

## О ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ НЕСУЩЕГО ПРОФИЛЯ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Рассматривается гиперзвуковое обтекание профиля, к которому приложена подъемная сила. Во внешней по отношению к следу области течения влиянием вязкости и теплопроводности пренебрегается. Формулируется аналогия, позволяющая построить поле скоростей путем решения задачи о «направленном» взрыве, когда газу сообщается не только энергия, но и импульс. Движение внутри вязкого следа задается при помощи двух членов асимптотического разложения решения уравнений Навье — Стокса.

**1. Внешняя область.** Рассмотрим гиперзвуковое течение около крыла бесконечного размаха. Обозначим через  $\rho_\infty$  плотность газа в набегающем потоке, а через  $v_\infty$  его скорость, направленную вдоль оси  $x$  декартовой системы координат  $xy$ . Примем, что впереди изображенной на фиг. 1 головной ударной волны давление  $p_\infty = 0$ , в связи с чем число Маха  $M_\infty = \infty$ . Будем считать газ совершенным, т. е. подчиняющимся уравнению состояния Клапейрона, причем обе удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  положим постоянными. Что касается зависимостей коэффициентов  $\lambda$  вязкости и  $k$  теплопроводности от удельной энтальпии  $w$ , то для простоты возьмем их линейными:  $\lambda = \lambda_0 w$ ,  $k = k_0 w$ . В дальнейшем значения как независимых переменных, так и искомым функций удобно задавать безразмерными, используя в качестве основных единиц отсчета  $\rho_\infty$ ,  $v_\infty$  и  $\lambda_0$ .

Вдали от тела положение и форма ударной волны  $y_2(x)$  определяется, в первую очередь, волновым сопротивлением, а ее внутренняя структура зависит от происходящих в среде диссипативных процессов. Для газа с  $\lambda = k = 0$  в работах [1-4] была сформулирована аналогия, ставящая в соответствие гиперзвуковому потоку неустановившееся движение в пространстве с меньшим на единицу количеством измерений. В рамках этой аналогии поле скоростей, связанное с сопротивлением тела, можно получить, исходя из решения задачи о сильном взрыве [5-9]. В применении к гиперзвуковым течениям найденный Л. И. Седовым [10,11] закон распространения взрывных волн гласит:  $y_2 \sim x^{2/3}$ . Отсюда следует, что при  $x \rightarrow \infty$  асимптотическое разложение для поперечной координаты скачка уплотнения можно взять в виде

$$(1.1) \quad y_2 = (bx)^{2/3} (\pm 1 + b_m x^{-2m/3} + \dots)$$

Здесь постоянная  $b_m$  и показатель степени  $m$  подлежат определению из условия, что значение подъемной силы  $F_y$  не должно зависеть от того, каким образом впереди и позади тела выбраны контрольные сечения  $x = \text{const}$  для подсчета уносимой через них составляющей импульса газа

вдоль оси  $y$ . Положительный знак перед первым членом в круглых скобках соответствует верхней полуплоскости, отрицательный — нижней.

Пусть  $\psi$  — функция тока. Решение задачи о сильном взрыве диктует введение в качестве одной из независимых переменных автомодельной комбинации

$$(1.2) \quad \eta = \psi (bx)^{-2/3}$$

Обозначим через  $v_x$  и  $v_y$  компоненты вектора скорости в проекции на оси  $x$  и  $y$  соответственно и положим  $\kappa = c_p / c_v$ . Разложения для параметров газа будем искать в виде

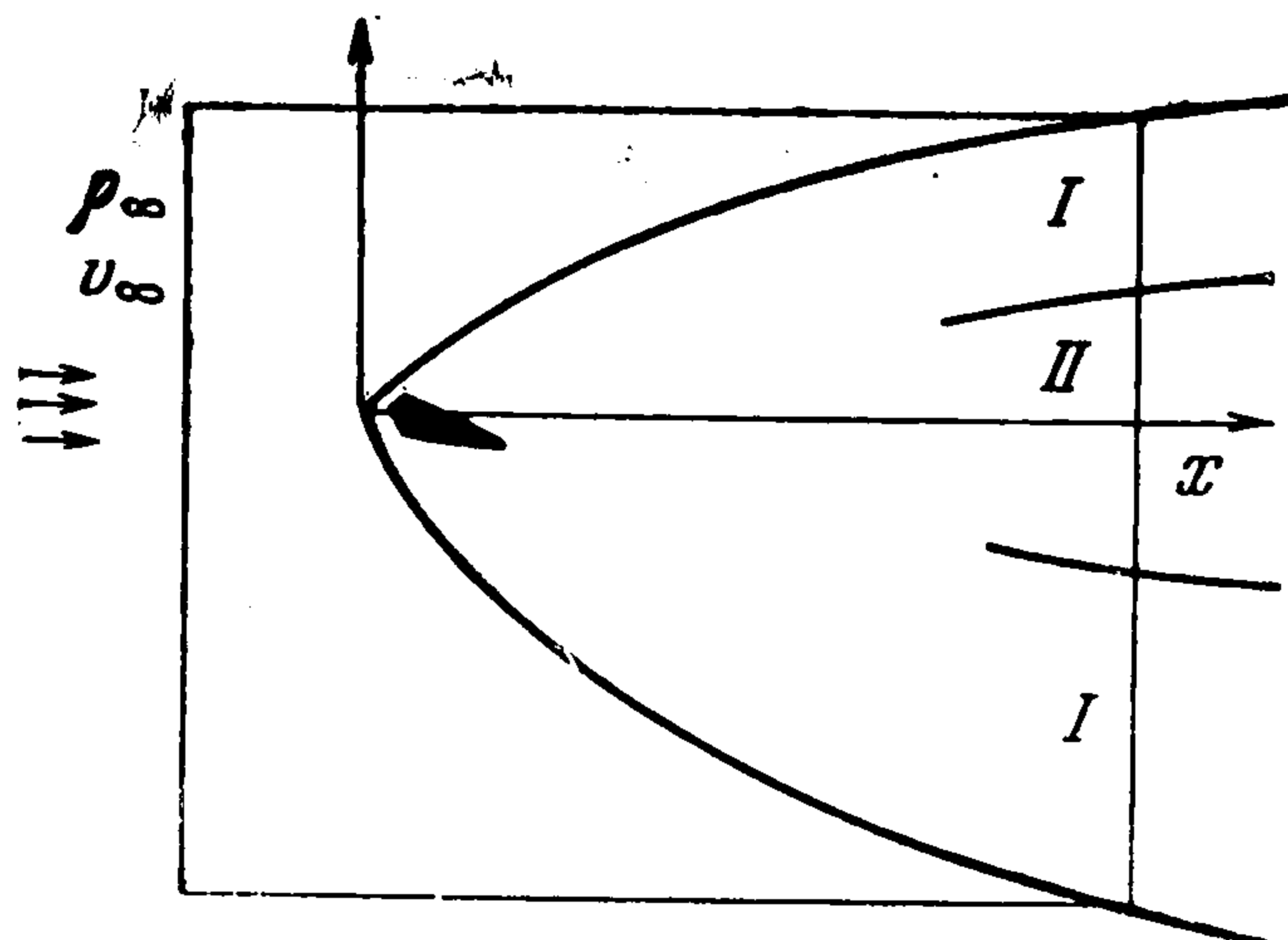
$$(1.3) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 - \frac{8}{9(\kappa+1)} \left(\frac{b^2}{x}\right)^{2/3} [v_{x11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} v_{x12}(\eta) + \dots] \\ v_y &= \frac{4}{3(\kappa+1)} \left(\frac{b^2}{x}\right)^{1/3} [v_{y11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} v_{y12}(\eta) + \dots] \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} [\rho_{11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} \rho_{12}(\eta) + \dots] \\ p &= \frac{8}{9(\kappa+1)} \left(\frac{b^2}{x}\right)^{2/3} [p_{11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} p_{12}(\eta) + \dots] \\ w &= \frac{8\kappa}{9(\kappa+1)^2} \left(\frac{b^2}{x}\right)^{-2/3} [w_{11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} w_{12}(\eta) + \dots] \\ y &= (bx)^{2/3} [y_{11}(\eta) + b_m x^{-2m/3} y_{12}(\eta) + \dots] \end{aligned}$$

