

ФОРМИРОВАНИЕ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ЭМИССИИ С НЕНУЛЕВОЙ СКОРОСТЬЮ И НАПРЯЖЕННОСТЬЮ ПОЛЯ

В. Н. Данилов, С. А. Пегов, В. А. Сыровой

(Москва)

В рамках гидродинамической теории плотных пучков заряженных частиц решается задача о формировании трубчатого цилиндрического потока. При эмиссии, ограниченной пространственным зарядом и температурой, построены формирующие электроды, рассчитанные по точному решению и асимптотическим разложениям, равномерно пригодным вблизи границы течения. Обсуждается возможность обобщения предлагаемых алгоритмов на случай криволинейных траекторий.

В гидродинамической теории плотных пучков наибольшее распространение получила модель эмиттера в режиме полного пространственного заряда. При этом для скорости U и поля E на нем принимаются нулевые значения. Эти предположения приводят к вполне определенному виду потенциала φ вблизи стартовой поверхности: в области течения $\varphi \sim z^{4/3}$, а в лапласовской области $\varphi \sim \operatorname{Re} [z + i(R - R_0)]^{4/3}$. В результате получается система пирсовских электродов с характерным начальным наклоном нулевой эквипотенциали к границе пучка в 67.5° вне зависимости от криволинейности эмиттера и распределения плотности тока J на нем.

Вместе с тем в последнее время возрос интерес к триодным пушкам с управляющей сеткой [1-4], пушкам с глубоким торможением потока [5] и пушкам с автоэмиссионным катодом. Эти устройства отличаются более сложной особенностью для потенциала в области малых скоростей, причем эта особенность для одномерного течения между параллельными плоскостями задается следующими параметрическими уравнениями:

$$z = 1/6 Jt^3 + 1/2 Et^2 + Ut, \quad v_z = dz / dt, \quad 2\varphi = v_z^2$$

Удельный заряд $\eta = e / m$ для удобства опускается, что соответствует замене $\eta\varphi \rightarrow \varphi$, $4\eta J \rightarrow J$, $z = 0$, $t = 0$ отвечают эмиттеру.

Для упомянутых выше устройств необходимо рассчитывать формирующие электроды в области, где члены, пропорциональные J , E и U , соизмеримы. В триодной пушке такая ситуация возникает, когда потенциал управляющей сетки отклоняется от естественного, т. е. от значения, вытекающего из закона $3/2$. При этом сетку можно рассматривать как эмиттер с ненулевыми условиями на нем.

Задача о формировании трубчатого цилиндрического пучка привлекала внимание ряда авторов [6-8] до тех пор, пока в [9] не было приведено ее замкнутое решение в интегральной форме. В [6-8] имеются разложения, не учитывающие влияния особенности в режиме полного пространственного заряда и расходящиеся при приближении к эмиттеру.

Ниже при помощи асимптотических разложений решается задача о расчете узких трубчатых пучков с ненулевыми условиями на эмиттере; это же решение позволяет описать и случай глубокого торможения; приводится точное решение задачи о формировании цилиндрического пучка при разных режимах эмиссии; результаты, доставляемые асимптотическими разложениями, сравниваются с точными выражениями.

1. Построение решения в виде асимптотического ряда. Пусть R , z — цилиндрические, а s , l — безразмерные координаты, связанные соотношением

$$R = R_* (1 + \mu s), \quad z = a_* l$$

Здесь R_* — характерный радиус пучка (внутренний или внешний), a_* — характерная ширина полосы, μ — символ, указывающий на то, что s — величина первого порядка малости по сравнению с единицей. В переменных l, s уравнение Лапласа примет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = - \frac{\mu}{1 + \mu s} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

Следует найти решение (1.1), удовлетворяющее по границе $s = 0$ условиям

$$(1.2) \quad \begin{aligned} 2\varphi|_{s=0} &= \Phi(t) = (1/2 J t^2 + E t + U)^2, & \partial \varphi / \partial s|_{s=0} &= 0 \\ l &= 1/6 J t^3 + 1/2 E t^2 + U t \end{aligned}$$

Формулы (1.2) отвечают как эмиссии, ограниченной температурой ($E \neq 0, U = 0$), так и режиму полного пространственного заряда ($E = 0, U = 0$).

