Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.516

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СКОРОСТИ И СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО, В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. М. Васильев

(Москва)

Показано, что если сила, действующая на тело, не совпадает по направлению со скоростью набегающего потока, то в асимптотической формуле для скорости появляются логарифмические множители. Получена формула для силы, которую можно считать распространением известной теоремы Жуковского на случай трехмерного обтекания тела вязкой жидкостью.

1. Постановка задачи. Рассматривается обтекание тела B конечных размеров стационарным потоком вязкой жидкости. Предполагается, что граница S тела B удовлетворяет условиям Ляпунова. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ — безразмерный вектор скорости, p — безразмерное давление, 2λ — число Рейнольдса, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $G = R^3 \setminus B$.

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса

$$\Delta u_j - 2\lambda \frac{\partial p}{\partial x_j} - 2\lambda u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\partial u_k / \partial x_k = 0$$

Предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до трех.

Граничные условия

$$u_j|_S = 0, \quad \lim_{R\to\infty} u_j = u_{\infty j} = \delta_{1j} \tag{1.2}$$

(Здесь $R = |x|$, δ_{ij} — символ Кронекера.)

В работе [1] показано, что всякое решение краевой задачи (1.1), (1.2) [1], обладающее конечным интегралом Дирихле [2]

$$J = \int_G |\nabla u|^2 dx \qquad (dx = dx_1 dx_2 dx_3) \tag{1.3}$$

удовлетворяет условию

$$|u - u_\infty| = O(R^{-\alpha}) \qquad (R \to \infty)$$

при $\alpha > {}^1/_2$, т. е. «физически приемлемо» по Финну [8].

---

[1] Граничные условия на теле в работе [1] взяты в более общем виде.

[2] Существование таких решений доказано в работах [2–7].

Для физически приемлемых решений Финном [8] получена асимптотическая формула

$$u_k(x) = u_{\infty k} + a_i H_{ik}(x) + O(R^{-3/2+\varepsilon}) \qquad (R\to\infty,\ k=1,2,3) \tag{1.4}$$

Здесь $a = 2\lambda F$, F — безразмерный вектор силы, действующей на тело B, ε — сколь угодно малое положительное число, $H(x)$ — матрица фундаментальных решений системы уравнений Озеена

$$\Delta H_{ij} - 2\lambda \frac{\partial q_i}{\partial x_j} - 2\lambda \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_1} = \delta_{ij}\delta(x-y) \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.5}$$
$$\partial H_{ik} / \partial x_k = 0$$

Уточнение асимптотического разложения (1.4), полученное с учетом нелинейных членов уравнений Навье — Стокса, приведено в работе [9], где предполагалось, что вектор силы F совпадает по направлению со скоростью набегающего потока u_∞. В этом предположении

$$u_k(x) = u_{\infty k} + a_1 H_{1k}(x) + a_{ij}\frac{\partial H_{ki}}{\partial x_j}(x) + O[R^{-2+\varepsilon}(R - x_1 + 1)^{-1/2}] \tag{1.6}$$
$$(R\to\infty)$$

a_{ij} — некоторые константы, $k = 1, 2, 3$.

Ниже будет получено уточнение формулы (1.4) без предположения о коллинеарности векторов u_∞ и F. Будет также получена формула для силы, действующей на тело B. В этой формуле сила выражается через интеграл по сфере достаточно большого радиуса с центром, лежащим внутри B, и дается оценка остаточного члена. Этот результат представляет собой распространение теоремы Жуковского на случай трехмерного обтекания гладкого тела стационарным потоком вязкой жидкости.

Обобщение теоремы Жуковского на случай плоского течения вязкой жидкости рассматривалось в работах [10–12].

2. Об асимптотическом поведении скорости. В работе [9] приведена формула

$$u_i(x) = u_{\infty i} + a_k H_{ik}(x) + a_{jk}\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}(x) + I_{di}(x; v', v') +$$
$$+ O[R^{-2}(R - x_1 + 1)^{-1/2}\log^3 R]$$

где

$$I_{di}(x; v', v') = -2\lambda \int\limits_G v_j' v_k' \frac{\partial H_{ij}}{\partial y_k}\, dy \qquad (i=1,2,3), \qquad v' = aH \tag{2.1}$$

Можно показать [1], что если $F \times u_\infty = 0$, то $I_i^d(x; v'; v') = O[R^{-2+\varepsilon}(R - x_1 + 1)^{-1}]$, и следовательно, в этом случае имеет место формула (1.6). Если же сила F не сводится к силе лобового сопротивления, то, ограничиваясь остатком $O(R^{-3/2})$, можно сравнительно легко получить главный член асимптотического разложения интеграла (2.1) $O(R^{-3/2}\ln R)$.

