

ВЛИЯНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ СКОРОСТИ НА ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

В. В. Струминский

(Москва)

Законы движения и теплообмена газовых смесей значительно сложнее законов, которым подчиняются однокомпонентные газы. Физически ясно, что в газовой смеси каждая компонента газа имеет некоторые свои средние значения определяющих параметров (плотности, скорости и температуры), в общем случае не совпадающие для разных компонент. Так появляются новые макроскопические параметры потока и, в частности, хорошо известные средние диффузионные скорости.

Появление этих отличных от нуля макроскопических параметров потока приводит к нарушению основных законов сохранения для компонент газа. Для каждой компоненты газа будут выполняться только законы сохранения массы, однако законы сохранения количеств движений и энергии не выполняются. Движение отдельных компонент газа не будет описываться уравнениями классической аэродинамики — уравнениями Эйлера, Навье — Стокса или уравнениями Барнетта. Между отдельными компонентами газа будет происходить перераспределение температур и скоростей потока. Более того, как будет показано далее, диффузионные скорости создают собственные напряжения и тепловые потоки, которые стремятся увеличить энтропию и ускорить приближение газовой смеси к равновесию.

Таким образом, эти новые макроскопические параметры потока существенно влияют на движение и теплообмен газовой смеси и являются фундаментальными параметрами системы. Однако, несмотря на это, они определяются недостаточно точно. Для решения системы кинетических уравнений применяется классический метод Чемпена — Энскога. При этом в нулевом приближении принимается, что диффузионные скорости и температуры равны нулю [1]. В этом методе диффузионная скорость появляется лишь в первом приближении и определяется, естественно, неточно.

Напряжения и тепловые потоки, как было недавно показано, появляются во втором приближении вместе с целой группой дополнительных барнеттовских членов. В литературе имеется несколько попыток уточнить теорию многокомпонентных газовых смесей. Следует отметить работу Колоднера [2], в которой к газовой смеси был применен метод Грэда и вычислен ряд сложных интегралов, и работу Сировича [3], в которой для двухкомпонентных газовых смесей было использовано приближенное модельное уравнение Крука и вместо метода последовательных приближений применен метод итераций.

В данной работе при решении системы кинетических уравнений для газовой смеси применяются различные варианты метода последовательных приближений — метода малого параметра. Это оказывается возможным из-за наличия указанных выше макроскопических параметров потока, которые позволяют использовать различные способы построения решений.

Как известно, система кинетических уравнений может быть записана в виде

$$(1) \quad \frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial r} = \sum_{\tau=1}^M \iiint (f'_s f'_\tau - f_s f_\tau) q_{s\tau} b db d\varepsilon$$

Функция распределения $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ однозначно определяет плотность, среднюю скорость и среднюю температуру s -й компоненты газа, а функция распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{s=1}^M f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

позволяет определить эти параметры потока для газовой смеси в целом.

Первый метод. Для решения системы кинетических уравнений применяется классический метод Чепмена — Энскога, изложенный в монографии [1]. Остановимся на этом методе, чтобы выяснить его особенности, некоторые преимущества и недостатки.

В этом методе принимается, что вероятность соударений молекул одного и того же сорта и молекул различных сортов газа равны. Это означает, что газовая смесь уже достаточно хорошо перемешалась. Поэтому в первом приближении диффузионные скорости и температуры равны нулю. В правой части системы уравнений (1) все интегралы соударений имеют один и тот же порядок. Тогда эта система может быть записана в виде

$$(2) \quad \frac{df_s}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\tau=1}^M J(f_s, f_\tau)$$

где ε — малый параметр. Будем искать решения в виде

$$(3) \quad f_s = f_s^{(0)} + \varepsilon f_s^{(1)} + \varepsilon^2 f_s^{(2)} + \dots$$

В нулевом приближении, как известно, имеем

$$f_s^{(0)} = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m_s (\mathbf{v} - \mathbf{U})^2}{2kT} \right]$$

