

где $\eta_t(\cdot)$ — условная вероятностная мера [8], отвечающая данному управлению $\eta(\cdot)$: для любых борелевских $G \subset T_*^{(\vartheta)}$, $A \subset P$ и $B \subset Q$

$$\eta(G \times A \times B) = \int\limits_G m(dt)\, \eta_t(A \times B)$$

где $m(\cdot)$ — лебеговская мера на прямой.

Известно [8], что такое движение существует и единственно для всякого $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$.

Обозначим $G(\vartheta, t_*, x_*, \nu(\cdot))$ область достижимости в момент $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ для программы $\{\Pi(\nu(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$. Для всякой меры $\nu(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ это компактное множество в R^n.

Определим следующую функцию:

$$\varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta) = \max_{\{E(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}} \min_{G(\vartheta, t_*, x_*, \nu(\cdot))} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x, m)$$

$$t_* \in [t_0, \vartheta_0], \qquad \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

Будем называть управление $\eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ оптимальным в программе для момента $\vartheta \in T \cap [t_*, \vartheta_0]$, если

$$\min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi^\circ(\vartheta), m) = \min_{G(\vartheta, t_*, x_*, \nu(\cdot))} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x, m)$$

$$\varphi^0(\vartheta) = \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta^\circ(\cdot))$$

Обозначим $\{\Pi(\nu(\cdot)), T_*^{(\vartheta)} | t_*, x_*\}_0$ множество всех оптимальных в $\{\Pi(\nu(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ программных управлений для позиции (t_*, x_*) и момента ϑ. Образуем также множество $M_\vartheta^\circ(\eta(\cdot) \mid t_*, x_*)$ для каждого $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$ как множество всех точек $m^\circ \in M_\vartheta$, где $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \cap T$, для которых

$$\omega(\vartheta, \varphi(\vartheta), m^\circ) = \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi(\vartheta), m)$$

$$\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta), t_*, x_*, \eta(\cdot))$$

Оптимальным для момента ϑ и позиции (t_*, x_*) программным управлением второго игрока назовем всякое управление $\nu^\circ(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$, удовлетворяющее равенству

$$\min_{G(\vartheta,\, t_*,\, x_*,\, v^\circ(\cdot))} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x, m) = \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)$$

Доказывается, что для всякой позиции (t_*, x_*) и момента $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \cap T$ оптимальные программные управления первого и второго игроков существуют.

Множество всех оптимальных для позиции (t_*, x_*) и момента ϑ управлений второго игрока обозначим $\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$. Можно показать, что при фиксированном $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \cap T$ множества $\sigma(t, x, \vartheta)$ слабо полунепрерывны сверху по включению при изменении позиции.

При фиксированной позиции функция $\varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)$ полунепрерывна снизу по ϑ.

Обозначим $\varepsilon^\circ(t_*, x_*) = \min_{[t_*, \vartheta_0] \cap T} \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)$.

Введем множество $\theta(t_*, x_*) \subset [t_*, \vartheta_0] \cap T$ всех моментов времени ϑ_*, таких, что $\varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta_*) = \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$.

Для всякого $\eta^*(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, обозначим $S(\vartheta, t, \varphi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ фундаментальную матрицу решений

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \int_P \int_Q \frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi^*(t), u, v)\, \delta x(t)\, \eta_t^*(du \times dv)$$

Пусть управление $\eta^\circ(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), T_*^{(\vartheta)}\}$, момент ϑ из множества $[t_*, \vartheta_0] \cap T$ и точка $m^\circ \in M_{\vartheta}{}^\circ(\eta^\circ(\cdot) \mid t_*, x_*)$ таковы, что $\omega_0 < \omega(\vartheta, \varphi^\circ(\vartheta), m^\circ) < \omega^\circ$. Тогда образуем множество $\{l_0 \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta\}$ всех векторов

$$l_0 = \frac{\partial}{\partial x} \omega(\vartheta, \varphi^\circ(\vartheta), m^\circ)$$

когда m° пробегает множество $M_\vartheta{}^\circ(\eta^\circ(\cdot) \mid t_*, x_*)$. Аналогично определим множества $\{s_0 \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta\}$ и $\{s_0(t) \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta\}$ как множества всех векторов s_0 и функций $s_0(t)$, $t \in T_*^{(\vartheta)}$, описываемых соотношениями

$$s_0' = l_0' S(\vartheta, t_*, \varphi^\circ(\cdot), \eta^\circ(\cdot)) \tag{2.1}$$

$$s_0'(t) = l'_0 S(\vartheta, t, \varphi^\circ(\cdot), \eta^\circ(\cdot)) \tag{2.2}$$

соответственно, когда l_0 пробегает множество $\{l_0 \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta\}$. Тогда для всякой $v^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$, $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \cap T$ и такой, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta) < \omega^\circ$, определим множества

$$S_0(t_*, x_*, \vartheta, v^\circ(\cdot)) = \bigcup_{\{H(v^\circ(\cdot)),\, T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0} \{s_0 \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta\}$$

$$S_0(t_*, x_*, \vartheta) = \bigcup_{\sigma(t_*, x_*, \vartheta)} S_0(t_*, x_*, \vartheta, v(\cdot))$$

Будем полагать выполненным условие: для всякой позиции (t_*, x_*) такой, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$ и при этом $t_* \overline{\in} \Theta(t_*, x_*)$, для всякой вероятностной меры $\xi(\cdot)$ на Q найдется момент $\vartheta_* \in \Theta(t_*, x_*)$, относительно которого одновременно выполнены следующие два условия.