[1] См. Бабенко К. И., Васильев М. М. Асимптотическое поведение решения задачи обтекания конечного тела вязкой жидкостью. Препринт ИПМ АН СССР, 1971, деп. № 4590-72.

Итак, рассмотрим интеграл (2.1) при $F \times u_\infty \neq 0$.

Известно, что фундаментальное решение системы уравнений Озеена (1.5) можно представить в виде

$$H_{ij} = \delta_{ij}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$2\lambda q_j = -\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x_j} + 2\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_j} = \frac{1}{4\pi}\frac{y_j - x_j}{|y - x|}$$

$$\Phi = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int\limits_0^{\lambda s(x-y)}\frac{1 - e^{-t}}{t}\,dt, \quad s(x - y) = |x - y| - x_1 + y_1$$

Имеет место оценки

$$|H_{ij}(x)| \leqslant CR^{-1}\,[s(x) + 1]^{-1} \tag{2.2}$$
$$|\partial H_{ij}\,/\,\partial x_k\,| \leqslant CR^{-3/2}\,[s(x) + 1]^{-3/2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Отсюда следует, что

$$v_k' = -\frac{a_k e^{-\lambda s(x)}}{4\pi R} - \frac{1 - \delta_{1k}}{R}\left[\frac{x_k\Phi''}{R}(a_2x_2 + a_3x_3) + a_k\Phi'\right] +$$
$$+ O\{R^{-3/2}[s(x) + 1]^{-1/2}\}$$

Приведенные формулы показывают, что интеграл (2.1) представляет собой сумму интегралов вида

$$I(x) = \int\limits_G [f(y) + g(y)]\,W(x - y)\,dy \tag{2.3}$$

где

$$f(y) = r^{-m}\,f_m\,[s(y)]\,[\omega_{kl}(\varphi)\sin^2\vartheta\,]^{2-m} \tag{2.4}$$
$$m = 0,1,2; \quad k, l = 1, 2$$

$$|\,f_m(s)\,| < C\,(s + 1)^{m-4} \tag{2.5}$$

$$|\,g(y)\,| \leqslant Cr^{-5/2}\,[s(y) + 1]^{-3/2}, \qquad \omega_{kl}(\varphi) = \cos^{\delta_{1k}+\delta_{1l}}\varphi\,\sin^{\delta_{2k}+\delta_{2l}}\varphi \tag{2.6}$$

r, ϑ, φ — сферические координаты, $W(x)$ — непрерывно дифференцируемая при $x \neq 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$|\,W(x)\,| \leqslant CR^{-3/2}\,[s(x) + 1]^{-3/2} \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant CR^{-2-\delta_{1i}/2}\,[s(x) + 1]^{-2+\delta_{1i}/2} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.8}$$

Пусть $B \subset d = \{y : |\,y\,| \leqslant 1\}$. Представим область интегрирования G в виде объединения областей $d \cap G$ и $D_0 = R^3 \setminus d$. Интеграл по области $d \cap G$ в силу оценки (2.2) будет $O\,(R^{-3/2})$ при $R \to \infty$. Разобьем D_0 на области

$$D_1 = \{y : 1 \leqslant |y| \leqslant R_0\} \quad (R_0 = hR,\ h = \mathrm{const},\ 0 \leqslant h < 1/4)$$
$$D_2 = \{y : |\,y - x\,| \leqslant R_0\}, \qquad D_3 = D_0 \setminus (D_1 \cup D_2)$$

Интегралы по этим областям обозначим соответственно через I_1, I_2, I_3.

Имеем $\forall y \in D_1, |x-y| \geqslant R - |y| \geqslant R(1-h)$. Поэтому

$$\int\limits_{D_1} g(y)W(x-y)\,dy \leqslant C_1R^{-3/2}\int\limits_1^{R_0} r^{-1/2}dr\int\limits_0^{\pi}[r(1-\cos\vartheta)+1]^{-3/2}\times$$
$$\times \sin\vartheta d\vartheta \leqslant CR^{-3/2}$$

и следовательно

$$I_1 = \int\limits_{D_1} f(y)W(x-y)\,dy + O(R^{-3/2})$$

Рассмотрим интеграл

$$j = \int\limits_{D_1} f(y)W(x-y)\,dy = W(x)\int\limits_{D_1} f(y)\,dy +$$
$$+\int\limits_{D_1}[W(x-y)-W(x)]f(y)\,dy$$