где n_s — плотность s -й компоненты газов. Средняя скорость u_s и температура T_s s -й компоненты в нулевом приближении совпадает со средней скоростью U и температурой T всего потока. Диффузионные скорости W^s , естественно, в этом приближении равны нулю. Из системы кинетических уравнений [1] получим следующую систему уравнений переноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n U_\alpha}{\partial r_\alpha} &= 0, & \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + U_\beta \frac{\partial U_\alpha}{\partial r_\beta} &= - \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} \\ \frac{3/2 \partial p}{\partial t} + \frac{3/2 \partial p U_\alpha}{\partial r_\alpha} &= - P_{\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha} \end{aligned}$$

где $P_{\alpha\beta}$, q_α , W_α^s определяются при помощи известных выражений через функцию распределения.

В нулевом приближении имеем

$$P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta}, \quad q_\alpha = 0, \quad W_\alpha^s = 0$$

В этом приближении движение газовой смеси в целом описывается уравнениями Эйлера. Движение отдельных компонент газа никак не сказывается на суммарном движении газа.

В первом приближении имеем

$$P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}, \quad q_\alpha = - \lambda \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}, \quad W_\alpha^s \neq 0$$

В этом приближении получим следующее выражение для диффузионных скоростей потока:

$$W^s = \frac{n^2}{n_s \rho} \sum m_\tau D_{s\tau} \mathbf{d}_\tau - \frac{1}{n_s m_s} D_s^\tau \text{grad} \ln T$$

$$D_{s\tau} = \frac{\rho n_s}{2n m_\tau} \sqrt{\frac{2kT}{m_s}} C_{s0}^{\tau s}(\xi), \quad D_s^\tau = \frac{m_s n_s}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m_s}} Q_{s0}(\xi)$$

Здесь ξ равно числу членов разложения по полиномам Сонина, а вектор \mathbf{d}_τ равен

$$\mathbf{d}_\tau = \text{grad} \left(\frac{n_\tau}{n} \right) + \left(\frac{n_\tau}{n} - \frac{n_\tau m_\tau}{\rho} \right) \text{grad} \ln p$$

При $\xi = 1$, $C_{s0}^{\tau s} \neq 0$, $Q_{s0} = 0$. Величина коэффициентов $C_{s0}^{\tau s}$ определяется из системы алгебраических уравнений [1].

Таким образом, в этом приближении движение газовой смеси в целом описывается уже уравнениями Навье — Стокса. Однако и в этом приближении движение отдельных компонент газа явно не сказывается на суммарном движении газовой смеси. Для определения диффузионных скоростей потока получим следующую систему уравнений:

$$\sum_\tau \frac{n_s n_\tau}{n^2 D_{s\tau} (1)} (W^\tau - W^s) = \mathbf{d}_s$$

где $D_{s\tau}$ — коэффициент бинарной диффузии.

Во втором приближении имеем

$$P_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} - \sum_{s=1}^M \rho_s W_\alpha^s W_\beta^s, \quad q_\alpha \neq 0, \quad W_\alpha^s \neq 0$$

Как видно, в этом приближении наряду с обычным тензором вязких напряжений появился дополнительный тензор напряжения, который зависит от диффузионных скоростей потока. В этом приближении изменился также вектор теплового потока.

Таким образом, только во втором приближении диффузионные скорости непосредственно повлияли на законы движения и теплопередачи газовой смеси. Второе приближение метода Чепмена — Энскога было получено в наиболее общем виде, по предложению автора, в работе [4].