Рассмотрим начальные данные, которым должны удовлетворять функции первого и второго приближений. Как показал В. В. Сычев [12], сильная ударная волна при  $M_\infty = \infty$  имеет спереди границу; при переходе через нее производные от параметров вязкого теплопроводящего газа терпят разрывы. Следуя работам [13, 14], можно было бы задать линию разрыва производных при помощи формулы (1.1) и получить решение уравнений Навье — Стокса, описывающее внутреннюю структуру скачка уплотнения. На достаточно большом расстоянии от его границы с набегающим потоком главная часть решения дает начальные значения функций (1.3). Последние служат, таким образом, для построения поля возмущений в области примыкающей к сглаженной вязкостью и теплопроводностью ударной волне. Легко усмотреть, однако, что для функций  $v_{x11}, \dots, y_{11}$  справедливы те же начальные данные, которые следуют из условий Гюгонио на фронте сильного разрыва в идеальном газе. Более того, если в формуле (1.1) показатель степени  $m < 3/2$ , то и для функций  $v_{x12}, \dots, y_{12}$  начальные данные полностью совпадают с вытекающими из соотношений Гюгонио.

Проведем две контрольные плоскости перпендикулярно направлению набегающего потока. Пусть одна из них расположена впереди тела, другая — позади него на расстоянии  $x$  (фиг. 1). Чтобы получить выражение для подъемной силы  $F_y$ , подсчитаем уносимую через выбранные плоскости составляющую импульса газа в проекции на ось  $y$ . Имеем

$$(1.4) \quad F_y = - \frac{8}{3(\kappa+1)} b^{4/3} b_m B x^{-(2m-1)/3}, \quad B = 1 + \int_0^1 v_{y12}(\eta) d\eta$$

Положим  $m = 1/2$ , тогда координата  $x$  выпадает из последней формулы. Из изложенного выше ясно, что при  $m = 1/2$  для вывода начальных значений искомых функций как первого, так и второго приближений нет никакой разницы, задать ли равенством (1.1) линию разрыва производных газовых параметров, которая ограничивает размытый скачок уплотнения, либо простой ударный фронт с условиями Гюгонио на нем.



Фиг. 1

Обратимся теперь к уравнениям Навье — Стокса. Если обозначить через  $N_{Pr}$  число Прандтля, то в переменных Мизеса они имеют вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[ w \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{4}{3} \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial \psi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{3} \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \right) \right] + \rho v_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ w \left( \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \right) \right] \\ \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_x \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \rho v_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ w \left( \frac{4}{3} \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right) \right] + \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[ w \left( \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial \psi} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \right) \right] \\ \rho v_x \frac{\partial w}{\partial x} - v_x \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{N_{Pr}} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[ w \left( \frac{dw}{dx} - \rho v_y \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \right] + \right. \\ &\quad + \rho v_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho w v_x \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \left. \right\} + w \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial \psi} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial \psi} \right)^2 \right\} \\ \rho v_x \frac{\partial y}{\partial \psi} &= 1, \quad v_x \frac{\partial y}{\partial x} = v_y, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho w \end{aligned}$$

Подставляя разложения (1.3) в уравнения Навье — Стокса, приходим к двум системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Нелинейная система первого приближения дает решение задачи о сильном взрыве, в замкнутом виде оно было указано Л. И. Седовым [10, 11]. Система второго приближения является линейной

$$(1.6) \quad \begin{aligned} v_{x12} &= \frac{1}{\kappa + 1} \left[ 2v_{y11}v_{y12} + \kappa \left( \frac{p_{12}}{\rho_{11}} - \frac{p_{11}p_{12}}{\rho_{11}^2} \right) \right] \\ \frac{dp_{12}}{d\eta} - \eta \frac{dv_{y12}}{d\eta} &= v_{y12}, \quad p_{12} - \kappa \frac{p_{11}p_{12}}{\rho_{11}} = 2\eta^{-\kappa/2} \rho_{11}^\kappa \\ \rho_{11} \frac{dy_{12}}{d\eta} &= -\frac{dy_{11}}{d\eta} \rho_{12}, \quad \eta \frac{dy_{12}}{d\eta} = \frac{1}{2} y_{12} - \frac{2}{\kappa + 1} v_{y12} \\ p_{12} &= \rho_{11}w_{12} + w_{11}\rho_{12} \end{aligned}$$

Сразу видно, что она не зависит от членов уравнений (1.5), обусловленных вязкостью и теплопроводностью реальной среды. Таким образом, в первом и втором приближениях диссипативные эффекты не оказывают никакого влияния на структуру поля возмущений во внешней области,

ограниченной спереди ударным фронтом. Можно заметить, далее, что первое из уравнений (1.6) отделяется от остальных, оно служит для определения величины  $v_{x12}$  после того, как найдены функции  $v_{y12}, \dots, y_{12}$ . Последние удовлетворяют системе уравнений, возникающей при исследовании второго приближения в теории одномерных нестационарных движений. Отсюда следует, что с принятой точностью поле возмущений вне следа может быть построено на основании принципа эквивалентности [1-4], согласно которому параметры потока в любой плоскости  $x = \text{const}$  устанавливаются независимо от значений его параметров в других плоскостях.