Введем обозначение

$$\Omega = \int\limits_0^{2\pi}\omega_{kl}^{2-m}(\varphi)\,d\varphi$$

Пользуясь выражением (2.4), получим при $m = 0, 1, 2$

$$\int\limits_{D_1} f(y)\,dy = 2^{2-m}\Omega\int\limits_1^{R_0}\frac{dr}{r}\int\limits_0^{2r} f_m(s)s^{2-m}\left[1-(2-m)\frac{s}{2r}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2-m)(1-m)}{2}\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]ds = 2^{2-m}\Omega\int\limits_1^{R_0}\frac{dr}{r}\int\limits_0^{2r} f_m(s)s^{2-m}\,ds + O(1) =$$
$$= 2^{2-m}\Omega\int\limits_1^{R_0}\frac{dr}{r}\int\limits_0^{\infty} f_m(s)s^{2-m}ds + O(1)$$

Таким образом

$$\int\limits_{D_1} f(y)\,dy = A\ln R + O(1)$$

$$A = 2^{2-m}\Omega\int\limits_0^{\infty} f_m(s)s^{2-m}ds \tag{2.9}$$

Оценим теперь интеграл

$$j_1 = \int\limits_{D_1}[W(x-y)-W(x)]f(y)\,dy = \int\limits_{D_1}(y\cdot\operatorname{grad} W(\xi))f(y)\,dy$$
$$\xi = x - \delta y \ (0 < \delta < 1)$$

Так как $|\xi| \geqslant |x| - \delta|y| \geqslant (1-\delta h)R$, то

$$|j_1| \leqslant CR^{-2}\int\limits_{D_1}\left\{\frac{|y_1|}{R^{1/2}[s(\xi)+1]^{3/2}} + \frac{|y_2|+|y_3|}{[s(\xi)+1]^2}\right\}f(y)\,dy$$

Для функции $f(y)$ справедлива оценка

$$|f(y)| \leqslant C|y|^{-2}[s(y)+1]^{-2}$$

Пользуясь этой оценкой и переходя к сферическим координатам, получим

$$|j_1| \leqslant C\left\{R^{-5/2}\int_1^{R_0} rdr\left[\int_0^{R^{-1/2}} \vartheta d\vartheta + \int_{R^{-1/2}}^{\pi} (r(1-\cos\vartheta)+1)^{-2}\sin\vartheta d\vartheta\right] + \right.$$

$$\left. + R^{-2}\int_1^{R_0} rdr\left[\int_0^{R^{-1/2}} \vartheta^2 d\vartheta + \int_{R^{-1/2}}^{\pi} (r(1-\cos\vartheta)+1)^{-2}\sin^2\vartheta d\vartheta\right]\right\}$$

Отсюда следует, что

$$|j_1| \leqslant CR^{-3/2}$$

Переходя к оценке интеграла I_2, заметим, что $\forall\, y \in D_2, |y| \geqslant CR$. Поэтому

$$|I_2| \leqslant C_1 R^{-2}\int_1^{R_0} r^{1/2}dr\int_0^{\pi}[r(1-\cos\vartheta)+1]^{-3/2}\sin\vartheta d\vartheta \leqslant CR^{-3/2}$$

При оценке I_3 воспользуемся неравенством $|x-y| \geqslant C|y|$, $\forall y \in D_3$.

$$|I_3| \leqslant C_1\int_{R_0}^{\infty} r^{-3/2}dr\int_0^{\pi}[r(1-\cos\vartheta)+1]^{-2}\sin\vartheta d\vartheta \leqslant CR^{-3/2}$$

Объединяя полученные оценки, приходим к следующей лемме.

Лемма. Для интеграла (2.3) при выполнении условий (2.4) — (2.8) имеет место формула

$$I(x) = AW(x)\ln R + O(R^{-3/2}) \quad (R\to\infty)$$

где A вычисляется по формуле (2.9).

Полагая в формуле (2.2)

$$f(y) + g(y) = -2\lambda v_j' v_k', \quad W = \partial H_{ij} / \partial y_k$$

на основании доказанной леммы получаем следующую теорему.

Теорема 1. Если поверхность S тела B удовлетворяет условиям Ляпунова, то для решения краевой задачи (1.1), (1.2), обладающего конечным интегралом Дирихле (1.3), имеет место формула

$$u_i(x) = u_{\infty i} + a_k H_{ik}(x) + l_{jk}\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}(x)\ln R + O(R^{-3/2}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Пользуясь формулой (2.9), можно легко вычислить коэффициенты l_{jk}.