Второй метод. Теперь будем исходить из того, что вероятность соударения молекул одного и того же сорта может быть больше вероятности соударения молекул разных сортов газа. Это означает, что в газовой смеси процессы перемешивания далеко не завершены. Поэтому даже в нулевом приближении диффузионные скорости и температуры не равны нулю. В этом случае в правой части системы (1) интегралы соударений будут иметь разный порядок, и система уравнений может быть записана в виде

$$(4) \quad \frac{df_s}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} J(f_s, f_s) + \sum_{\tau \neq s}^M J(f_s, f_\tau)$$

Решение будем искать в виде ряда (3) и, пользуясь методом [5], положим

$$(5) \quad f_s = f_s(\tau, \mathbf{v}, \mathbf{r}, n_s(\mathbf{r}, \tau), u_s(\mathbf{r}, \tau), T_s(\mathbf{r}, \tau))$$

Зависимость параметров n_s , u_s , T_s от быстрого времени представим, следуя [5], в виде

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial n_s}{\partial t} &= \varepsilon A_s^{(0)} + \varepsilon^2 A_s^{(1)} + \dots \\ \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial t} &= \varepsilon B_{s\alpha}^{(0)} + \varepsilon^2 B_{s\alpha}^{(1)} + \dots \\ \frac{\partial T_s}{\partial \tau} &= \varepsilon C_s^{(0)} + \varepsilon^2 C_s^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

где $A_s^{(k)}$, $B_{s\alpha}^{(k)}$, $C_s^{(k)}$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (3), (6) в (4), учитывая (5) и собирая члены при одинаковых степенях, получим рекуррентную систему уравнений для определения $f_s^{(k)}(r, v, t)$, которая для $\tau \gg \tau_1$ может быть записана на основе [6], в следующем виде:

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 &= J(f_s^{(0)}, f_s^{(0)}) \\ \left(A_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial n_s} + B_s \frac{\partial}{\partial u_s^\alpha} + C_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial T_s} \right) f_s^{(0)} + v_s^\alpha \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial r_\alpha} - \sum_{\tau \neq s} J(f_s^{(0)}, f_\tau^{(0)}) &= J^*(f_s^{(1)}, f_s^{(0)}) \\ \left(A_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial n_s} + \dots \right) f_s^{(1)} + \left(A_s^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_s} + \dots \right) f_s^{(0)} + v_s^\alpha \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial r_\alpha} - \sum_{\tau \neq s} J^*(f_s^{(0)}, f_\tau^{(1)}) &= J^*(f_s^{(2)}, f_s^{(0)}), \end{aligned}$$

Первое из уравнений (7) имеет единственное нетривиальное решение:

$$f_s^{(0)} = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k T_s} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_s (v - u_s)^2}{2k T_s} \right]$$

где n_s , u_s , T_s — пока произвольные функции r и t , характеризующие s -й сорт газа. Для разрешимости последующих неоднородных интегральных уравнений системы (7) необходимо выполнение следующих условий:

$$\iiint \psi_s D_s^{(k)}(f_s) dv = 0$$

где $\psi = m_s, m_s v, m_s v^2$ — собственные функции интегрального оператора правой части (7), $D_s^{(k)}(f_s)$ — неоднородная часть интегрального уравнения в k -м приближении.

Из этих условий найдем все неизвестные функции

$$\begin{aligned} A_s^{(0)} &= -\frac{\partial n_s u_s^\alpha}{\partial r_\alpha}; \quad A_s^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ B_{s\alpha}^{(0)} &= -u_s^\beta \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} B_{s\tau}^\alpha(0), \quad B_{s\alpha}^{(k)} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_{\alpha\beta}^s(k)}{\partial r_\beta} \\ C_s^{(0)} &= -u_s^\alpha \frac{\partial T_s}{\partial r_\alpha} - \frac{2}{3} T_s \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{3kn_s} \sum_{\tau \neq s} C_{\tau s}^{(k)}(0); \\ C_s^{(k)} &= -\frac{1}{3kn_s} \frac{\partial Q_\alpha^s(k)}{\partial r_\alpha} - \frac{2P_{\alpha\beta}^s}{3kn_s} \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} \end{aligned}$$

Здесь

$$P_{\alpha\beta}^s(k) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} m_s (v - u_s)^\alpha (v - u_s)^\beta f_s^{(k)} dv, \quad Q_\alpha^s(k) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} 2m_s (v - u_s)^2 f_s^{(k)} dv$$