Условие 1. Существует согласованная с $\xi(\cdot)$ вероятностная мера $\mu_e(\cdot)$ на $P \times Q$ такая, что для каждого $s_0 \in S_0(t_*, x_*, \vartheta_*)$ выполнено неравенство

$$s_0' \int_P \int_Q f(t_*, x_*, u, v)\, \mu_e(du \times dv) \leqslant \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)$$

Условие 2. Для любого программного управления $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta_*)$ и любого $\eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu^\circ(\cdot)), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0$ для каждой функции $s_0(t) \in \{s_0(t) \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta_*\}$ выполнено следующее условие максимума (Δ — любое борелевское подмножество $T_*^{(\vartheta)}$):

$$\int\limits_\Delta\int\limits_P\int\limits_Q s_0'(t) f(t, \varphi^\circ(t), u, v)\, \eta^\circ(dt \times du \times dv) =$$
$$= \int\limits_\Delta \max\nolimits_Q \min\nolimits_P [s_0'(t) f(t, \varphi^\circ(t), \quad u, v)]\, m(dt)$$

Отметим, что всякое $\eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu^\circ(\cdot)), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0$, где $\nu^\circ(\cdot) \in \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta_*)$, удовлетворяет для всякого $s_0(t) \in \{s_0(t) \mid \eta^\circ(\cdot), \vartheta_*\}$ на любом борелевском множестве $\Delta \subset T_*^{(\vartheta)}$ условию минимума

$$\int\limits_\Delta\int\limits_P\int\limits_Q s_0'(t) f(t, \varphi^\circ(t), u, v)\, \eta^\circ(dt \times du \times dv) =$$
$$= \int\limits_\Delta\int\limits_Q \min\nolimits_P [s_0'(t) f(t, \varphi^\circ(t), u, v)]\, \nu^\circ(dt \times dv)$$

3. Пусть выбраны позиция и момент (t_*, x_*), ϑ такие, что $t_* \in [t_0, \vartheta_0)$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \cap T$ и $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta) < \omega^\circ$ и позиция (t, x), содержащаяся в достаточно малой окрестности (t_*, x_*), причем $t \in T_*^{(\vartheta)}$. Произвольно выберем управления второго игрока $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ и $\nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t, x, \vartheta)$ и построим склеенное программное управление $\nu_0(\cdot)^\Delta{}_0$, полученное заменой на $[t, \vartheta] \times Q$ меры $\nu^\circ(\cdot)$ на $\nu_0(\cdot)^\Delta$. Пусть

$$\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)_0{}^\Delta), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0$$
$$m_{00}^\Delta \in M_\vartheta{}^\circ(\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \mid t_*, x_*),\ \bar\varphi_0(\vartheta)_0{}^\Delta = \varphi(\vartheta, t, x_*, \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta)$$

где $\bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta$ — мера $\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta$, рассматриваемая на $[t, \vartheta] \times P \times Q$.

Тогда обозначим $\{l_0^* \mid \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta, \vartheta)\}$ множество всех векторов

$$l_0^* = \frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta)_0{}^\Delta, m_{00}^\Delta) \tag{3.1}$$

когда $m_{00}{}^\Delta$ пробегает $M_\vartheta{}^\circ(\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \mid t_*, x_*)$, а $\{s_0^* \mid \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta, \vartheta\}$ — множество всех векторов вида

$$s_0^{*'} = l_0^{*'} S(\vartheta, t, \bar\varphi_0(\cdot)_0{}^\Delta, \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta) \tag{3.2}$$

когда l_0^* пробегает $\{l_0^* \mid \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta, \vartheta\}$.

Введем множество

$$S_0^*(t, x_*, \Delta x \mid \nu^\circ(\cdot), \nu_0(\cdot)^\Delta, \vartheta) = \bigcup_{\{\Pi(\nu_0(\cdot)_0^\Delta), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0} \{s_0^* \mid \bar\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta, \vartheta\}$$

Лемма 3.1. Пусть (t_*, x_*) и момент $\vartheta \in (t_*, \vartheta_0] \cap T$ таковы, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta) < \omega^\circ$. Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется $\delta(\alpha, t_*, x_*, \vartheta) > 0$ такое, что для всякой позиции $(t, x) : 0 \leqslant t - t_* < \delta(\alpha, t_*, x_*, \vartheta)$, $\|x - x_*\| < \delta(\alpha, t_*, x_*, \vartheta)$, $\|\cdot\|$ — эвклидова, найдутся программные управления $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ и $\nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t, x, \vartheta)$ такие, что существуют векторы

$$(3.3) \qquad s_0 \in S_0(t_*, x_*, \vartheta, \nu^\circ(\cdot))$$

$$s_0^* \in S_0^*(t, x_*, \Delta x \mid \nu^\circ(\cdot), \nu_0(\cdot)^\Delta, \vartheta)$$

для которых выполняется неравенство

$$(3.4) \qquad \|s_0 - s_0^*\| < \alpha$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют позиция (t_*, x_*) и момент ϑ, удовлетворяющие условиям леммы, число $\alpha > 0$ и сходящаяся к (t_*, x_*) последовательность $\{(t_n, x_n)\}$ позиций таких, что для каждых $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ и $\nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t_n, x_n, \vartheta)$ для любых s_0 и s_0^*, удовлетворяющих включениям (3.3), при всех n