Совершим конформное отображение

$$l + is = 1/6 J w^3 + 1/2 E w^2 + U w = F(w)$$

и перепишем уравнение (1.1) в координатах $w = u + iv, \bar{w} = u - iv$ (черта в дальнейшем означает комплексно-сопряженную величину)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{1 + \mu (F - \bar{F}) / 2i} \frac{1}{2i} \left(\bar{F}_w \frac{\partial \varphi}{\partial w} - F_w \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}} \right), \quad F_w = \frac{dF}{dw}$$

Представляя потенциал в виде

$$2\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi \langle n \rangle \mu^n, \quad \varphi_n = \sum_{k=0}^n \varphi \langle k \rangle \mu^k$$

для n -го члена получаем

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi \langle n \rangle}{\partial w \partial \bar{w}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{F - \bar{F}}{2i} \right)^k \frac{1}{2i} \left[\bar{F}_w \frac{\partial \varphi \langle n - k - 1 \rangle}{\partial w} - \right. \\ &\left. - F_w \frac{\partial \varphi \langle n - k - 1 \rangle}{\partial \bar{w}} \right] = f_n(w, \bar{w}) \end{aligned}$$

Решение задачи (1.1), (1.2) задается теперь формулами

$$(1.4) \quad \varphi \langle 0 \rangle = \frac{1}{2} (\Phi + \bar{\Phi}), \quad \varphi \langle n \rangle = \int_{\frac{w}{\bar{w}}}^w dx \int_x^{\bar{w}} f_n(x, y) dy$$

Ниже приведены несколько первых членов разложения, вычисленных при помощи (1.3), (1.4)

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \varphi \langle 0 \rangle &= \text{Re} [1/4 J^2 w^4 + J E w^3 + (E^2 + J U) w^2 + 2 E U w] \\ \varphi \langle 1 \rangle &= -1/12 \text{Im} [1/56 J^3 w^7 (1 - 7 \Psi^3) + 1/8 J^2 E w^6 (1 - 3 \Psi^2) + \\ &+ 1/5 J E^2 w^5 (1 - 5 \Psi^2) + 7/20 J^2 U w^5 (1 + 10/7 \Psi^2 + 15/7 \Psi^4) + \\ &+ J E U w^4 (1 + 2 \Psi^3) + J U^2 w^3 (1 + 3 \Psi^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\langle 2 \rangle = & -\frac{1}{64} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{168} J^4 w^{10} (1 - 8\Psi^3 - 7\Psi^4) + \frac{5}{84} J^3 E w^9 (1 - \right. \\ & - \frac{12}{5} \Psi^2 - \frac{14}{15} \Psi^3 + \frac{21}{5} \Psi^4) + \frac{23}{120} J^2 E^2 w^8 (1 - \frac{100}{23} \Psi^2 + \\ & + \frac{32}{23} \Psi^3 + \frac{45}{23} \Psi^4) + \frac{1}{5} J E^3 w^7 (1 - 6\Psi^2 + 5\Psi^3) + \\ & + \frac{103}{2520} J^3 U w^8 (1 - \frac{180}{103} \Psi + \frac{280}{103} \Psi^2 - \frac{1148}{103} \Psi^3 + \\ & + \frac{945}{103} \Psi^4) + \frac{203}{40} J^2 E U w^7 (1 - \frac{220}{261} \Psi - \frac{28}{29} \Psi^2 + \frac{140}{261} \Psi^3) + \\ & + \frac{56}{15} J E^2 U w^6 (1 - \frac{17}{7} \Psi + \frac{5}{7} \Psi^2 + \frac{5}{7} \Psi^3) + \frac{31}{45} J^2 U^2 w^6 (1 - \\ & - \frac{96}{31} \Psi + \frac{105}{31} \Psi^2 - \frac{40}{31} \Psi^3) - \frac{2}{3} E^3 U w^5 (1 - 3\Psi + 2\Psi^2) + \\ & \left. + 2 J E U^2 w^5 (1 - 3\Psi + 2\Psi^2) + \frac{4}{3} J U^3 w^4 (1 - 4\Psi + 3\Psi^2) \right] \\ \Psi = & \bar{w} / w \end{aligned}$$