а также введены следующие обозначения:

$$B_{s\tau}^{\alpha}(0) = \iiint I(f_s^{(0)}, f_{\tau}^{(0)}) m_s v^{\alpha} d\mathbf{v} = \frac{16}{3} \frac{\rho_s \rho_{\tau}}{m_s + m_{\tau}} \Omega_{s\tau}^{(1,1)} (\mathbf{u}_{\tau} - \mathbf{u}_s)^{\alpha}$$

$$C_{s\tau}(0) = \iiint I(f_s^{(0)}, f_{\tau}^{(0)}) m_s (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s)^2 d\mathbf{v} = \frac{32}{3} \frac{\rho_s \rho_{\tau}}{m_s + m_{\tau}} \Omega_{s\tau}^{(1,1)} \frac{T_s}{m_{\tau}} \left(\frac{T_{\tau}}{m_{\tau}} + \frac{T_s}{m_s} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{3}{2} \frac{m_s}{m_s + m_{\tau}} \left(\frac{T_{\tau}}{T_s} - 1 \right) \left(\frac{2kT_s}{m_s} + \frac{2kT_{\tau}}{m_{\tau}} \right) + (\mathbf{u}_{\tau} - \mathbf{u}_s)^2 \right]$$

$$\Omega_{s\tau}^{(l,n)} = \sqrt{2\pi k \left(\frac{T_s}{m_s} + \frac{T_{\tau}}{m_{\tau}} \right)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-q_{s\tau}^2} q_{s\tau}^{2n+3} (1 - \cos^l \chi) dq_{s\tau} b db$$

где $q_{s\tau}$ — приведенная начальная скорость, χ — угол отклонения, b — прицельное расстояние.

При $T_s = T_{\tau}$ эти интегралы совпадают с интегралами, приведенными в монографии [1].

Таким образом, для разрешимости уравнений первого приближения (7) необходимо, чтобы газодинамические параметры газа удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$(8) \quad \frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial n_s u_s^{\alpha}}{\partial r_{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial u_s^{\alpha}}{\partial t} + u_s^{\beta} \frac{\partial u_s^{\alpha}}{\partial r_{\beta}} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial r_{\alpha}} = \frac{16}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s}^M \frac{\rho_s \rho_{\tau} \Omega_{s\tau}^{(1,1)}}{m_s + m_{\tau}} (\mathbf{u}_{\tau} - \mathbf{u}_s)^{\alpha}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + u_s^{\alpha} \frac{\partial T_s}{\partial r_{\alpha}} + \frac{2}{3} T_s \frac{\partial u_s^{\alpha}}{\partial r_{\alpha}} = \frac{16}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s} \frac{\rho_s \rho_{\tau}}{m_s + m_{\tau}} \Omega_{s\tau}^{(1,1)} \frac{T_s}{m_s} \left(\frac{T_s}{m_s} + \frac{T_{\tau}}{m_{\tau}} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{3}{2} \frac{m_s}{m_s + m_{\tau}} \left(\frac{T_{\tau}}{T_s} - 1 \right) \left(\frac{2kT_s}{m_s} + \frac{2kT_{\tau}}{m_{\tau}} \right) + (\mathbf{u}_{\tau} - \mathbf{u}_s)^2 \right]$$

Получена система уравнений, подобных уравнениям Эйлера, из которой уже в нулевом приближении могут определяться осредненные параметры потока для каждой компоненты газа n_s , u_s , T_s , а затем определены диффузионные скорости и температуры. Как видно, уравнения сохранения массы выполняются точно, в уравнениях сохранения количества движения и в уравнении энергии появились правые части, которые не равны нулю при $W^s \neq W^{\tau}$ и $T_s \neq T_{\tau}$.

Эти правые части и обуславливают взаимодействие между разными компонентами газа, приводя к выравниванию температур и скоростей потока. Структура этих выражений весьма существенна. Они получены строго для газовых смесей с диапазоном изменения отношения масс молекул от единицы до 200—300. Однако имеются основания считать, что с хорошим приближением эти выражения могут быть применимы для описания мелкодисперсных сред со значительно большим диапазоном изменения отношений масс частиц.