Интегрирование уравнений (1.6) нужно вести от точек  $\eta = \pm 1$ , где соответственно

$$\begin{aligned} v_{x12} &= \pm \frac{4-\kappa}{\kappa+1}, & v_{y12} &= \frac{2-\kappa}{\kappa+1}, & \rho_{12} &= \mp \frac{3}{\kappa+1} \\ p_{12} &= \pm \frac{2-\kappa}{\kappa+1}, & w_{12} &= \frac{5-\kappa}{\kappa+1}, & y_{12} &= \frac{2}{\kappa+1} \end{aligned}$$

**2. Аналогия с направленным взрывом.** С учетом начальных данных второе из уравнений (1.6) дает

$$(2.1) \quad p_{12} = \eta v_{y12}$$

В теории одномерных нестационарных движений роль продольной координаты  $x$  играет время  $t$ , за автомодельную комбинацию вместо (1.2) принимается величина

$$\xi = y (bt)^{-2/3} = y_{11}(\eta) + b_{1/2} t^{-1/3} y_{12}(\eta) + \dots$$

а разложения для скорости, плотности и давления записываются как

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v &= \frac{4}{3(\kappa+1)} \left(\frac{b^2}{t}\right)^{1/3} [f(\xi) + b_{1/2} t^{-1/3} f_{1/2}(\xi) + \dots] \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} [g(\xi) + b_{1/2} t^{-1/3} g_{1/2}(\xi) + \dots] \\ p &= \frac{8}{9(\kappa+1)} \left(\frac{b^2}{t}\right)^{2/3} [h(\xi) + b_{1/2} t^{-1/3} h_{1/2}(\xi) + \dots] \end{aligned}$$

В работе [15] показано, что функции-вариации образуют интеграл

$$(2.3) \quad \xi (gf_{1/2} + fg_{1/2}) - \frac{1}{\kappa+1} [4fgf_{1/2} + 2f^2g_{1/2} + (\kappa-1)h_{1/2}] = 0$$

согласующийся с условиями Гюгонио для сильного ударного фронта. Приведем соотношение (2.1) к виду (2.3). Для этой цели установим, прежде всего, выражение для приращения поперечной координаты  $y_{12}$ . Используя связь

$$\frac{dy_{11}}{d\eta} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\rho_{11}}$$

между функциями первого приближения, при помощи четвертого и пятого уравнений (1.6) находим

$$(2.4) \quad y_{12} = \frac{1}{\kappa+1} \left[ 4v_{y12} - 2(\kappa-1)\eta \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}^2} \right]$$

Сравнение разложений (1.3) и (2.2) дает

$$v_{y12} = f_{1/2} + y_{12} \frac{df}{d\xi}, \quad \rho_{12} = g_{1/2} + y_{12} \frac{dg}{d\xi}, \quad p_{12} = h_{1/2} + y_{12} \frac{dh}{d\xi}$$

Подставляя сюда выражение (2.4) для  $y_{12}$ , выводим два уравнения, которые определяют величины  $v_{y12}$  и  $\rho_{12}$ . С учетом формулы  $\eta = \rho_{11}^{\kappa} / p_{11} = g^{\kappa} / h$  имеем в результате их решения

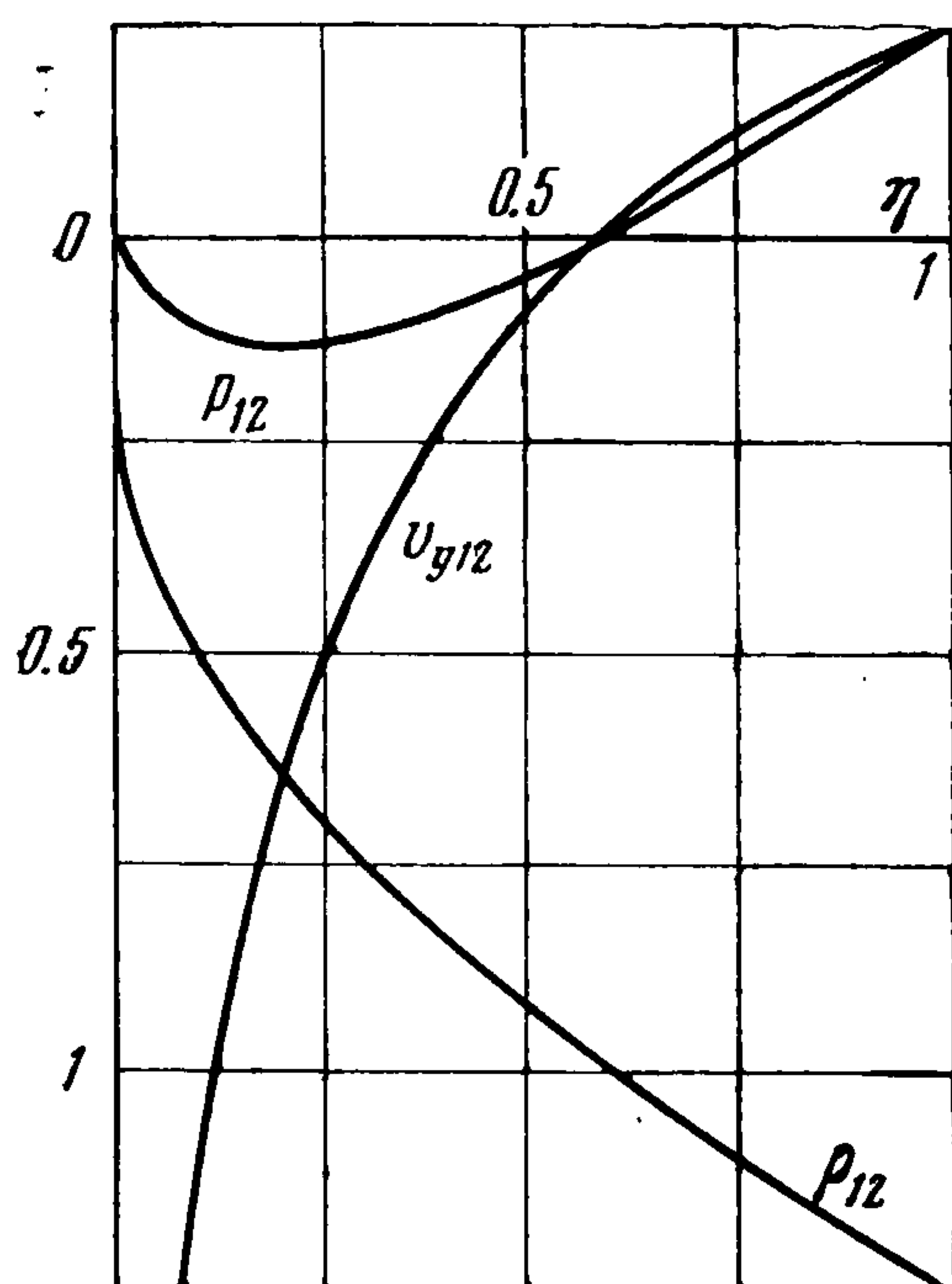
$$v_{y12} = \left(1 + \frac{4}{\kappa+1} \frac{df}{d\xi}\right) f_{1/2} + \frac{4}{\kappa+1} \frac{1}{g} \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \xi\right) \frac{df}{d\xi} g_{1/2}$$

$$\rho_{12} = \frac{4}{\kappa+1} \frac{dg}{d\xi} f_{1/2} + \left(1 - \frac{4}{\kappa+1} \frac{df}{d\xi}\right) g_{1/2}$$