Видно, что $\varphi\langle 0 \rangle$ воспроизводит электроды, получающиеся вращением вокруг z эквипотенциальных кривых плоской задачи, а последующие при приближения дают поправки, обусловленные осемимметричностью.

2. Точное решение задачи о формировании цилиндрического пучка. Выше упоминалось, что решение этой проблемы в интегральной форме приведено в [9]. Удобнее, однако, выразить функцию Римана G не через эллиптический интеграл, а через гипергеометрическую функцию

$$(2.1) \quad G = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right), \quad \lambda = -[(R - R_c)^2 + (z - z_c)^2] / 4RR_c$$

и воспользоваться формулой для потенциала, вытекающей из такого представления, при условиях Коши, задаваемых параметрическими выражениями (1.2). Здесь R_c, z_c — координаты точки наблюдения, в которой вычисляется значение потенциала. В дальнейшем при аналитическом продолжении условий Коши происходят следующие замены:

$$R \rightarrow R_e, \quad z \rightarrow z_e, \quad R_c \rightarrow R, \quad z_c \rightarrow z$$

Параметрические уравнения цилиндрической границы имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} R_e = 1, \quad z_e = & \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} \gamma t^2 + \delta t, \quad \gamma = E / J, \quad \delta = U / J \\ \alpha = dR_e / dt = & 0, \quad \beta = dz_e / dt = \frac{1}{2} t^2 + \gamma t + \delta \\ \varphi|_{R=1} = \Phi(t) = & (\frac{1}{2} t^2 + \gamma t + \delta)^2 \end{aligned}$$

Выражения (2.2) записаны в безразмерных переменных, смысл которых легко следует из (1.2) и в которых будет вестись дальнейшее рассмотрение и сравнение с асимптотическими рядами.

Окончательно для потенциала получаем

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 2\varphi(u, v) = & \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \left\{ \Phi(w) + \frac{1}{2} \int_0^v \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{R^2 - 1 + [z_e(\zeta) - z]^2}{8R} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e\right) \right] \Phi^{3/2}(\zeta) d\zeta \right\} \\ \lambda_e = & -\frac{(1 - R)^2 + [z_e(\zeta) - z]^2}{4R}, \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi \end{aligned}$$

При большом удалении от границы может оказаться более полезным другое представление гипергеометрических функций

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e\right) &= (1 - \lambda_e)^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, \Lambda_e\right) \\
 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e\right) &= (1 - \lambda_e)^{-3/2} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; \Lambda_e\right) \\
 \Lambda_e = \lambda_e / (\lambda_e - 1) &= [(1 - R)^2 + (z_e - z)^2] / [(1 + R)^2 + (z_e - z)^2]
 \end{aligned}$$

и соответствующее ему выражение для потенциала

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad 2\varphi(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R}} \Phi(w) + \int_0^v \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \Lambda_e\right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{R^2 - 1 + (z_e - z)^2}{(1 + R)^2 + (z_e - z)^2} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; \Lambda_e\right) \right] \frac{\Phi^{3/2}(\xi) d\xi}{[(1 + R)^2 + (z_e - z)^2]^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

Если в гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$ модуль z превышает единицу или близок к ней, то необходимо воспользоваться формулами аналитического продолжения, приведенными в [10].