$$(3.5) \qquad \|s_0 - s_0^*\| \geqslant \alpha$$

Тогда выберем $\nu_n^\circ(\cdot) \in \sigma(t_n, x_n, \vartheta)$, без нарушения общности считая $\{\nu_n^\circ(\cdot)\}$ слабо сходящейся к некоторому $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$, и построим управления $\nu_0(\cdot)_0^n$, склеенные из $\nu^\circ(\cdot)$ и $\nu_n^\circ(\cdot)$, выберем $\eta_0(\cdot)_0^n \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)_0^n), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0$ и $m_{00}^n \in M_\vartheta^\circ(\eta_0(\cdot)_0^n \mid t_*, x_*)$, которые опять можно считать соответственно слабо сходящимися и сходящимися к $\eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu^\circ(\cdot)), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0$ и $m^\circ \in M_\vartheta^\circ(\eta_0(\cdot) \mid t_*, x_*)$, построим векторы $s_{0,n}^*$ с помощью (3.2) при $\eta_0(\cdot)_0^\Delta = \eta_0(\cdot)_0^n$ и $m_{00}^\Delta = m_{00}^n$ и вектор s_0, определяемый (2.1) при получившихся $\eta^\circ(\cdot)$ и m°. Из слабой сходимости $\{\eta_0(\cdot)_0^n\}$ вытекает равномерная сходимость фундаментальных матриц $S(\vartheta, t, \varphi_0(\cdot)_0^n, \eta_0(\cdot)_0^n)$, где $\varphi_0(t)_0^n = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_0(\cdot)_0^n)$ к фундаментальной матрице $S(\vartheta, t, \varphi^0(\cdot), \eta^\circ(\cdot))$. Отсюда можно показать, что $s_{0,n}^* \to s_0$, что противоречит (3.5).

Лемма 3.2. Пусть $(t_*, x_*) : t_* \overline{\in} \Theta$ и момент $\vartheta \in \Theta = \Theta(t_*, x_*)$ таковы, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$, причем при выбранной вероятностной мере $\xi(\cdot)$ для момента ϑ одновременно выполняются условия 1 и 2. Тогда для любого $\gamma > 0$ существует $\delta = \delta(\gamma, t_*, x_*, \vartheta) > 0$ такое, что для всякого $t \in [t_*, t_* + \delta)$ выполняется соотношение

$$(3.6) \qquad \Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ[t] - \varepsilon^\circ[t_*] < \gamma(t - t_*)$$

Здесь

$$\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(t, \varphi_e(t))$$

$$\varphi_e(t) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_e(\cdot))$$

$$\eta_e(\cdot): \eta_e(G \times A \times B) = m(G)\mu_e(A \times B)$$

для любых борелевских $G \subset T_*^{(\vartheta)}$, $A \subset P$ и $B \subset Q$, $\mu_e(\cdot)$ при данном ϑ удовлетворяет условию 1 в классе вероятностных мер, согласованных с $\xi(\cdot)$.

Доказательство. Полагая $x = \varphi_e(t)$, оценим приращение функции $\varepsilon^\circ(t, x)$ вдоль движения $\varphi_e(t)$.

Выбирая произвольно

$$\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta), \quad \nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t, x, \vartheta)$$

$$\eta_0(\cdot)_0^\Delta \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)_0^\Delta), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0, \quad m_{00}^\Delta \in M_\vartheta^\circ(\eta_0(\cdot)_0^\Delta \mid t_*, x_*)$$

можно получить

$$(3.7) \qquad \Delta\varepsilon^\circ \leqslant \omega(\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \bar{\eta}_0(\cdot)_0^\Delta), m_{00}^\Delta) - \omega(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_0(\cdot)_0^\Delta), m_{00}^\Delta)$$

Здесь $\nu_0(\cdot)_0^\Delta$, склеенное из ν° и $\nu_0(\cdot)^\Delta$ программное управление второго игрока. Можно показать, что для любого $\alpha > 0$ найдется $\delta_\alpha = \delta_\alpha(t_*, x_*, \vartheta) > 0$ такое, что для каждой $(t, x): 0 \leqslant t - t_* < \delta_\alpha$, $\|x - x_*\| < \delta_\alpha$ равномерно по

$$\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x^*, \vartheta),\ \ \nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t, x, \vartheta)$$

$$\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)_0{}^\Delta), T_*^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0,\ m_{00}{}^\Delta \in M_\vartheta{}^\circ(\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \mid t_*, x_*)$$

выполнится неравенство

$$|\,\omega(\vartheta, \overline{\varphi}_0(\vartheta)_0{}^\Delta, m_{00}{}^\Delta) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*)\,| < \alpha \tag{3.8}$$

С учетом условия равномерной ограниченности и свойства дифференцируемости по x функции $\omega(\vartheta, x, m)$ можно, с учетом (3.7) и (3.8), показать, что

$$\Delta\varepsilon^\circ \leqslant l_0{}^{*\prime} S(\vartheta, t, \overline{\varphi}_0(\cdot)_0{}^\Delta, \overline{\eta}_0(\cdot)_0{}^\Delta)(\Delta x - \Delta\varphi_{00}{}^\Delta) + o(\Delta t)$$

где

$$l_0{}^* = \frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta, \overline{\varphi}_0(\vartheta)_0{}^\Delta, m_{00}{}^\Delta)$$

$$\Delta\varphi_{00}{}^\Delta = \int_{t_*}^{t}\int_P\int_Q f(\tau, \varphi_0(\tau)^\Delta{}_0, u, v)\,\eta_0(d\tau \times du \times dv)_0{}^\Delta$$

Используя лемму 3.1, выбираем при каждой позиции (t, x) из достаточно малой окрестности (t_*, x_*) пару программных управлений $\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ и $\nu_0(\cdot)^\Delta \in \sigma(t, x, \vartheta)$ второго игрока так, чтобы нашлись

$$s_0 \in S_0(t_*, x_*, \vartheta, \nu^\circ(\cdot)),\ s_0{}^* \in S_0{}^*(t, x_*, \Delta x \mid \nu^\circ(\cdot), \nu_0(\cdot)^\Delta, \vartheta)$$

удовлетворяющие (3.4), причем такой выбор возможен при любом $\alpha > 0$. Вектор $s_0{}^*$ получаем, выбирая подходящие

$$\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)_0{}^\Delta), T_*{}^{(\vartheta)} \mid t_*, x_*\}_0,\ \ m_{00}{}^\Delta \in M_\vartheta{}^\circ(\eta_0(\cdot)_0{}^\Delta \mid t_*, x_*)$$

Тогда после некоторых преобразований с учетом условия 2 получим

$$\Delta\varepsilon^\circ \leqslant \Big[s_0{}'\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\mu_e(du \times dv) - \max_Q \min_P s_0{}'f(t_*, x_*, u, v)\Big]\Delta t + o(\Delta t)$$

Используя условие 1, получаем утверждение леммы.