Теперь без труда находится приращение давления

$$p_{12} = \frac{4}{\kappa+1} \frac{dh}{d\xi} f_{1/2} + \frac{4}{\kappa+1} \frac{1}{g} \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \xi\right) \frac{dh}{d\xi} g_{1/2} + h_{1/2}$$

Подставим полученные значения функций  $v_{y12}$  и  $p_{12}$  в формулу (2.1). Несложные преобразования позволяют убедиться, что она является иным



Фиг. 2

видом записи интеграла (2.3). Отсюда можно вывести важное следствие качественного порядка. Как установлено в работе [15], интеграл (2.3) существует лишь в случае, когда выражение для импульса вещества внутри возмущенной области содержит не зависящее от времени слагаемое. В применении к рассматриваемой задаче это означает, что при взрыве газу сообщается не только энергия, но и количество движения. В каждой плоскости  $x = \text{const}$  параметры гиперзвукового потока у несущего профиля совпадают с соответствующими параметрами взрывной волны, распространение которой сопровождается передачей импульса вдоль оси  $y$ .

Используя формулу (2.1), можно вывести дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $v_{y12}$  и получить его решение в квадратурах, довольно громоздкое, вследствие чего оно здесь не приводится. Значительно удобней интегрировать уравнение для  $v_{y12}$  при помощи численных методов. Поведение функций  $v_{y12}$ ,  $\rho_{12}$  и  $p_{12}$  видно из графиков на фиг. 2.

Асимптотика функций первого приближения при  $\eta \rightarrow \pm 0$  известна из решения задачи о сильном взрыве

$$v_{x11} = \frac{\kappa}{\kappa+1} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} |\eta|^{-1/\kappa} + \dots, \quad v_{y11} = \pm \frac{1}{2} h_0^{-1/\kappa} |\eta|^{(\kappa-1)/\kappa} + \dots$$

$$\rho_{11} = h_0^{1/\kappa} |\eta|^{1/\kappa} + \dots, \quad p_{11} = h_0 + \dots, \quad w_{11} = h_0^{(\kappa-1)/\kappa} |\eta|^{-1/\kappa} + \dots$$

$$y_{11} = \pm \frac{\kappa}{\kappa+1} h_0^{-1/\kappa} |\eta|^{(\kappa-1)/\kappa} + \dots, \quad h_0 = \frac{9}{8} (\kappa+1) k_2$$

Значение коэффициента  $k_2$  можно найти в монографии Л. И. Седова [16].  
Функции второго приближения при  $\eta \rightarrow \pm 0$  представляются асимптотическими формулами

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_{x12} &= \pm \frac{2}{\kappa + 1} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} |\eta|^{-(2+\kappa)/2\kappa} + \dots \\ v_{y12} &= - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa(2-\kappa)} \eta_0^{-1/\kappa} |h|^{-(2-\kappa)/2\kappa} + \dots \\ \rho_{12} &= \mp \frac{2}{\kappa} h_0^{1/\kappa} |\eta|^{(2-\kappa)/2\kappa} + \dots, \quad p_{12} = \mp \frac{2(\kappa+1)}{\kappa(2-\kappa)} h_0^{-1/\kappa} |\eta|^{(3\kappa-2)/2\kappa} + \dots \\ w_{12} &= \pm \frac{2}{\kappa} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} |\eta|^{-(2+\kappa)/2\kappa} + \dots \\ y_{12} &= - \frac{4(\kappa-1)}{(\kappa+1)(2-\kappa)} h_0^{-1/\kappa} |\eta|^{-(2-\kappa)/2\kappa} + \dots \end{aligned}$$

В написанных разложениях приращение давления  $p_{12} = 0$  при  $\eta = 0$ .

**3. Ламинарный след.** В области вихревого следа уже нельзя пренебречь вязкостью и теплопроводностью реального газа. Наоборот, в формировании структуры этой области течения диссипативные факторы играют главную роль. Производя сравнение относительной величины входящих в уравнения Навье — Стокса конвективных членов и членов, обусловленных переносом тепла, В. В. Сычев заключил [17], что при изучении следа от (1.2) нужно перейти к новой автомодельной переменной

$$(3.1) \quad \zeta = \psi (bx)^{-1/6} = \eta x^{1/2}$$

Разложения для параметров газа запишутся в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 - \frac{8\kappa}{9(\kappa+1)^2} b^{4/3} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} x^{(3-4\kappa)/6\kappa} \left[ v_{x21}(\zeta) + \frac{2}{\kappa} b_{1/2} x^{-1/12} v_{x22}(\zeta) + \dots \right] \\ v_y &= \frac{2}{3(\kappa+1)} b^{2/3} h_0^{-1/\kappa} x^{-(5\kappa-3)/6\kappa} \left[ v_{y21}(\zeta) - \frac{4(\kappa-1)}{\kappa(2-\kappa)} b_{1/2} x^{-1/12} v_{y22}(\zeta) + \dots \right] \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} h_0^{1/\kappa} x^{-1/2\kappa} \left[ \rho_{21}(\zeta) - \frac{2}{\kappa} b_{1/2} x^{-1/12} \rho_{22}(\zeta) + \dots \right] \\ p &= \frac{8}{9(\kappa+1)} b^{4/3} h_0 x^{-2/3} [p_{21}(\zeta) + \dots] \\ w &= \frac{8\kappa}{9(\kappa+1)^2} b^{4/3} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} x^{(3-4\kappa)/6\kappa} \left[ w_{21}(\zeta) + \frac{2}{\kappa} b_{1/2} x^{-1/12} w_{22}(\zeta) + \dots \right] \\ y &= \frac{\kappa}{\kappa+1} b^{2/3} h_0^{-1/\kappa} x^{(3+\kappa)/6\kappa} \left[ y_{21}(\zeta) - \frac{4(\kappa-1)}{\kappa(2-\kappa)} b_{1/2} x^{-1/12} y_{22}(\zeta) + \dots \right] \end{aligned}$$