Из уравнений (8), полученных новым методом, в нулевом приближении нетрудно найти соотношения между диффузионными скоростями,

которые были выведены методом Чепмена — Энского в первом приближении. В самом деле, предполагая дополнительно, что

$$\frac{\partial w^s}{\partial t} \approx 0, \quad w_\beta^s \frac{\partial w_\alpha^s}{\partial r_\beta} \approx 0, \quad T_s \approx T$$

а также, что суммарные параметры всего потока удовлетворяют уравнениям Эйлера, из второго уравнения (8) найдем ($D_{s\tau}$ — коэффициент бинарной диффузии первого приближения)

$$(9) \quad \sum_{\tau} \frac{n_s n_\tau}{n^\alpha D_{s\tau} (1)} (W^\tau - W^s) = d_s, \quad D_{s\tau} = \frac{3(m_s + m_\tau)}{16 n m_s m_\tau} \frac{kT}{\Omega_{s\tau}^{(1,1)}}$$

Как видно, выражение (9) совпадает с приведенным выше.

Теперь эффективность нового метода отчетливо видна и в то же время ясно, что полученные методом Чепмена — Энского выражения для диффузионных скоростей и значения коэффициентов диффузии являются существенно приближенными. Из последнего уравнения (8) при тех же предположениях могут быть получены выражения

$$\sum_{\tau} \frac{n_s n_\tau}{n^\alpha D_{s\tau}} \left[\frac{3km_s}{m_s + m_\tau} \left(\frac{T_s}{T_\tau} - 1 \right) \left(\frac{T_s}{m_s} + \frac{T_\tau}{m_\tau} \right) + \right. \\ \left. + (u_\tau - u_s)^2 \right] \frac{T_s}{m_s} \left(\frac{T_\tau}{m_s} + \frac{T_\tau}{m_\tau} \right) = 0$$

которые позволяют определить перепад температур между отдельными компонентами газа по величинам диффузионных скоростей потока.

Таким образом, полученная в нулевом приближении система уравнений (8) может служить основой для изучения газодинамических течений и явлений теплопередачи в многокомпонентной газовой смеси. Подобная же система может служить хорошим приближением при изучении движения мелкодисперсных систем.

Для определения параметров потока в первом приближении подставим во второе уравнение (7) соотношения между параметрами потока в нулевом приближении, пользуясь выражениями (8). После несложных преобразований найдем

$$(10) \quad f_s^{(0)} \left\{ 2 (\omega_s \omega_s)^{\alpha\beta} \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} + (v - u_s)^\alpha \left(W_s^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln T_s}{\partial r_\alpha} + \frac{(v - u_s)^2}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} B_{s\tau}^\alpha (0) + \right. \\ \left. + \left(\omega_s^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s} C_{s\tau}(0) \right\} - \sum_{\tau \neq s} J(f_s^{(0)}, f_s^{(0)}) = J^*(f_s^{(1)}, f_s^{(0)}) \\ \omega_s = (v - u_s) \left(\frac{m}{2kT_s} \right)^{-1/2}$$

Сумму интегралов в левой части этого выражения можно разложить по неприводимым тензорам. Представим эту сумму в виде разложения

$$(11) \quad \sum_{\tau \neq s} J_{s\tau}(0) = f_s^{(0)} \{ L_0 + (v - u_s)^\alpha L_{(1)}^\alpha + (2\omega_s^\alpha \omega_s^\beta - \sigma_{\alpha\beta}) L_{(2)}^{\alpha\beta} + \\ + \omega_s^\alpha (\omega_s^2 - 5/2) L_{(3)}^\alpha + \dots \}$$