4. Для каждого числа γ обозначим W_γ множество всех позиций (t, x), $t \in [t_0, \vartheta_0]$, для которых $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \gamma$.

Лемма 4.1. В каждой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, для каждого числа $\alpha > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для всех $(t, x) : |\,t - t_*\,| < \delta$, $\|x - x_*\| < \delta$ равномерно по $\vartheta \in [\max(t, t_*), \vartheta_0] \cap T$ выполняется неравенство

$$|\,\varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)\,| < \alpha$$

Можно показать, что для каждого γ множество W_γ замкнуто.

Лемма 4.2. Относительно любой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ верно одно из двух утверждений:

а) момент $t_* \in \theta(t_*, x_*)$

б) для любого $\alpha > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждой (t, x)

$$|\,\varepsilon^\circ(t, x) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*)\,| < \alpha \quad \text{при } 0 \leqslant t - t_* < \delta, \quad \|x - x_*\,| < \delta$$

Доказательство. Пусть $t_* \overline{\in} \Theta(t_*, x_*)$. Используя полунепрерывность снизу $\varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)$ по ϑ, можно доказать замкнутость $\Theta(t_*, x_*)$. Тогда существует $\chi > 0$ такое, что $[t_*, t_* + \chi) \cap \Theta(t_*, x_*) = \phi$. С учетом леммы 4.1 для любого $\alpha > 0$ найдется δ, $0 < \delta < \chi$ такое, что для всех $(t, x) : 0 \leqslant t - t_* < \delta$, $\|x - x_*\| < \delta$ равномерно по $\vartheta \in [t, \vartheta_0] \cap T \mid \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*, \vartheta)\,| < \alpha$, откуда с учетом $\Theta(t_*, x_*) \subset [t, \vartheta_0] \cap T$ вытекает утверждение леммы б).

Лемма 4.3. Для любой позиции $(t_*, x_*) \in W_\gamma$, $\omega_0 < \gamma < \omega^\circ$, для всякого числа $\alpha > 0$, не превышающего некоторое $\alpha_0 > 0$, для любого момента $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ и любой вероятностной меры $\xi(\cdot)$ на Q относительно семейства программных движений $X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$, порожденных программой $\{\Pi(\nu_\xi(\cdot)), \Delta\}$, где $\Delta = [t_*, t^*]$ и $\nu_\xi(G \times B) = m(G)\,\xi(B)$ для любых борелевских $G \subset \Delta$ и $B \subset Q$, справедливо одно из следующих утверждений:

а) существует $\varphi_\alpha(t) \in X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$ и момент $\vartheta_\alpha \in \Delta \cap T$ такие, что

$$\min\nolimits_{M_{\vartheta_\alpha}} \omega(\vartheta_\alpha, \varphi_\alpha(\vartheta_\alpha), m) \leqslant \gamma + \alpha(\vartheta_\alpha - t_*)$$

б) существует $\varphi_\alpha{}^\circ(t) \in X_\Delta(t_*, x_*\ \nu_\xi(\cdot))$ такое, что $(t, \varphi_\alpha{}^\circ(t)) \in W_{\gamma+\alpha(t-t_*)}$ при всех $t \in \Delta$.

Доказательство. Выберем α_0 следующим образом: пусть $\beta > 0$ и $\gamma < \omega^\circ - \beta$, тогда $\alpha_0 = \beta/(\vartheta_0 - t_0)$. Предположим, лемма неверна при данном α_0. Тогда найдутся позиция $(t_*, x_*) \in W_\gamma$, момент t^* и вероятностная мера $\xi(\cdot)$ такие, что при некотором $\alpha : 0 < \alpha < \alpha_0$ одновременно нарушаются утверждения а) и б) леммы. Это означает, что для любого $\varphi(t) \in X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$ найдется первый момент τ_φ: $t_* < \tau_\varphi < t^*$ такой, что для любого $\delta > 0$ в полуинтервале $\tau_\varphi, \tau_\varphi + \delta)$ найдется t_δ такое, что $\varepsilon^\circ(t_\delta, \varphi(t_\delta)) > \gamma + \alpha(t_\delta - t_*)$ ибо в противном случае выполнилось бы утверждение б). В силу замкнутости $W_{\gamma+\alpha(\tau_\varphi - t_*)}$ позиция $(\tau_\varphi, \varphi(\tau_\varphi))$ содержится в $W_{\gamma+\alpha(\tau_\varphi - t_*)}$. Пусть $\tau_\xi = \max \tau_\varphi$ в классе $\varphi(t) \in X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$ и $\bar\varphi(t)$ — движение из $X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$, реализующее τ_ξ. По предположению $\tau_\xi \,\bar{\in}\, \Theta(\tau_\xi, \bar\varphi(\tau_\xi))$, в силу леммы 4.2 $\omega_0 < \varepsilon^\circ(\tau_\xi, \bar\varphi(\tau_\xi)) = \gamma + \alpha(\tau_\xi - t_*) < \omega^\circ$. Тогда найдется момент $\bar\vartheta \in \Theta(\tau_\xi, \bar\varphi(\tau_\xi))$, относительно которого одновременно выполняются условия 1 и 2, а значит, и лемма 3.2, с учетом которой приходим к противоречию с тем, что $\tau_\xi = \max \tau_\varphi$ на $X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$.