В выражении для давления здесь сохранен лишь один член, так как поправка к  $p_{21}$  будет порядка  $x^{-(2\kappa-1)/2\kappa} \ll x^{-1/12}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Будем считать, что формулы (1.3) задают внешнее разложение, а соотношения (3.2) относятся к разложению для внутренней области. Сращивание обоих разложений опирается на тот факт, что существует область, где они взаимно перекрываются [18,19]. Отсюда получают предельные условия, которым при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  должны подчиняться искомые функции. Однако для дальнейшего необходимо не только знать сами предельные условия, но и правильно оценить обычно опускаемые в них остаточные члены. Чтобы установить вид последних, формул (1.3) недостаточно, в их правые части требуется добавить слагаемые более высокого порядка мало-

сти по сравнению с уже рассмотренными. Опуская для краткости все вычисления, приведем окончательные результаты для функций первого приближения: при  $\zeta \rightarrow \pm \infty$  имеем соответственно

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v_{x21} &\rightarrow |\zeta|^{-1/\kappa} + O(|\zeta|^{-(2\kappa+1)/\kappa}), & y_{y21} &\rightarrow \pm |\zeta|^{(\kappa-1)/\kappa} + O(|\zeta|^{-(\kappa+1)/\kappa}), \\ \rho_{21} &\rightarrow |\zeta|^{1/\kappa} + O(|\zeta|^{(1-2\kappa)/\kappa}), & p_{21} &\rightarrow 1 \\ w_{21} &\rightarrow |\zeta|^{-1/\kappa} + O(|\zeta|^{-(2\kappa+1)/\kappa}), & y_{21} &\rightarrow \pm |\zeta|^{(\kappa-1)/\kappa} + O(|\zeta|^{-(\kappa+1)/\kappa}) \end{aligned}$$

Совершенно аналогично выводятся предельные условия при  $\zeta \rightarrow \pm \infty$  для функций второго приближения

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v_{x22} &\rightarrow \pm |\zeta|^{-(2+\kappa)/2\kappa} + O(|\zeta|^{-(2+5\kappa)/2\kappa}), & v_{y22} &\rightarrow |\zeta|^{-(2-\kappa)/2\kappa} + O(|\zeta|^{-(2+3\kappa)/2\kappa}) \\ \rho_{22} &\rightarrow \pm |\zeta|^{(2-\kappa)/2\kappa} + O(|\zeta|^{(2-5\kappa)/2\kappa}) \\ w_{22} &\rightarrow \pm |\zeta|^{-(2+\kappa)/2\kappa} + O(|\zeta|^{-(2+5\kappa)/2\kappa}), & y_{22} &\rightarrow |\zeta|^{-(2-\kappa)/2\kappa} + O(|\zeta|^{-(2+3\kappa)/2\kappa}) \end{aligned}$$

Подставим разложения (3.2) в систему уравнений Навье — Стокса. Второе из уравнений (1.5) показывает, что  $dp_{21}/d\xi = 0$ . Как ясно отсюда, давление поперек гиперзвукового следа в рассматриваемом приближении не меняется. С учетом предельных условий (3.3) имеем  $p_{21} = 1$ . После несложных преобразований, опирающихся на указанное равенство, система уравнений первого приближения может быть записана как

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{16\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 \frac{1}{N_{Pr}} \frac{d^2 w_{21}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dw_{21}}{d\zeta} + \frac{1}{\kappa} w_{21} &= 0 \\ \frac{16\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 \frac{d^2 v_{x21}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dv_{x21}}{d\zeta} + \frac{4\kappa-3}{\kappa} v_{x21} &= \frac{4(\kappa-1)}{\kappa} w_{21} \\ \rho_{21} w_{21} = 1, \quad \rho_{21} \frac{dy_{21}}{d\zeta} = \frac{\kappa-1}{\kappa}, \quad \zeta \frac{dy_{21}}{d\zeta} - \frac{\kappa+3}{\kappa} y_{21} + \frac{4}{\kappa} v_{y21} &= 0 \end{aligned}$$

Ключевым здесь служит первое уравнение, после его интегрирования находятся решения остальных уравнений. Результаты значительно упрощаются [17], когда  $N_{Pr} = 1$ , а  $v_{x21} = w_{21}$ . При произвольном значении числа Прандтля сделаем замену независимой переменной

$$(3.6) \quad \zeta_1 = -\frac{3(\kappa^2-1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0} \zeta^2$$

следствием которой будет

$$\zeta_1 \frac{d^2 w_{21}}{d\zeta_1^2} + \left( \frac{1}{2} - \zeta_1 \right) \frac{dw_{21}}{d\zeta_1} - \frac{1}{2\kappa} w_{21} = 0$$

Это — канонический вид так называемого конфлюентного гипергеометрического уравнения [20]. Используя стандартные обозначения для конфлюентных гипергеометрических функций, для его общего решения имеем

$$w_{21} = c_1 \Phi \left( \frac{1}{2\kappa}, \frac{1}{2}; \zeta_1 \right) + c_2 (-\zeta_1)^{1/2} \Phi \left( \frac{\kappa+1}{2\kappa}, \frac{3}{2}; \zeta_1 \right)$$

Обращаясь к формулам (3.1) и (3.6), видим, что первый член в правой части написанного соотношения представляет решение, симметричное относительно линии тока  $\psi = 0$ , второй же член дает антисимметричное

решение. Рассматриваемое первое приближение описывает поле возмущений в следе, связанное только с сопротивлением обтекаемого тела. Естественно, что распределение параметров газа в верхней и нижней полуплоскостях должно быть симметричным для такого поля. Как сразу следует отсюда, постоянная  $c_2 = 0$ . Вид предельных условий (3.3) подтверждает это заключение. Чтобы определить постоянную  $c_1$ , воспользуемся асимптотическим разложением гипергеометрических функций при  $\zeta_1 \rightarrow -\infty$ . Окончательно

$$(3.7) \quad w_{21} = \Gamma\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{3(\kappa^2-1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0}\right]^{1/2\kappa} \Phi\left(\frac{1}{2\kappa}, \frac{1}{2}; \zeta_1\right)$$