Построение эквипотенциалей $v = v(u, \varphi)$ сводилось к нахождению корня уравнения (2.3) или (2.4) при фиксированных значениях u и φ . Переход к R, z осуществлялся по формулам

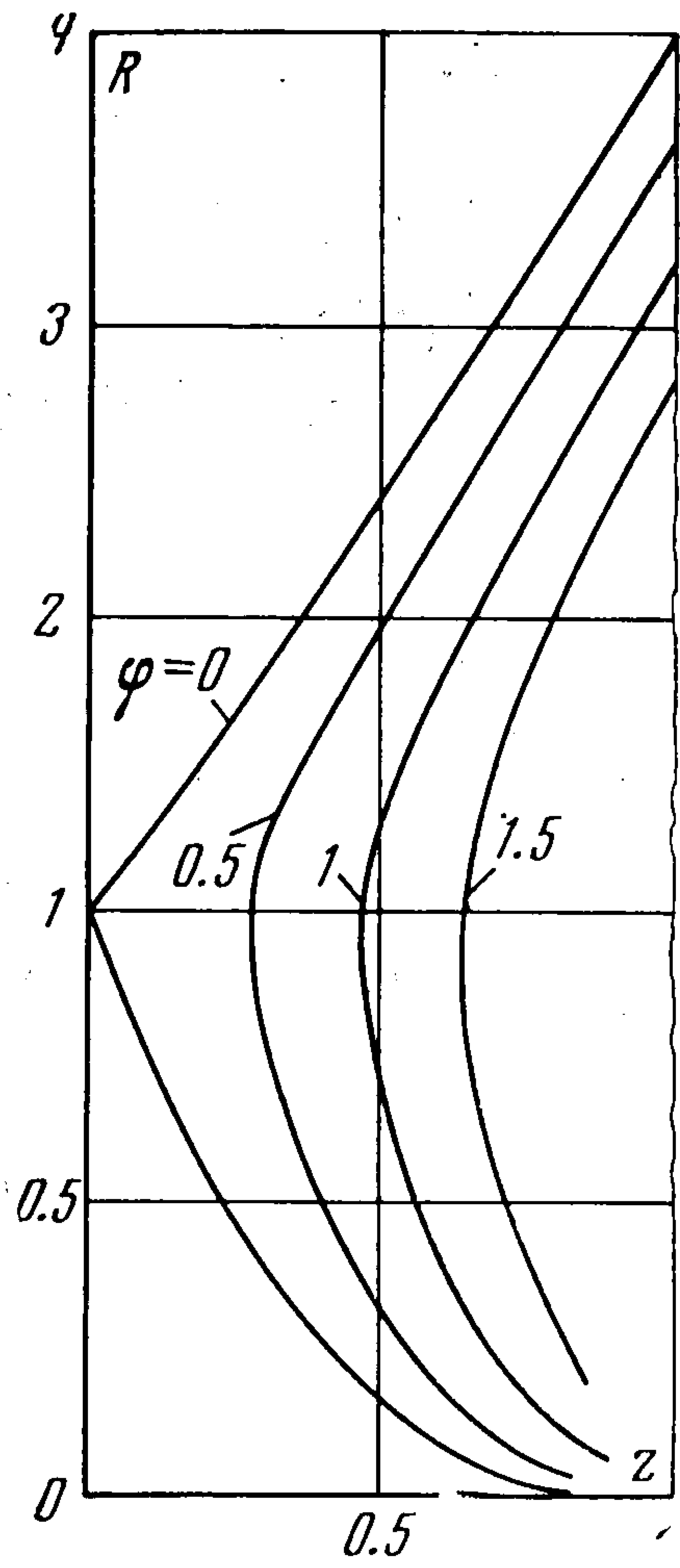
$$(2.5) \quad z + i(R - 1) = 1/6 w^3 + 1/2 \gamma w^2 + \delta w$$