Лемма 4.4. При любом $\gamma : \omega_0 \leqslant \gamma < \omega^\circ$ множества W_γ *u*-стабильны: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W_\gamma$, любого момента $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ и любой вероятностной меры $\xi(\cdot)$ на Q относительно семейства $X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$ справедливо одно из двух утверждений:

1) существует $\varphi(t) \in X_\Delta(t_*, X_*, \nu_\xi(\cdot))$ и момент $\vartheta_* \in \Delta \cap T$ такие, что

$$\min\nolimits_{M_{\vartheta_*}} \omega(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*), m) \leqslant \gamma$$

2) существует $\varphi(t) \in X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$ такое, что $(t, \varphi(t)) \in W_\gamma$ при любом $t \in \Delta$.

Доказательство следует из леммы 4.3. и компактности в себе семейства $X_\Delta(t_*, x_*, \nu_\xi(\cdot))$.

Аналогично [4-6] доказываются следующие теоремы.

Теорема 4.1. Пусть $\omega_0 \leqslant \varepsilon = \varepsilon^\circ(t_0, x_0) < \omega^\circ$. Тогда контрстратегия $U_v{}^\circ$, осуществляющая экстремальное прицеливание на ведущее движение, разрешает задачу 1.

Теорема 4.2. Пусть $\omega_0 \leqslant \varepsilon = \varepsilon^\circ(t_0, x_0) < \omega^\circ$ и в маленькой игре существует седловая точка. Тогда стратегия U°, осуществляющая экстремальное прицеливание на ведущее движение, разрешает задачу 2.

Пусть $\omega(\vartheta, x, m) = \| x - m \|$ для всех $\vartheta \in [t_0, \vartheta_0]$, где $m \in M_*$ и M_* — замкнутое подмножество R^n. Тогда задачи 1 и 2 суть задачи позиционного сближения с множеством M_* к моменту ϑ_0. Возможная некомпактность M_* в данном случае несущественна, поскольку задача сводится к задаче на сближение с некоторым компактным подмножеством M_*.

5. *Задача 3.* При заданных (t_0, x_0), $\vartheta_0 > t_0$ и ε найти стратегию V°, гарантирующую для всякого движения $x_{V^\circ}[t]$

$$\min_T \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{V^\circ}[\vartheta], m) \geqslant \varepsilon$$

Задача 4. Построить такую пару стратегий (U°, V°), что для всякого движения $x^\circ[t] = x_{U^\circ, V^\circ}[t]$ выполнялось неравенство

$$\sup_{\{x_{U^\circ, V}[t]\}} \min_T \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U^\circ, V}[\vartheta], m) \leqslant$$
$$\leqslant \min_T \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x^\circ[\vartheta], m) \leqslant \inf_{\{x_{U, V^\circ}[t]\}} \min_T \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U, V^\circ}[\vartheta], m)$$

Известно [3], что для решения задачи 3 достаточно построить v-стабильную [3] систему множеств и выбрать в качестве V^0 стратегию, осуществляющую экстремальное прицеливание на некоторое ведущее движение [6], сохраняющееся на $[t_0, \vartheta_0]$ в этой системе множеств. Задача 4 успешно решается, если наряду с условиями, достаточными для решения задачи 3, выполняются условия 1, 2.

В случае, когда M_* — замкнутое множество в пространстве R^n, а $\omega(\vartheta, x, m) = \|x - m\|$, задача 3 — обычная задача уклонения [3], и задача 4 соответственно — задача сближения — уклонения с целевым множеством M_*.

Лемма 5.1. Функция $\varepsilon^\circ(t, x) = \min_{[t, \vartheta_0] \cap T} \varepsilon^\circ(t, x, \vartheta)$ удовлетворяет для всякой позиции (t_*, x_*) следующему условию: для любого числа $\alpha > 0$ существует $\delta = \delta(\alpha, t_*, x_*) > 0$ такое, что для всякой позиции $(t, x): 0 \leqslant t - t_* < \delta$, $\|x - x_*\| < \delta$

$$\varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \alpha + \varepsilon^\circ(t, x)$$

Лемма 5.2. Для всякой позиции (t_*, x_*) и любого числа $\alpha > 0$ найдется $\delta_\alpha = \delta_\alpha(t_*, x_*) > 0$ такое, что для любой позиции $(t, x): 0 \leqslant t - t_* < \delta_\alpha$, $\|x - x_*\| < \delta_\alpha$, $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$

$$\Theta(t, x) \subset \Theta^\alpha(t_*, x_*),$$

где Θ^α — α-окрестность множества Θ.

Лемма доказывается от противного с использованием леммы 5.1.

Условие $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^0(t_*, x_*)$ весьма существенно.

В самом деле, если рассмотреть скалярную систему

$$dx/dt = u - v$$

$$\omega(\vartheta, x, m) = |x - m| \text{ при } \vartheta = \vartheta_1 \text{ и } \vartheta = \vartheta_2$$

и множество $M = \{\vartheta_1, M_{\vartheta_1}\} \cup \{\vartheta_2, M_{\vartheta_2}\}$, где $\vartheta_1 < \vartheta_2$, $M_{\vartheta_1} = [0, a]$, $M_{\vartheta_2} = \{0\}$, $|u| \leqslant \mu$, $|v| \leqslant \nu$, причем $\mu + \nu < a / (\vartheta_2 - \vartheta_1)$, то для позиции (ϑ_1, a) множество $\Theta(\vartheta_1, a) = \{\vartheta_1\}$, а для всякой позиции (t, x) вдоль движения из позиции (ϑ_1, a) при $t > \vartheta_1$ $\Theta(t, x) = \{\vartheta_2\}$.