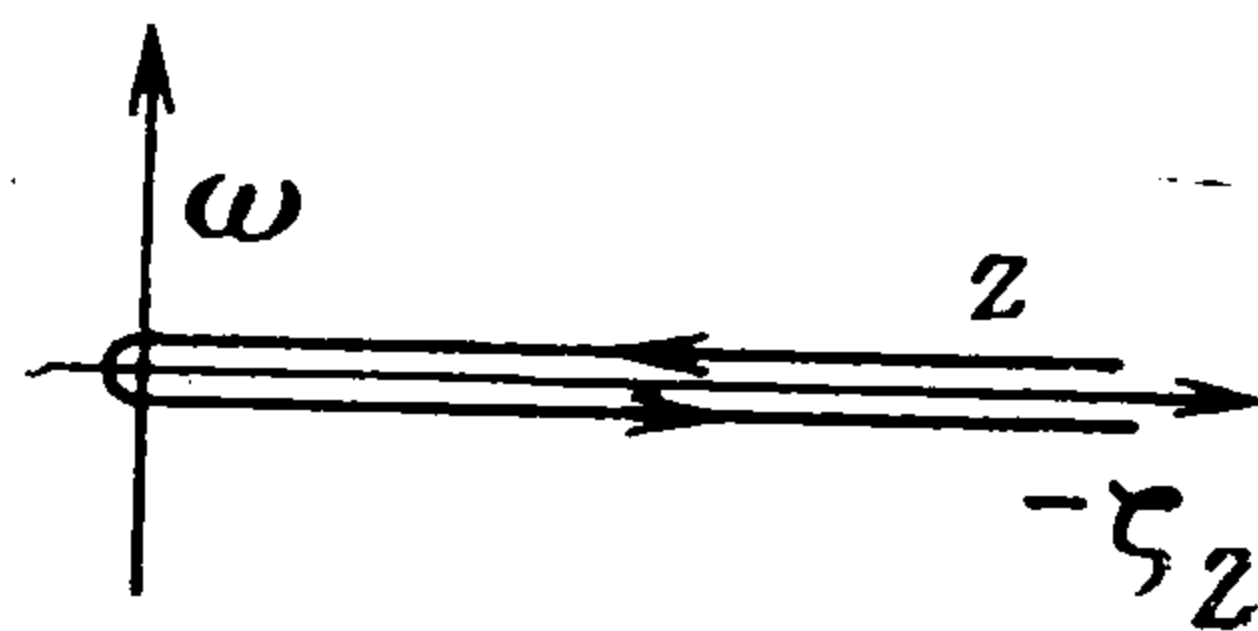
Перейдем ко второму уравнению системы (3.5). Совершив замену независимой переменной  $\zeta_2 = \zeta_1 / N_{Pr}$ , находим в результате конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение с правой частью

$$(3.8) \quad \zeta_2 \frac{d^2 v_{x21}}{d\zeta_2^2} + \left(\frac{1}{2} - \zeta_2\right) \frac{dv_{x21}}{d\zeta_2} - \frac{4\kappa-3}{2\kappa} v_{x21} = -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa} w_{21}$$

Выберем в качестве фундаментальной системы решений соответствующего (3.8) однородного уравнения интегралы

$$(3.9) \quad v_{x21}^{(1)}, v_{x21}^{(2)} = e^{\zeta_2} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{3-2\kappa}{2\kappa}\right) \Phi\left(-\frac{3(\kappa-1)}{2\kappa}, \frac{1}{2}; -\zeta_2\right) \pm \right. \\ \left. \pm \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(-\frac{3(\kappa-1)}{2\kappa}\right) (-\zeta_2)^{1/2} \Phi\left(\frac{3-2\kappa}{2\kappa}, \frac{3}{2}; -\zeta_2\right) \right]$$

В правой части (3.9) знак плюс берется для  $v_{x21}^{(1)}$ , а знак минус — для  $v_{x21}^{(2)}$ . Интегралы  $v_{x21}^{(1)}$  и  $v_{x21}^{(2)}$  удобно рассматривать на плоскости комплексного переменного  $z = -\zeta_2 + i\omega$ . При движении вдоль прямой  $x = \text{const}$  от верхней границы вихревого следа к нижней в плоскости  $z$  совершается обход действительной положительной полуоси в направлении, которое указано на фиг. 3 стрелкой. Содержащуюся в  $v_{x21}^{(1)}$  линейную комбинацию конфлюэнтных гипергеометрических функций можно записать в виде функции [20]



Фиг. 3

$$\Psi\left(-\frac{3(\kappa-1)}{2\kappa}, \frac{1}{2}; z\right)$$

Видно, что линейная комбинация гипергеометрических функций, определяющих  $v_{x21}^{(2)}$ , сведется к той же самой  $\Psi$ -функции Трикоми, если вместо  $z$  в качестве ее аргумента связь  $z'$  с  $|z'| = |z|$  и  $\arg z' = \arg z - 2\pi$ .

Вронскиан  $W_{21}$  выбранной фундаментальной системы решений задается соотношением

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3-2\kappa}{2\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{3(\kappa-1)}{2\kappa}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}\right) W_{21} = -e^{\zeta_2} z^{-1/2} = e^{\zeta_2} (z')^{-1/2}$$

а частное решение  $v_{x21}^*$  неоднородного уравнения (3.8) будет

$$(3.10) \quad v_{x21}^* = \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \left( v_{x21}^{(1)} \int_0^{\zeta_2} \frac{w_{21} v_{x21}^{(2)}}{\zeta_2 W_{21}} d\zeta_2 - v_{x21}^{(2)} \int_0^{\zeta_2} \frac{w_{21} v_{x21}^{(1)}}{\zeta_2 W_{21}} d\zeta_2 \right)$$

Теперь, очевидно

$$v_{x21} = c_3 v_{x21}^{(1)} + c_4 v_{x21}^{(2)} + v_{x21}^*$$

Остается вычислить значения произвольных постоянных  $c_3$  и  $c_4$ . Пусть вначале  $\zeta \rightarrow +\infty$ , тогда  $\arg z = 0$ , а  $\arg z' = -2\pi$ . Чтобы найти главные члены разложения интеграла  $v_{x21}^{(1)}$ , воспользуемся асимптотикой  $\Psi$ -функции [20]. Предельные свойства  $v_{x21}^{(2)}$  устанавливаются путем подстановки асимптотических разложений для конфлюентных гипергеометрических функций в формулу (3.9). Используя полученные таким образом результаты, можно показать, что главный член асимптотики частного решения  $v_{x21}^*$  в точности соответствует условиям (3.3). Учитывая еще порядок поправочных членов, входящих в эти условия, имеем

$$(3.11) \quad c_4 = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \int_0^{\infty} \frac{w_{21} v_{x21}^{(1)}(z)}{\zeta_2 W_{21}(z)} d\zeta_2$$

Здесь уголком над несобственным расходящимся интегралом обозначена его конечная часть в смысле Адамара. Аналогично изложенному проводятся рассуждения, когда  $\zeta \rightarrow -\infty$ ,  $\arg z = 2\pi$  и  $\arg z' = 0$ . Поведение интеграла  $v_{x21}^{(1)}$  определяется при помощи подстановки асимптотических разложений для гипергеометрических функций в формулу (3.9), в то время как главные члены разложения  $v_{x21}^{(2)}$  находятся на основании асимптотики  $\Psi$ -функции. В итоге

$$(3.12) \quad c_3 = - \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \int_0^{\infty} \frac{w_{21} v_{x21}^{(2)}(z')}{\zeta_2 W_{21}(z')} d\zeta_2$$

В соотношениях (3.11) и (3.12) аргументы комплексных переменных  $z$  и  $z'$  равны нулю. С учетом свойств вронскиана  $W_{21}$  отсюда следует, что  $c_3 = c_4$ . Оба фундаментальных решения  $v_{x21}^{(1)}$  и  $v_{x21}^{(2)}$  содержат как симметричные, так и антисимметричные части, несмотря на это частное решение  $v_{x21}^*$  симметрично. Простая проверка позволяет теперь убедиться в том, что функция  $v_{x21}$  дает поле скоростей, симметричное относительно линии тока  $\psi = 0$  при равных значениях постоянных  $c_3$  и  $c_4$ .