3. О силе, действующей на тело. Сила, действующая на тело B в стационарном потоке вязкой жидкости, в безразмерном виде определяется формулой (n — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S)

$$F_j = -\int_S\left[\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \delta_{jk}p\right]n_k d\sigma \quad (j = 1, 2, 3)$$

Известно [13], что выражение для этой силы может быть представлено в виде

$$F_j = \int_\Sigma\left[\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \delta_{jk}p - u_j u_k\right]n_k d\sigma \tag{3.1}$$

Здесь Σ — сфера достаточно большого радиуса R с центром, лежащим внутри B, n — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ. Пользуясь асимптотикой скорости и давления и оценками производных скорости, можно в формуле (3.1) выделить главные члены и оценить остаток.

В работе [9] показано, что $|\partial u_j / \partial x_k| \leqslant CR^{-3/2}[s(x)+1]^{-3/2+\varepsilon}$. Поэтому

$$\left|\int_\Sigma \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) n_k d\sigma\right| \leqslant CR^{-3/2}\int_0^\pi [R(1-\cos\vartheta)+1]^{-3/2+\varepsilon} R^2\sin\vartheta d\vartheta \leqslant CR^{-1/2}$$

Пусть $v = u - u_\infty$. Тогда

$$F = -\int_\Sigma [pn + v(u_\infty\cdot n)]\,d\sigma + O(R^{-1/2}) \tag{3.2}$$

так как

$$\int_\Sigma u_{\infty j}u_{\infty k}n_k d\sigma = 0, \qquad \int_\Sigma u_{\infty j}v_k n_k d\sigma = 0$$

$$\left|\int_\Sigma v_j v_k n_k d\sigma\right| \leqslant C_1\int_0^\pi [R(1-\cos\vartheta)+1]^{-2}\sin\vartheta d\vartheta \leqslant CR^{-1}$$

Из формулы (3.2) следует, что

$$F = -\int_\Sigma (p + u_\infty\cdot v)\,n d\sigma + u_\infty\times\Gamma + O(R^{-1/2}), \qquad \Gamma = \int_\Sigma (n\times v)\,d\sigma \tag{3.3}$$

Второе слагаемое в формуле (3.3) определяет компоненту силы, перпендикулярную направлению набегающего потока, и имеет вид, аналогичный выражению для подъемной силы в теореме Жуковского.

Преобразуем первое слагаемое в (3.3)

$$X = -\int_\Sigma (p + v_1)\,n d\sigma$$

и покажем, что оно дает главный член силы лобового сопротивления. Будем пользоваться интегральными представлениями для скорости и давления (S_x — граница области D_x)

$$v_1 = v_{s1} + V_1, \quad p = p_s + P$$

$$v_{s1} = -\int_S \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} - 2\lambda p n_j\right) H_{1j} d\sigma - \int_S \left(\frac{\partial H_{1k}}{\partial y_1} + \frac{\partial H_{11}}{\partial y_k} + 2\lambda\delta_{1k}q_1\right) n_k d\sigma \tag{3.4}$$

$$p_s = -\int_S \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} - 2\lambda p n_j\right) q_j d\sigma - \int_S \left(\frac{\partial q_1}{\partial n} - \lambda q_1 n_1\right) d\sigma \tag{3.5}$$

$$V_1 = -2\lambda\int_G v_j v_k \frac{\partial H_{1j}}{\partial y_k}\,dy \tag{3.6}$$

$$P = -2\lambda\int_{G\setminus D_x} v_j v_k \frac{\partial q_j}{\partial y_k} dy - \frac{1}{4\pi}\int_{S_x} \frac{v_k}{|x-y|}\frac{\partial v_j}{\partial y_k} n_j d\sigma + \tag{3.7}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{D_x} \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(v_k\frac{\partial v_j}{\partial y_k}\right) dy + 2\int_{S_x} (q\cdot v)(v\cdot n)\,d\sigma$$

$$D_x = \{y : |y - x| \leqslant 1\}$$

Финн показал [8], что для величины (3.7) имеют место оценки:

$$|P(x)| \leqslant \begin{cases} CR^{-2} \text{ (равномерно)} \\ CR^{-2-2\beta} \text{ при } \vartheta \geqslant R^{-1/2+\gamma} \end{cases}$$

если $\beta < \gamma$ (ϑ — угол между вектором x и осью x_1).