Заметим, что при фиксированной позиции (t_*, x_*) множества $\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ свойством слабой полунепрерывности сверху по включению при изменении ϑ могут не обладать. Например, в системе

$$dx / dt = u - v, \quad |u| \leqslant \mu, \quad |v| \leqslant \nu, \quad t \in [0, \vartheta_0], \ \nu > \mu$$

$$M_\vartheta = \phi \text{ при } \vartheta < \vartheta_1 < \vartheta_0$$

$$M_{\vartheta_1} = \{x: x \leqslant 0\}, \ M = \{k(\vartheta - \vartheta_1)\} \text{ при } \vartheta > \vartheta_1, \ k > 0$$

для позиции ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$) относительно момента $\vartheta > \vartheta_1$ оптимальное программное управление второго игрока $v_{\text{opt}}(t) = +\nu$ п. в. и единственно, а относительно момента $\vartheta = \vartheta_1 v_{\text{opt}}(t) = -\nu$ п. в. и также единственно; заметим, что функция

$$\varepsilon^0(t_0, x_0, \vartheta) = (\nu - \mu)\vartheta + k(\vartheta - \vartheta_1), \quad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_0]$$

непрерывна справа в точке ϑ_1 по ϑ.

6. Сделаем следующие вспомогательные построения: наряду с позицией (t_*, x_*) рассмотрим соседнюю позицию (t, x), $t \geqslant t_*$. Пусть $\vartheta \in \Theta(t, x)$, $\nu_0(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ и мера $\bar\nu_0(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), [t, \vartheta]\}$ на $[t, \vartheta] \times Q$ совпадает с $\nu_0(\cdot)$, $\bar\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\bar\nu_0(\cdot)), [t, \vartheta] \mid t, x\}_0$, $\bar m_0 \in M_\vartheta{}^0(\bar\eta_0(\cdot) \mid t, x)$.

Обозначим $S^*(t, x, \mid t_*, x_*)$ множество всех векторов s_* вида

$$s_*' = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), \bar m_0)\right]' S(\vartheta, t, \bar\varphi_0(\cdot), \bar\eta_0(\cdot)) \tag{6.1}$$

когда ϑ пробегает $\Theta(t, x)$, $\nu_0(\cdot)$ пробегает $\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$, $\bar\eta_0(\cdot)$ пробегает $\{\Pi(\bar\nu_0(\cdot)), [t, \vartheta] \mid t, x\}_0$ и $\bar m_0$ пробегает $M_\vartheta{}^0(\bar\eta_0(\cdot) \mid t, x)$. Такие множества можно построить для всех позиций (t, x) $t \geqslant t_*$, $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$, из некоторой окрестности (t_*, x_*), $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$.

Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие 3. Для всякой позиции (t_*, x_*) такой, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$, и вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P найдется вероятностная мера $\xi(\cdot)$ на $P \times Q$, согласованная с $\mu(\cdot)$ и такая, что вдоль программного движения $\varphi_\xi(t) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_\xi(\cdot))$ для любого числа $\alpha > 0$ существует $\delta_\alpha = \delta_\alpha(t_*, x_*, \xi(\cdot)) > 0$ и для всякой позиции

$$(t, \varphi_\xi(t)), \ t \in [t_*, t_* + \delta_\alpha), \quad \varepsilon^\circ(t, \varphi_\xi(t)) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$$

найдется вектор $s_* \in S^*(t, \varphi_\xi(t) \mid t_*, x_*)$, удовлетворяющий условию

$$s_*' \int\limits_P \int\limits_Q f(t_*, x_*, u, v)\, \xi(du \times dv) \geqslant \max\nolimits_Q \min\nolimits_P s_*' f(t_*, x_*, u, v) - \alpha$$

Здесь $\eta_\xi(\cdot)$ — программное управление, для которого $\eta_{\xi,t}(\cdot) = \xi(\cdot)$.

Приведем более наглядные условия, при выполнении которых выполнено условие 3.

Условие 4. Для всякой позиции (t_*, x_*) такой, что $\omega_0 < \varepsilon^0(t_*, x_*) < \omega^\circ$, множества $\sigma(t_*, x_*, \vartheta)$ слабо полунепрерывны сверху по включению в каждой точке $\vartheta_* \in \Theta(t_*, x_*)$.

Это условие всегда выполнено, когда M_ϑ меняется непрерывно с изменением ϑ, когда

$$M = \bigcup_1^{k_0} \{\vartheta_k, M_{\vartheta_k}\}$$

и в целом ряде других случаев, когда M_ϑ свойством непрерывности по ϑ не обладает.

Условие 5. Для всякой позиции $(\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^0)$ для любой вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P найдется согласованная с ней вероятностная мера $\xi(\cdot)$ на $P \times Q$, для которой на каждом векторе

$$s_0 \in \bigcup_{\Theta(t_*, x_*)} S_0(t_*, x_*, \vartheta) = S_0(t_*, x_*)$$

выполнено неравенство

(6.2) $$s_0' \int_P \int_Q f(t_*, x_*, u, v)\, \xi(du \times dv) \geqslant \max\nolimits_Q \min\nolimits_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)$$

Лемма 6.1. При выполнении условий 4 и 5 всегда выполнено условие 3.