Умножая почленно правую и левую части этого выражения на 1, $(v - u_s)^\alpha$, $(2\omega_s^\alpha \omega_s^\beta - \delta_{\alpha\beta})$, $\omega_s^\alpha (\omega_s^2 - 5/2)$ и интегрируя, получим

$$L_0 = 0, L_{(1)}^\alpha = \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} B_{s\tau}^\alpha(0), \quad L_{(3)}^\alpha = \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} H_{s\tau}^\alpha$$

$$L_{(2)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2n_s} \sum_{\tau \neq s} \iiint (2\omega_s^\alpha \omega_s^\beta - \delta_{\alpha\beta}) J_{s\tau}(0) dv$$

Причем имеет место соотношение

$$(2\omega_s^\alpha \omega_s^\beta - \delta_{\alpha\beta}) L_{(2)}^{\alpha\beta} = 2 \frac{(\omega_s \omega_s)^{\alpha\beta}}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} D_{s\tau}^{\alpha\beta} + \left(\omega_s^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s} C_{s\tau}(0)$$

Подставляя (11) в выражение (10), найдем

$$(12) \quad f_s^{(0)} \left[(\omega_s \omega_s)^{\alpha\beta} \left\{ 2 \frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} D_{s\tau}^{\alpha\beta} \right\} + \right. \\ \left. + \omega_s^\alpha \left(\omega_s^2 - \frac{5}{2} \right) \left\{ \left(\frac{2kT_s}{m_s} \right)^{1/2} \frac{\partial \ln T_s}{\partial r_\alpha} - \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} H_{s\tau}^\alpha \right\} \right] = J^*(f_s^{(0)}, f_s^{(0)})$$

Здесь $D_{s\tau}^{\alpha\beta}$ и $H_{s\tau}^\alpha$ для частного случая максвелловских молекул будут такими:

$$(13) \quad D_{s\tau}^{\alpha\beta} = \iiint m_s (\omega_s \omega_s)^{\alpha\beta} J_{s\tau}(0) dv = \left(\frac{m_s m_\tau}{m_s + m_\tau} \right)^2 \frac{16n_s n_\tau}{6kT_s} \Omega_{s\tau}^{(11)} ((u_\tau - u_s)(u_\tau - u_s))^{\alpha\beta}$$

$$H_{s\tau}^\alpha = \frac{8}{10} \iiint m_s \omega_s^\alpha \left(\omega_s^2 - \frac{5}{2} \right) J_{s\tau}(0) dv = \frac{8}{10} \frac{m_\tau m_s^2}{m_s + m_\tau} \frac{16}{3} n_\tau n_s \Omega_{s\tau}^{(11)} \times \\ \times \left\{ \frac{5}{2} \left(\frac{T_\tau}{m_\tau} \left(\frac{T_\tau}{m_\tau} + \frac{T_s}{m_s} \right)^{-1} + 1 \right) \sqrt{\frac{m_s}{2kT_s}} (u_s - u_\tau)^\alpha - \left[2 \frac{m_s^2}{(m_s + m_\tau)^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{T_s}{T_\tau} \right)^2 + \frac{T_s^2}{T_\tau^2} \right] \right\} \left\{ \left(\frac{T_\tau}{m_\tau} + \frac{T_s}{m_s} \right)^{-1} \frac{T_\tau}{m_\tau} \frac{T_\tau}{T_s} \sqrt{\frac{m_s}{2kT_s}} (u_s - u_\tau)^\alpha \right\}$$

Как видно, выражения (12) представляют собой линейные неоднородные интегральные уравнения, хорошо известные в кинетической теории. Решение этих интегральных уравнений будем искать в виде

$$f_s^{(1)} = f_s^{(0)} \left\{ (\omega_s \omega_s)^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{1}{2\rho_s} \sum_{\tau \neq s} D_{s\tau}^{\alpha\beta} \right) B_s + \omega_s^\alpha \left(\omega_s^2 - \frac{5}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial \ln T_s}{\partial r_s} \sqrt{\frac{2kT_s}{m_s}} - \frac{1}{\rho_s} \sum_{\tau \neq s} H_{s\tau}^\alpha \right] C_s \left(\frac{m_s}{2kT_s} \right)^{1/2} \right\}$$