Обратимся к четвертому уравнению из системы (3.5). Принимая во внимание порядок поправочных членов в формулах (3.3) или требование о симметрии решения в рассматриваемом приближении, имеем в результате его интегрирования

$$(3.13) \quad y_{21} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \Gamma\left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{3(\kappa^2 - 1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0} \right]^{1/2\kappa} \zeta \Phi\left(\frac{1}{2\kappa}, \frac{3}{2}; \zeta_1\right)$$

Пятое уравнение системы (3.5) превращается в конечное соотношение, откуда

$$v_{y21} = \frac{\kappa + 3}{4} y_{21} - \frac{\kappa - 1}{4} \zeta w_{21}$$

Здесь функции  $w_{21}$  и  $y_{21}$  задаются при помощи равенств (3.7) и (3.13) соответственно.

**4. Второе приближение.** Выясним, какое влияние на структуру вихревого следа в гиперзвуковом потоке оказывает приложенная к телу подъемная сила. Прежде всего подсчитаем компоненту импульса газа в проекции на ось  $y$ , которая переносится через заключенную в следе часть плоскости  $x = \text{const}$  (фиг. 1). Используя разложения (3.2) и полагая  $x \rightarrow \infty$ , легко видеть, что интеграл, выражающий эту компоненту, получается исчезающе малым. Иными словами, величина подъемной силы может быть найдена только по параметрам внешней области течения. Расчеты приводят к значению постоянной  $B$  в формулах (1.4), равному 0.683.

Хотя при подсчете подъемной силы переносом импульса газа через вихревой след можно пренебречь, для определения связанных с ней возмущений поля скоростей необходимо рассмотреть вторые члены в правых частях разложений (3.2). Они подчиняются системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{16\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 \frac{1}{N_{Pr}} \frac{d^2 w_{22}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dw_{22}}{d\zeta} + \frac{\kappa+2}{2\kappa} w_{22} &= 0 \\ \frac{16\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 \frac{d^2 v_{x22}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dv_{x22}}{d\zeta} + \frac{9\kappa-6}{2\kappa} v_{x22} &= \frac{4(\kappa-1)}{\kappa} w_{22} \\ \rho_{22} w_{21} - w_{22} \rho_{21} = 0, \quad \frac{2\kappa-1}{2-\kappa} \rho_{21} \frac{dy_{22}}{d\zeta} + \rho_{22} \frac{dy_{21}}{d\eta} &= 0 \\ \zeta \frac{dy_{22}}{d\zeta} - \frac{\kappa+6}{2\kappa} y_{22} + \frac{4}{\kappa} v_{y22} &= 0 \end{aligned}$$

которая по своей структуре вполне аналогична системе (3.5). Из уравнений (4.1) следует, что в рассматриваемом приближении выполняется гипотеза плоских сечений. Ключевым здесь снова является первое уравнение, заменой независимой переменной по формуле (3.6) оно приводится к виду

$$\zeta \frac{d^2 w_{22}}{d\zeta^2} + \left( \frac{1}{2} - \zeta \right) \frac{dw_{22}}{d\zeta} - \frac{\kappa+2}{4\kappa} w_{22} = 0$$

Чтобы удовлетворить предельным условиям (3.4), следует выбрать антисимметричное решение

$$(4.2) \quad w_{22} = \Gamma\left(\frac{3\kappa-2}{4\kappa}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \left[ \frac{3(\kappa^2-1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0} \right]^{(3\kappa+2)/4\kappa} \zeta \Phi\left(\frac{3\kappa+2}{4\kappa}, \frac{3}{2}; \zeta_1\right)$$

Возмущения удельной энтальпии, обусловленные этим решением, меняют знак при пересечении линии тока  $\psi = 0$ . После введения независимой переменной  $\zeta_2$  второе уравнение системы (4.1) запишется как

$$(4.3) \quad \zeta_2 \frac{d^2 v_{x22}}{d\zeta_2^2} + \left( \frac{1}{2} - \zeta_2 \right) \frac{dv_{x22}}{d\zeta_2} - \frac{9\kappa-6}{4\kappa} v_{x22} = - \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} w_{22}$$

За фундаментальную систему решений соответствующего (4.3) однородного уравнения примем интегралы

$$(4.4) \quad \begin{aligned} v_{x22}^{(1)}, v_{x22}^{(2)} &= e^{\zeta_2} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(-\frac{5\kappa-6}{4\kappa}\right) \Phi\left(-\frac{7\kappa-6}{4\kappa}, \frac{1}{2}; -\zeta_2\right) \pm \right. \\ &\left. \pm \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{7\kappa-6}{4\kappa}\right) (-\zeta_2)^{1/2} \Phi\left(-\frac{5\kappa-6}{4\kappa}, \frac{3}{2}; -\zeta_2\right) \right] \end{aligned}$$

В соотношениях (4.4) знак плюс соответствует  $v_{x22}^{(1)}$ , а знак минус — интегралу  $v_{x22}^{(2)}$ . Первый из них  $v_{x22}^{(1)}$  на плоскости комплексного переменного  $z$  выражается функцией Трикоми

$$\Psi\left(-\frac{7\kappa-6}{4\kappa}, \frac{1}{2}; z\right)$$

Второй интеграл можно свести к той же самой  $\Psi$ -функции, если заметить аргумент  $z$  на  $z'$ . Для вронскиана  $W_{22}$  верно соотношение

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{5\kappa-6}{4\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{7\kappa-6}{4\kappa}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}\right) W_{22} = -e^{\zeta_2 z^{-1/2}} = e^{\zeta_2} (z')^{-1/2}$$

Пусть частное решение  $v_{x22}^*$  неоднородного уравнения (4.3) построено по правилу, задающему функцию  $v_{x21}^*$ . Для него можно тогда применять равенство (3.10), где у всех величин вместо нижних индексов 21 подставлены индексы 22. Для общего решения имеем формулу

$$v_{x22} = c_5 v_{x22}^{(1)} + c_6 v_{x22}^{(2)} + v_{x22}^*$$

Произвольные постоянные  $c_5$  и  $c_6$  находятся при помощи предельных условий (3.4), причем существенную роль играют приведенные в них оценки поправочных членов. Полагая  $\zeta \rightarrow +\infty$ , установим главные члены разложения  $v_{x22}^{(1)}$  на основании асимптотики  $\Psi$ -функции Трикоми, а для вычисления интеграла  $v_{x22}^{(2)}$  воспользуемся формулой (4.4). Наоборот, при  $\zeta \rightarrow -\infty$  поведение  $v_{x22}^{(1)}$  определяется путем подстановки асимптотики конфлюентных гипергеометрических функций в формулу (4.4), в то время как главные члены ряда для интеграла  $v_{x22}^{(2)}$  получаются из его выражения через  $\Psi$ -функцию.