Доказательство. Выберем любую позицию (t_*, x_*) такую, что $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$ и для соседних позиций $\leftrightarrow (t, x)$, $t \geqslant t_*$ и $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$ рассмотрим множества $S^*(t, x \mid t_*, x_*)$. Покажем, что для любого $\alpha > 0$ найдется $\delta_\alpha = \delta_\alpha(t_*, x_*) > 0$ такое, что для всякой позиции (t, x): $0 \leqslant t - t_* < \delta_\alpha$, $\| x - x_* \| < \delta_\alpha$, $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$

$$S^*(t, x \mid t_*, x_*) \subset S_0^\alpha(t_*, x_*)$$

В самом деле, предположим противное. Тогда найдется $\{(t_n, x_n)\}$, удовлетворяющая сформулированным выше условиям и такая, что $(t_n, x_n) \to (t_*, x_*)$, причем при каждом n существует $s_n \in S^*(t_n, x_n \mid t_*, x_*)$ такой, что для всякого $s_0 \in S_0(t_*, x_*)$

(6.3) $$\| s_n - s_0 \| \geqslant \alpha$$

Это значит, что существуют

$$\{\vartheta_n\} : \vartheta_n \in \Theta(t_n, x_n), \qquad \nu_n^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta_n)$$
$$\bar\eta_n^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu_n^\circ(\cdot)),\ [t_n, \vartheta_n] \mid t_n, x_n\}_0$$
$$\bar m_n^\circ \in M^\circ_{\vartheta_n}(\bar\eta_n^\circ(\cdot) \mid t_n, x_n)$$

для которых s_n выражается с помощью (6.1).

Не нарушая общности, предполагаем последовательности $\{\vartheta_n\}$ и $\{\bar m_n^\circ\}$ сходящимися

$$\vartheta_n \to \vartheta_* \in \Theta(t_*, x_*), \qquad \bar m_n^\circ \to m^\circ \in M_{\vartheta_*}$$

а последовательности $\{\nu_n^\circ(\cdot)\}$ и $\{\bar\eta_n^\circ(\cdot)\}$ — соответственно слабо сходящимися к программным управлениям

$$\nu^\circ(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta_*), \qquad \eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu^\circ(\cdot)),\ [t_*, \vartheta_*]\}$$

соответственно.

Тогда

$$\omega(\vartheta_*, \varphi^\circ(\vartheta_*), m^\circ) = \lim\nolimits_n \omega(\vartheta_n, \bar\varphi_n^\circ(\vartheta_n), \bar m_n^\circ) =$$
$$= \lim\nolimits_n \min\nolimits_{G(\vartheta_n, t_n, x_n, \bar\nu_n^\circ(\cdot))} \min\nolimits_{M_{\vartheta_n}} \omega(\vartheta_n, x, m)$$

С другой стороны, можно показать, что

$$\lim\nolimits_n \omega(\vartheta_n, \bar\varphi_n^\circ(\vartheta_n), \bar m_n^\circ) = \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$$

Отсюда

$$\omega(\vartheta_*, \varphi^\circ(\vartheta_*), m^\circ) = \min\nolimits_{G(\vartheta_*, t_*, x_*, \nu^\circ(\cdot))} \min\nolimits_{M_{\vartheta_*}} \omega(\vartheta_*, x, m)$$

И таким образом

(6.4) $$\eta^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu^\circ(\cdot)),\ [t_*, \vartheta_*] \mid t_*, x_*\}_0$$
$$m^\circ \in M^\circ_{\vartheta_*}(\eta^\circ(\cdot) \mid t_*, x_*)$$

Тогда вектор s_0 вида

$$s_0' = \left[\frac{\partial}{\partial x} \omega(\vartheta_*, \varphi^\circ(\vartheta_*), m^\circ)\right]' S(\vartheta_*, t_*, \varphi^\circ(\cdot), \eta^\circ(\cdot))$$

принадлежит $S_0(t_*, x_*)$. Из слабой сходимости $\{\bar\eta_n^\circ(\cdot)\}$ к $\eta^\circ(\cdot)$, а также с учетом $t_n \to t_*$, $\vartheta_n \to \vartheta_*$ получим

$$\lim\nolimits_n \| S(\vartheta_n, t_n, \bar\varphi_n^\circ(\cdot), \bar\eta_n^\circ(\cdot)) - S(\vartheta_*, t_*, \varphi^\circ(\cdot), \eta^\circ(\cdot)) \| = 0$$

Но тогда $s_0 = \lim_n s_n$, что противоречит (6.3). Отсюда следует справедливость условия 3.

Заметим, что $S^*(t, x \mid t_*, x_*) = S_0(t_*, x_*)$ при $t = t_*$, $x = x_*$.

Выполнение условия 4 весьма существенно, поскольку в общем случае программное управление $v^0(\cdot)$, как видно на примере линейной системы $dx / dt = u - v$, разобранном в п.5, множеству $\sigma(t_*, x_*, \vartheta_*)$ может не принадлежать, в результате чего на векторе s_0, построенном с помощью (6.4), условие (6.2) может не выполняться. От условия 4 можно отказаться, если потребовать выполнения (6.2) на должным образом расширенном множестве векторов s_0.

Лемма 5.2. Для любой позиции, $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_*, x_*) < \omega^\circ$, и вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P вдоль движения $\varphi_\xi(t) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_\xi(\cdot))$, где $\xi(\cdot)$ выбрана из условия 3, выполнено $\varepsilon^\circ(t, \varphi_\xi(t)) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*) \geqslant$ $\geqslant o(t - t_*) = o(\Delta t)$, где $o(t - t_*) / (t - t_*) \to 0$ при $t \to t_*$.