Это решение для простого газа хорошо изучено, неизвестные функции B_s и C_s при этом равны

$$(14) \quad B_s = -\frac{5}{4n_s \Omega_{ss}^{(2,2)}}, \quad C_s = -\frac{15}{16} \sqrt{\frac{2kT_s}{m_s}} \frac{1}{n_s \Omega_{ss}^{(2,2)}}$$

По известной функции распределения первого приближения и (13), (14) могут быть определены в том же приближении тензор напряжения и вектор теплового потока

$$(15) \quad P_{\alpha\beta}^s(1) = m_s \iiint (v - u_s)^\alpha (v - u_s)^\beta f_s^{(1)} dv = -\mu_s \left(\frac{\partial u_s^\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{1}{2\rho_s} \sum_{\tau \neq s} D_{s\tau}^{\alpha\beta} \right)$$

$$Q_{\alpha}^s(1) = \frac{m_s}{2} \iiint (v - u_s)^\alpha (v - u_s)^2 f_s^{(1)} dv = -\lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial r_\alpha} + \frac{T_s}{\rho_s} \sqrt{\frac{m_s}{2kT_s}} \sum_{\tau \neq s} H_{s\tau}^\alpha \right)$$

Здесь коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности выражаются через (14) следующим образом:

$$\mu_s = -\frac{1}{2} n_s k T_s B_s = \frac{5}{2} \frac{k T_s}{\Omega_{ss}^{(2,2)}}, \quad \lambda_s = -C_s \frac{5}{4} n_s \sqrt{\frac{2kT_s}{m_s}}$$

Из выражений (15) видно, что в этом методе напряжения и вектор теплового потока изменились под влиянием диффузионных скоростей и температур уже в первом приближении. Анализ выражения (15) показывает, что слагаемые $D_{s\tau}^{\alpha\beta}$ и $H_{s\tau}^\alpha$, увеличивая трение и тепловой поток, ускоряют стремление газовой смеси к равновесию.

Третий метод. В ряде задач, имеющих важное практическое значение, средняя скорость газовой смеси в целом мала или равна нулю. В то же время в системе происходит интенсивный процесс перемешивания и теплообмена. Этот процесс будет происходить под влиянием диффузионных скоростей. Для этого класса задач следует воспользоваться основными предпосылками второго метода, присоединив к ним еще условие

$$nV = n_1 u_1 + \dots + n_M u_M = 0$$

Тогда, очевидно, совокупность газодинамических параметров смеси будет описываться в нулевом приближении системой уравнений (8), где вместо u_s^α , u_τ^α должны фигурировать W_α^s , W_α^τ .

Из этой системы уравнений нулевого приближения при ряде упрощающих допущений относительно малости диффузионных скоростей и малой разности перепада температур получаем известные соотношения кинетической теории газов (9).

Таким образом, были установлены законы динамики и теплообмена газовых смесей и показано, что они намного сложнее соответствующих законов для однокомпонентного газа. Они не описываются уравнениями классической аэрогидродинамики. Между отдельными компонентами газа появляется интенсивное взаимодействие.

Автор благодарит Ю. Д. Нагорных и Б. М. Маркеева за полезные обсуждения и помощь при вычислении сложных интегралов.

Поступила 26 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршфельдер Дж., Кэртисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во. иностр. лит., 1961.
2. Kolodner I. I. Moment description of gas mixtures. New York, 1957, NYO—7980.
3. Сирович Л. Кинетическое моделирование газовых смесей. В. сб.: Некоторые вопросы кинетической теории газов. М., «Мир», 1965.
4. Шавалиев М. III. Явления переноса в барнеттовском приближении и многокомпонентных смесях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
5. Струминский В. В. Об одном методе решения кинетического уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 2.
6. Struminskii V. V. On the theory of Boltzmann's kinetic equation. Rarefied Gas Dynamics, vol. 1. New York — London, Acad. press, 1969.