Отсюда следует, что (ε — сколь угодно малое положительное число)

$$\int_{\Sigma} Pnd\sigma = O(R^{-1/2+\varepsilon})$$

К. И. Бабенко и автор данной статьи[1] доказали теорему, дающую оценку интеграла типа свертки. Применяя эту теорему к интегралу (3.6), получим

$$|V_1| \leqslant CR^{-3/2}\log^2 R\,[s(x)+1]^{-1}$$

и следовательно

$$\left|\int_{\Sigma} V_1 nd\sigma\right| \leqslant CR^{-1/2+\varepsilon}$$

Таким образом

$$X = -\int_{\Sigma}(p_s + v_{s1})\,nd\sigma + O(R^{-1/2+\varepsilon}) \tag{3.8}$$

Формулы (3.4) и (3.5) можно записать в виде

$$v_{s1}(x) = -\int_S \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} - 2\lambda p n_j\right) H_{1j}d\sigma + O\{R^{-2}[s(x)+1]^{-1}\}$$

$$p_s(x) = -\int_S \left(\frac{\partial v_j}{\partial n} - 2\lambda p n_j\right) q_j d\sigma + O(R^{-3})$$

Если эти выражения подставить в формулу (3.8), то, пользуясь асимптотическими разложениями

$$H_{1j} = \frac{x_j}{8\pi\lambda R^3} - (1-\delta_{1j})\frac{x_j e^{-\lambda s}}{8\pi R^2} - \delta_{1j}\frac{e^{-\lambda s}}{4\pi R}\left(1 + \lambda\,\frac{x_2y_2 + x_3y_3}{R}\right) + $$
$$+ O\{R^{-2}[s(x)+1]^{-1}\}$$

$$q_j = -\frac{x_j}{8\pi\lambda R^3} + O(R^{-3})$$

можно убедиться в том, что $X_2 = O(R^{-1/2+\varepsilon})$, $X_3 = O(R^{-1/2+\varepsilon})$, и следовательно,

$$X = -e_1\int_{\Sigma}(p_s + v_{s1})\,n_1 d\sigma + O(R^{-1/2+\varepsilon})$$

где e_1 — единичный вектор, направленный вдоль оси x_1. Последняя формула показывает, что главный член вектора X при $R \to \infty$ совпадает по направлению со скоростью набегающего потока.

---

[1] См. сноску на стр. 85.

Таким образом, доказывается следующая теорема, которая сформулирована здесь для размерных величин.

Теорема 2. Пусть обтекание тела B с границей S, удовлетворяющей условиям Ляпунова, определяется решением краевой задачи (1.1), (1.2). Тогда лобовое сопротивление определяется по формуле (ρ — плотность жидкости)

$$X = -e_1 \int_{\Sigma} (p + \rho u_\infty \cdot v) n_1 d\sigma + O(R^{-1/2+\varepsilon})$$

а сумма подъемной и боковой сил — по формуле

$$Y = \rho u_\infty \times \Gamma + O(R^{-1/2+\varepsilon}) \tag{3.9}$$

В [13] приведены выражения сил через интегралы по контрольной поверхности. Однако эти формулы даны без строгого доказательства и без оценки остаточного члена. Формула (3.9) в пределе при $R \to \infty$ совпадает с соответствующей формулой в [13].

В заключение автор выражает признательность К. И. Бабенко за руководство работой.

Поступила 16 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 2.
2. *Leray J.* Étude de diverses equations integrales non lineaires et de quelques problemes que pose l'Hydrodynamique. J. math. pures et appl., 1933, vol. 9, No. 12, p. 1—82.
3. *Leray J.* Les problèmes non lineaires. Enseign. math., 1936, vol. 35, p. 139—151.
4. *Ладыженская О. А.* Исследование уравнения Навье — Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости. Успехи матем. наук. 1959, т. 3.
5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
6. *Finn R.* On the steady-state solutions of the Navier — Stokes equations III. Acta Math., 1961, vol. 105, S. 197—244.
7. *Fujita H.* On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier—Stokes equations. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Ser. I, 1961, No. 9, p. 59—102.
8. *Finn R.* Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier — Stokes equations. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., 1959, vol. 3(51), No. 4, p. 387—418.
9. *Бабенко К. И., Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
10. *Filon L. N. G.* Forces on a cylinder. Proc. Roy. Soc. A, 1936, vol. 113.
11. *Imai J.* On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body with special reference to Filon's paradox. Proc. Roy. Soc. A, 1951, vol. 208, No. 1095.
12. *Бабенко К. И.* Об асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
13. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.