При решении уравнений (2.3), (2.4) полезно представлять себе картину поверхностей $v = v(u, \varphi)$, качественное поведение которых в меридиональной плоскости известно [7, 11]. В (R, z) представляет интерес часть первого квадранта, в которой $\varphi \geq 0$. Так как $R = 1$ переводится отображением (2.5) в $v = 0$, то достаточно проследить за лучом $z = 0, R \geq 0$. При $\delta \neq 0$ вблизи начала координат картина эквипотенциальных кривых мало меняется, в то время как при очень больших $|w|$ главным членом в (2.5) является кубический, уменьшающий углы в три раза. При $\delta = 0, \gamma \neq 0$ и малых $|w|$ углы сокращаются вдвое, а в дальнейшем наклон подвергается преобразованию луча еще более уменьшается.

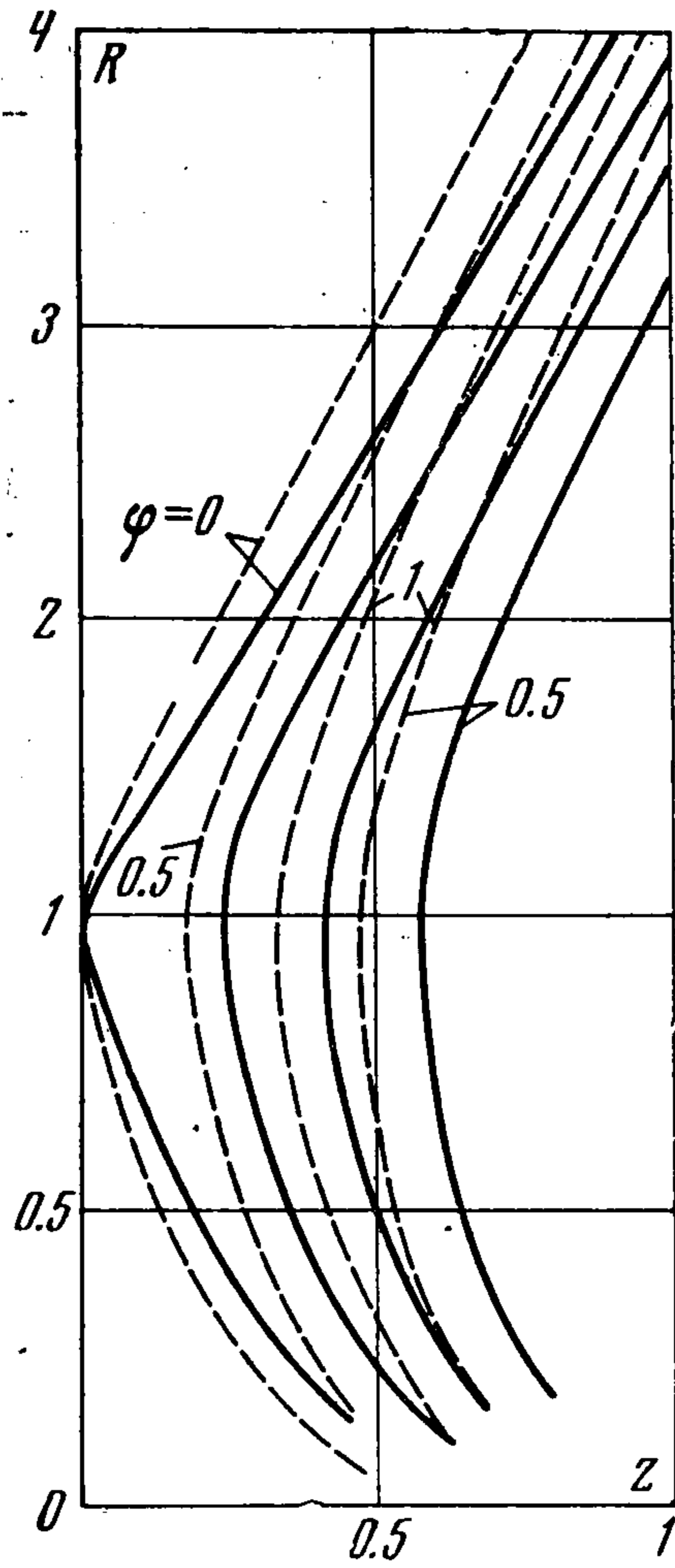
На фиг. 1 представлены кривые $\varphi = \text{const}$ для случая полного пространственного заряда ($\gamma = 0$), на фиг. 2 — при эмиссии, ограниченной температурой ($\gamma = 0.5$ — сплошные кривые и $\gamma = 1$ — пунктир). Видно, что увеличение γ приводит к сжатию картины эквипотенциальных поверхностей. Фиг. 3 иллюстрирует поведение кривых $\varphi = \text{const}$ при немонотонном поведении потенциала для $\varphi_{\min} = 1/5$ (сплошные линии) и $\varphi_{\min} = 4/5$ (пунктир).