Заметим, кроме того, что для любой точки изображенного на фиг. 3 контура справедливо равенство

$$\zeta = \left[ \frac{32\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 z \right]^{1/2} = - \left[ \frac{32\kappa}{3(\kappa^2-1)} h_0 z' \right]^{1/2}$$

Подставляя его в правую часть соотношения (4.2), окончательно находим

$$c_5 = -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \int_0^{\sqrt{-\infty}} \frac{w_{22}(z') v_{x22}^{(2)}(z')}{\zeta_2 W_{22}(z')} d\zeta_2$$

$$c_6 = \frac{2(\kappa-1)}{\kappa} \int_0^{\sqrt{-\infty}} \frac{w_{22}(z) v_{x22}^{(1)}(z)}{\zeta_2 W_{22}(z)} d\zeta_2$$

Здесь аргументы обеих комплексных переменных  $z$  и  $z'$  равны нулю, поэтому  $c_5 = -c_6$ . Можно убедиться, что при этом условии возмущения поля скоростей, связанные с функцией  $v_{x22}$ , антисимметричны относительно линии тока  $\psi = 0$ .

С учетом предельных условий (3.4) интегрирование четвертого уравнения из системы (4.1) дает

$$(4.5) \quad y_{22} = \Gamma\left(\frac{3\kappa-2}{4\kappa}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{3(\kappa^2-1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0}\right]^{(2-\kappa)/4\kappa} \Phi\left(\frac{2-\kappa}{4\kappa}, \frac{1}{2}; \zeta_1\right)$$

Из пятого уравнения указанной системы находим

$$v_{y22} = \frac{2-\kappa}{8} \zeta w_{22} + \frac{\kappa+6}{8} y_{22}$$

причем функции  $w_{22}$  и  $y_{22}$  выражаются при помощи равенств (4.2), (4.5).

Под влиянием подъемной силы нулевая линия тока перестает быть осью симметрии течения. Ее уравнение выводится из последнего разложения (3.2) и гласит

$$(4.6) \quad y_0 = -\frac{4(\kappa-1)}{(\kappa+1)(2-\kappa)} \Gamma\left(\frac{3\kappa-2}{4\kappa}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{3(\kappa^2-1)}{32\kappa} \frac{N_{Pr}}{h_0}\right]^{(2-\kappa)/4\kappa} \times \\ \times b^{2/3} b_{1/2} h_0^{-1/\kappa} x^{(\kappa+6)/12\kappa} + \dots$$

Как видно отсюда, с увеличением расстояния от обтекаемого тела смещение  $y_0$  нулевой линии тока из своего первоначального положения неограниченно возрастает. Из сравнения формул (1.4) и (4.6) следует, далее, что нулевая линия тока отклоняется в ту же сторону, в какую направлена подъемная сила  $F_y$ . Это заключение не является тривиальным, оно объясняется отмеченной выше возможностью пренебречь переносом количества движения газа через часть контрольной плоскости  $x = \text{const}$ , которая находится в области вихревого следа.

**5. Особые случаи.** Значение  $\kappa = 3/2$  будет особым для решения первого приближения, которое описывает течение в следе. Один из линейно независимых интегралов соответствующего (3.8) однородного уравнения можно тогда представить равенством

$$v_{x21}^{(0)} = e^{\zeta_2} (-\zeta_2)^{1/2}$$

Ввиду экспоненциального затухания при  $\zeta \rightarrow \pm \infty$  он служит, очевидно, собственным решением задачи. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении формул второго приближения, если положить  $\kappa = 6/5$ . В этом случае в качестве одного из фундаментальных интегралов уравнения (4.3), в котором правая часть положена равной нулю, возьмем указанную выше собственную функцию  $v_{x22}^{(0)} = v_{x21}^{(0)}$ . Таким образом, при  $\kappa = 3/2$  и  $\kappa = 6/5$  поле скоростей внутри вихревого следа не определяется однозначным образом в рамках метода сращиваемых внешних и внутренних асимптотических разложений.

Отметим в заключение, что значение показателя степени  $m = 1/2$ , найденное из требования о конечной величине подъемной силы, в некотором смысле также можно рассматривать как собственное. Именно, пусть дано течение газа, которое подчиняется разложениям (1.3) во внешней области. Требуется продолжить это течение в окрестность линии тока  $\psi = 0$ . Оказывается, что, по крайней мере, в диапазоне  $0 < m < 1$  только

при  $m = 1/2$  поле скоростей будет принадлежать свободному потоку в вихревом следе, при других значениях  $m$  в течение необходимо ввести простирающееся до бесконечности полутело. Изложенные выше результаты исследования гиперзвукового следа существенно опирались на тот факт, что согласно асимптотическим формулам (2.5) при  $|\eta| \rightarrow 0$  возмущение давления  $p_{12} \rightarrow 0$ . При  $m \neq 1/2$  асимптотическое разложение функции  $p_{12}$  будет начинаться с некоторой постоянной, величина которой при  $\eta \rightarrow +0$  не совпадает с величиной при  $\eta \rightarrow -0$ .

Поступила 11 XII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien N. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
2. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
3. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 1.
5. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 7.
6. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 3.
7. Черный Г. Г. Влияние малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 4.
8. Черный Г. Г. Обтекание тонкого затупленного конуса при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 4.
9. Черный Г. Г. Влияние малого затупления переднего конуса тела на его обтекание потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 4.
10. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
11. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
12. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
13. Chow R. R., Ting L. Higher order theory of curved shock. J. Aeronaut. Sci., 1961, vol. 28, No. 5.
14. Bush W. B. On the viscous hypersonic blunt body problem. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt. 3.
15. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. К общей теории нестационарных течений, близких к автомодельным. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
16. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
17. Сычев В. В. О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом. In.: Fluid Dynamics Transactions. vol. 3. Warszawa, 1966.
18. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
19. Коул Дж. Д. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
20. Erdelyi. A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher transcendental functions, vol. 1. New York — Toronto — London, McGraw-Hill, 1953.