Доказательство. Положим $x = \varphi_\xi(t)$ и пусть $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$. Для всякого

$$\vartheta \in \Theta(t, x),\ v_0(\cdot) \in \sigma(t_*, x_*, \vartheta)$$

$$\bar\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\bar v_0(\cdot)), [t, \vartheta] \mid t, x\}_0,\ \bar m_0 \in M_\vartheta^\circ(\bar\eta_0(\cdot) \mid t, x)$$

$$\varepsilon^\circ(t, x) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*) \geqslant \omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), \bar m_0) - \omega(\vartheta, \varphi_0(\vartheta), \bar m_0)$$

$$\varphi_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_0(\cdot))$$

где $\eta_0(\cdot)$ — любое программное управление 1 игрока из $\{\Pi(v_0(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$, совпадающее на $[t, \vartheta] \times P \times Q$ с $\bar\eta_0(\cdot)$.

$$\varphi_0(\vartheta) = \bar\varphi_0(\vartheta) + S(\vartheta, t, \bar\varphi_0(\cdot), \bar\eta_0(\cdot))(\Delta\varphi_0 - \Delta x) + o(\Delta t)$$

где

$$\Delta\varphi_0 = \int_{t_*}^{t}\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\bar\eta_0(d\tau \times du \times dv) + o(\Delta t)$$

$$\Delta x = \left[\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\xi(du \times dv)\right]\Delta t + o(\Delta t)$$

Выбирая t из достаточно малой окрестности t_*, можно считать $\omega(\vartheta, x, m)$ дифференцируемой по x в точке $(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), \bar m_0)$ при всяких ϑ, $v_0(\cdot)$, $\bar\eta_0(\cdot)$, и $\bar m_0$, удовлетворяющих включениям (6.4).

Тогда можно показать, что

$$\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ(t, x) - \varepsilon^\circ(t_*, x_*) \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta, \bar\varphi_0(\vartheta), \bar m_0)\right]' S(\vartheta, t, \bar\varphi_0(\cdot), \bar\eta_0(\cdot))(\Delta x - \Delta\varphi_0) + o(\Delta t) +$$

$$+ \left[s_*' \int_P\int_Q s(t_*, x_*, u, v)\,\xi(du \times dv)\right]\Delta t -$$

$$- s_*' \int_{t_*}^{t}\int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\eta_0(d\tau \times du \times dv) + o(\Delta t)$$

для любых $s_* \in S^*(t, x \mid t_*, x_*)$ при $\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon^\circ(t_*, x_*)$.

Так как управление $\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(v_0(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ на $[t_*, t] \times P \times Q$ может выбираться произвольно, то с учетом условия 3 после несложных преобразований получаем утверждение леммы.

7. Для каждого γ обозначим W_γ^* множество всех позиций (t, x), для которых $\varepsilon^\circ(t, x) \geqslant \gamma$. Множество W_γ^* имеет замкнутые сечения $W_\gamma^*(\tau)$. Если $\{(t_k, x_k)\} \subset W_\gamma^*$ и $\{t_k\}$ — монотонно возрастающая, причем $(t_k, x_k) \to (t_*, x_*)$, то $(t_*, x_*) \in W_\gamma^*$.

Для каждой вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P, позиции (t_*, x_*) и момента $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ обозначим $X_\mu(t_*, x_*, t^*)$ семейство программных движений на $[t_*, t^*]$, порожденных всевозможными управлениями $\eta(\cdot) \in \in \{H(m(\cdot)), [t_*, t^*]\}$, согласованными с $\mu(\cdot)$: на любых борелевских $\Gamma \subset [t_*, t^*]$ и $A \subset P$ $\eta(\Gamma \times A \times Q) = m(\Gamma)\mu(A)$.

Лемма 7.1. Для всякой позиции $(t_*, x_*) \in W_\gamma^*$, $\omega_0 < \gamma < \omega^\circ$, для любой вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P и любого числа α, $0 < \alpha < \alpha_0$, существует программное движение $\varphi_\alpha(t) \in X_\mu(t_*, x_*, t^*)$ на $[t_*, t^*]$ такое, что $\varepsilon^\circ(t, \varphi_\alpha(t)) \geqslant \gamma - \alpha(t - t_*)$ для любого $t \in [t_*, t^*]$.

Лемма 7.2. Для всякого γ, $\omega_0 < \gamma \leqslant \omega^\circ$, множества W_γ^* v-стабильны: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W_\gamma^*$, вероятностной меры $\mu(\cdot)$ на P и момента $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ существует $\varphi^\circ(t) \in X_\mu(t_*, x_*, t^*)$ такое, что $(t, \varphi^\circ(t)) \in \in W_\gamma^*$ при $t \in [t_*, t^*]$.

Пусть маленькая игра [3] обладает седловой точкой.

Теорема 7.1. Если $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon \leqslant \omega^\circ$, то экстремальная к W_ε^* стратегия V° разрешает задачу 3.

Предположим, что наряду с условием 3 выполнены условия 1 и 2, U° — стратегия, экстремальная к системе множеств программного поглощения $W_\varepsilon(t) = \{x : \varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon\}$.

Теорема 7.2. Если $\omega_0 < \varepsilon^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon < \omega^\circ$, то пара стратегий (U°, V°) разрешает задачу 4, причем для любого движения $x_{U^\circ, V^\circ}[t]$

$$\min_T \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U^\circ, V^\circ}[\vartheta], m) = \varepsilon$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за предложенную задачу и внимание к работе.

Поступила 6 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батухтин В. Д.* Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 1.
2. *Красовский Н. Н.* Программное поглощение в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
3. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. Изв. АН СССР Тех. кибернетика, 1973, № 2.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
5. *Тарлинский С. И.* Об одной позиционной задаче наведения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6
6. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
7. *Батухтин В. Д., Красовский Н. Н.* Задача программного управления на максимин, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 6.
8. *Иоффе А. Д.* Обобщенные решения систем с управлением. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 6.