3. Обсуждение результатов. Точное решение задачи о формировании трубчатого пучка позволяет установить область применимости асимптотических разложений. На фиг. 4 приведены для сравнения кривые $\varphi = 0$, полученные на основании (2.3), (2.4) и асимптотических рядов при $\gamma = 0$.

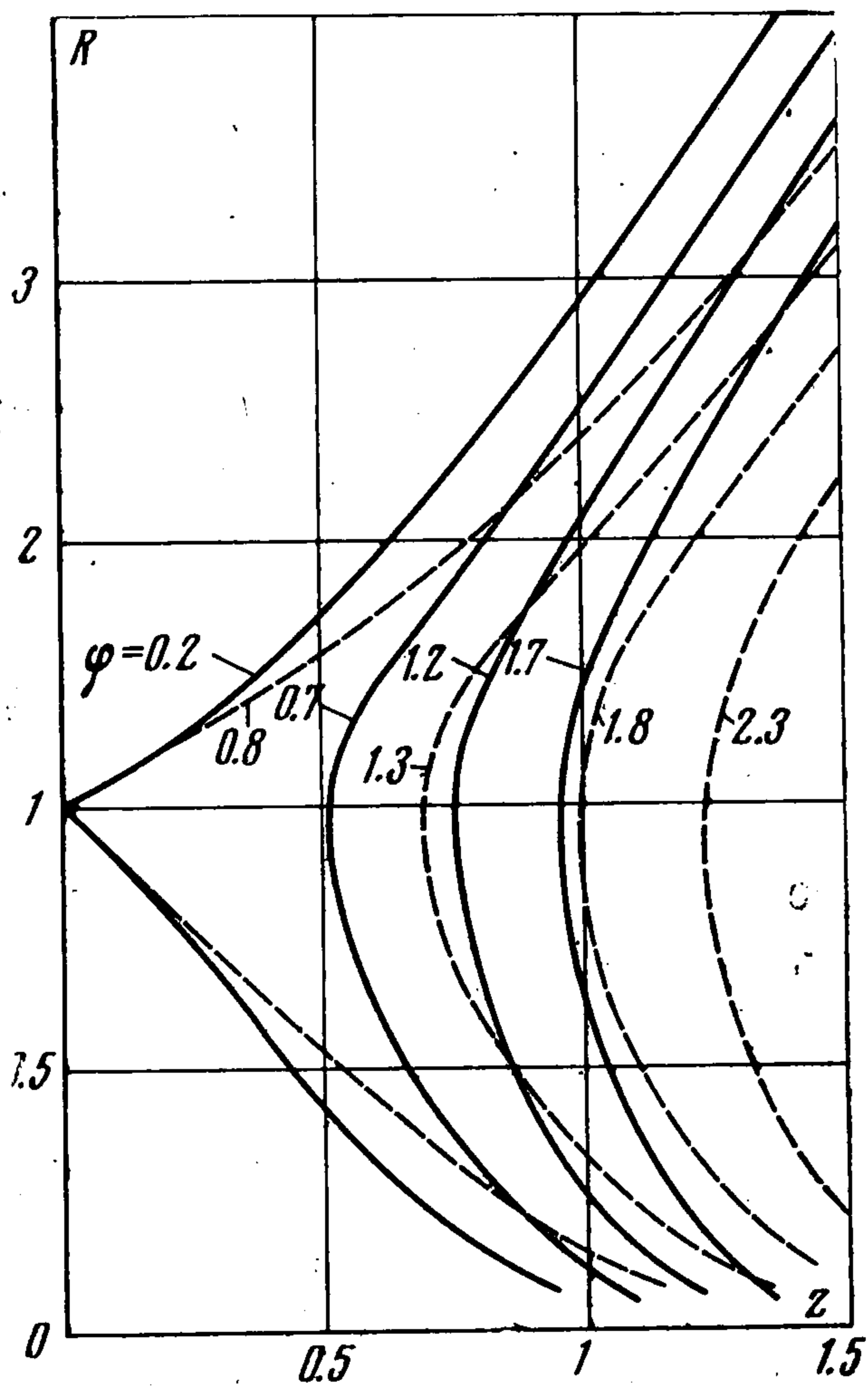
При $R > 1$ стремление φ_n к точному решению по приближениям носит осцилляционный характер. Заметим, что ряд для $1/R$, используемый при построении асимптотических разложений, расходится при $R \geq 2$. Начиная с $R = 2.3$, $\varphi < 3$ вносит значительную ошибку и вскоре становится вообще непригодным. Для $R < 1$ имеет место монотонное стремление к точной кривой, причем отличие в координатах нулевой эквипотенциали



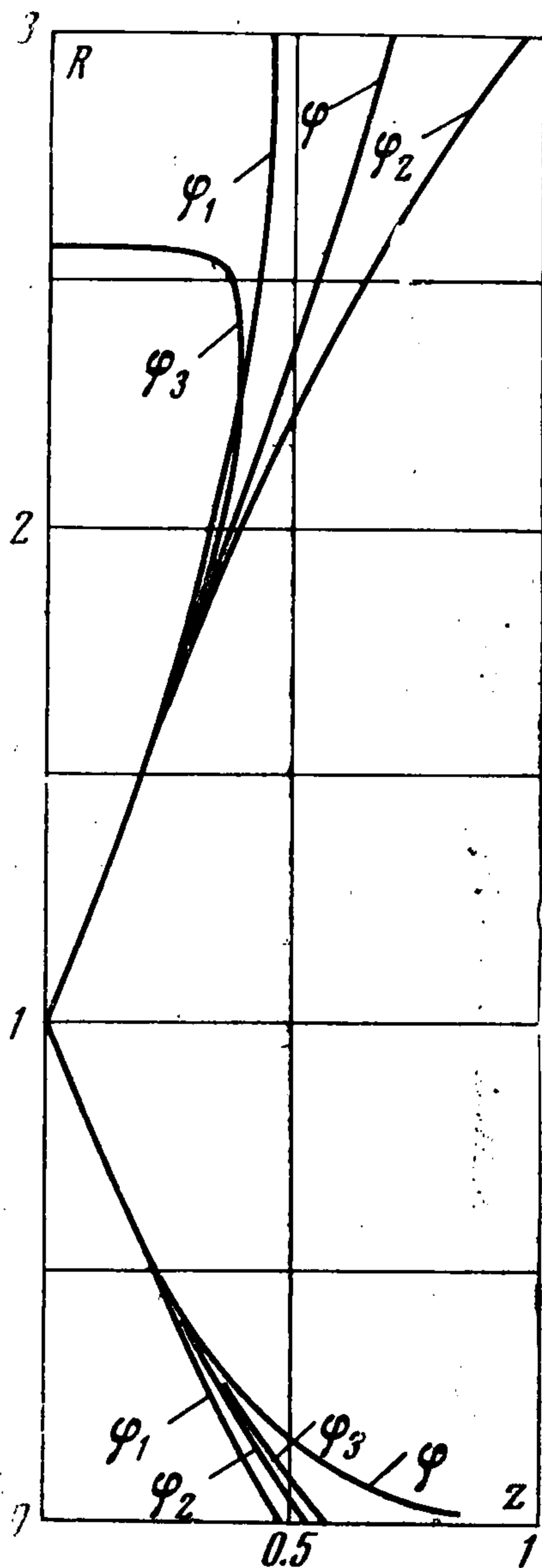
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

становится заметным при $R < 0.2$ (7% для φ_3 и 15% для φ_2 при $R = 0.1$). Для формирующих электродов с $\varphi \neq 0$, а также при $\gamma \neq 0$ приближенное решение ведет себя аналогичным образом как в качественном, так и в количественном отношении. Интересно отметить, что при $\gamma = 0 \div 10$ кривые, вычисленные на основании φ_1, φ_2 по формуле

$$z = 1/7 [4f_1(R, \varphi) + 3f_2(R, \varphi)], \quad R \geq 1$$

практически не отличаются от семейства $\varphi = \text{const}$, задаваемого формулами (2.3), (2.4). Здесь $z = f_1(R, \varphi)$, $z = f_2(R, \varphi)$ — эквипотенциали в первом и втором приближениях.

Таким образом, асимптотические разложения могут быть успешно использованы не только для расчета пушек с тонкостенным трубчатым пучком, но и для сплошных потоков.

В криволинейных пучках вблизи эмиттера (и коллектора в случае глубокого торможения) структура особенности будет такой же, как и при течении с прямолинейными линиями тока. В параксиальном приближении разложение для потенциала в координатах, связанных с траекториями, представимо в виде произведения квадрата скорости на оси V , содержащей всю особенность, на регулярную функцию в виде ряда по степеням расстояния от оси пучка [12]. При рассмотрении внешней задачи для пушки с криволинейным трубчатым пучком достаточно определить зависимости $z(t)$, $V(t)$ и решить уравнение Лапласа при более общих условиях Коши на поверхности течения, используя описанный выше способ построения асимптотического ряда.

Поступила 23 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolkstein H. J.* Design considerations for grid-controlled electron guns for pulsed travelling-wave tubes. R.C.A. Rev., 1960, vol. 21, No. 3.
2. *Gallagher H. E.* Gridded electron guns for high average power. Trans. IRE, 1962, vol. ED-9, No. 2.
3. *Жаркова Г. И., Медовников В. С.* Триодная пушка с «левой» анодно-сеточной характеристикой. Электронная техника, сер. 1. Электроника СВЧ, 1970, вып. 7.
4. *Хотяинцев С. Н., Дереновский М. В., Дьяченко С. М., Тараненко В. П.* Мощные электронные пушки с управляющими электродами. Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1971, т. 14, № 9.
5. *Гулина Н. П., Ильин В. П., Нецадин В. М., Переводчиков В. И., Шапенко В. Н.* Решение задачи торможения криволинейного электронного пучка с большим пространственным зарядом. Тезисы докл. 4 Всес. семинара по методам решения задач электронной оптики. Новосибирск, Сиб. отд. ВЦ АН СССР, 1971.
6. *Harrison E. R.* Approximate electrode shapes for cylindrical electron beam. Brit. J. Appl. Phys., 1954, vol. 5, No. 1.
7. *Daykin P. N.* Electrode shapes for cylindrical electron beam. Brit. J. Appl. Phys., 1955, vol. 6, No. 7.
8. *Radley D. E.* The theory of the Pierce type electron gun. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
9. *Harker K. J.* Solution of the Cauchy problem for Laplace's equation in axially symmetric systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.
10. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
11. *Сыровой В. А.* Решение задачи Пирса для ленточного пучка при произвольных условиях эмиссии. ПМТФ, 1964, № 2.
12. *Данилов В. Н., Сыровой В. А.* Приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа применительно к проблеме формирования плотных пространственно неоднородных пучков заряженных частиц. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.