

## ДИНАМИКА АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ С РОТОРОМ ТИПА БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКИ

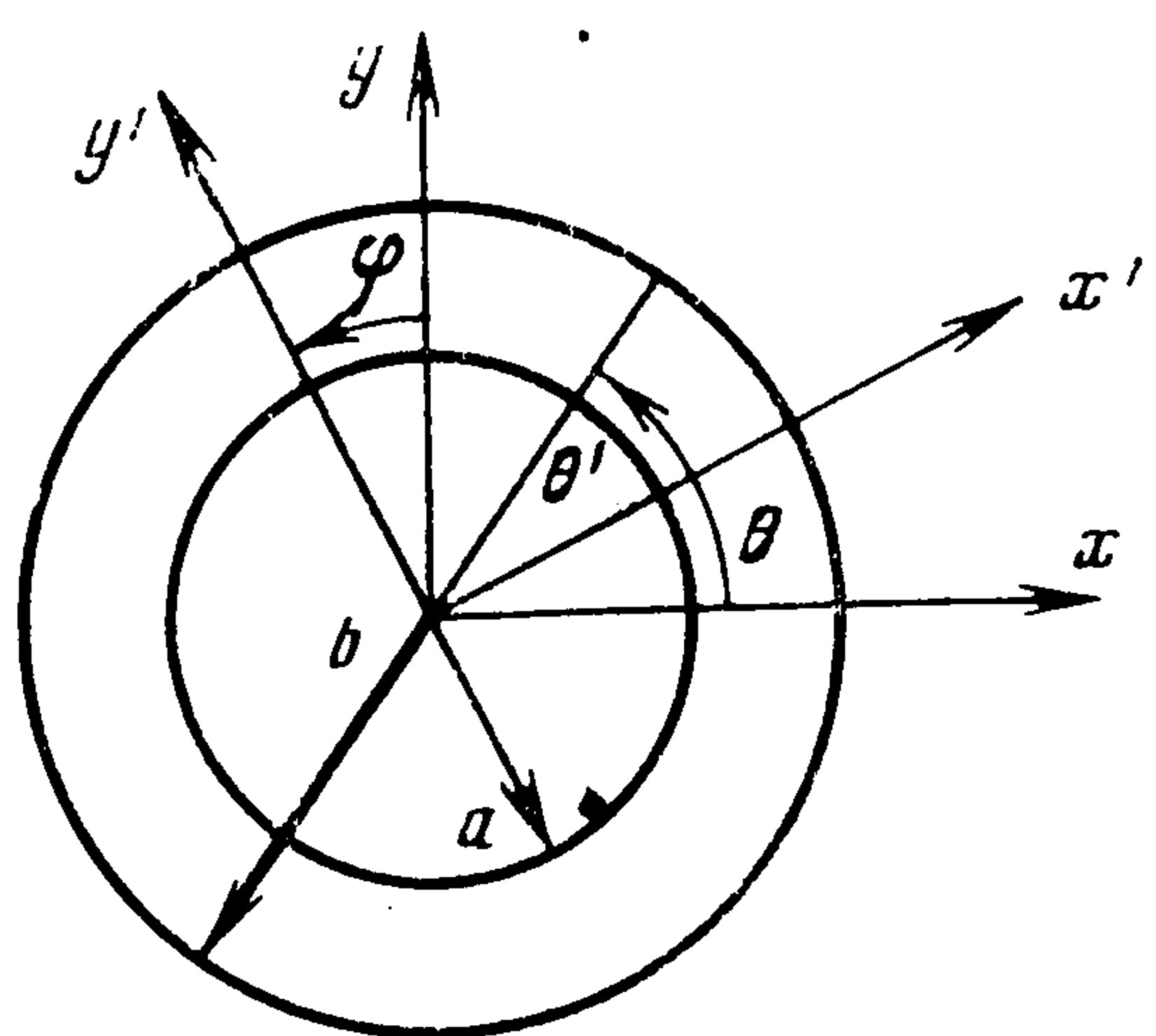
Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

При помощи известного в аналитической механике метода наложения идеальных связей составляются уравнения движения модели асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки и исследуется динамика этой машины в случае, когда постоянная времени механического движения много больше постоянной времени электрических процессов. Дается обоснование идеальности накладываемых связей и показывается, что с точки зрения динамики ротор типа беличьей клетки эквивалентен двум ортогональным синусоидальным обмоткам, как полагает Г. Крон, лишь в случае, когда статорные обмотки имеют синусоидальное распределение витков.

Несмотря на значительное развитие теории электрических машин с вращающимся ротором, рассматривающей эти машины как электромеханические системы, бесколлекторные машины со сплошным ротором или с ротором типа беличьей клетки оказались не охваченными этой теорией [1]. Единственное известное авторам теоретическое рассмотрение основывается на предположении Г. Крона [2] считать ротор типа беличьей клетки эквивалентным двум ортогональным синусоидальным обмоткам. Однако это предположение Г. Крона до сих пор не обосновано.

**1. Вспомогательная модель электрической машины.** При выводе уравнений движения асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки будем исходить из вспомогательной модели, предложенной А. В. Гапоновым [3]. Эта модель состоит из двух полых соосных цилиндров радиусов  $a$



Фиг. 1

и  $b$  с тонкими проводящими стенками. Внешний цилиндр (статор) неподвижен, внутренний цилиндр (ротор) может вращаться относительно общей оси  $O$  (фиг. 1). Предполагается, что оба цилиндра обладают анизотропией проводимости, т. е. токи статора и ротора текут вдоль образующих цилиндров, а длина цилиндров такова, что краевыми эффектами на торцах можно пренебречь. Пусть полный ток в сечении каждого из цилиндров равен нулю.

Плотности токов в роторе  $j_p$  и статоре  $j_c$  можно выразить в виде рядов [4]

$$(1.1) \quad j_p = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \cdot \cos k\theta' + \kappa_k \cdot \sin k\theta', \quad j_c = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \cdot \cos k\theta + \kappa_k \cdot \sin k\theta$$

Здесь угол  $\theta$  отсчитывается в неподвижной системе координат, а угол  $\theta'$  — во вращающейся системе координат, связанной с ротором. При таком

дискретном описании токов величины

$$\kappa_{1k}, \kappa_{2k}, \kappa_{3k}, \kappa_{4k}$$

являются обобщенными координатами. Функция Лагранжа вспомогательной модели имеет вид

$$(1.2) \quad L_* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{L_k (\kappa_{1k}^2 + \kappa_{2k}^2 + \kappa_{3k}^2 + \kappa_{4k}^2 + 2M [( \kappa_{1k} \cos k\varphi - \kappa_{2k} \sin k\varphi) \kappa_{3k} + (\kappa_{1k} \sin k\varphi + \kappa_{2k} \cos k\varphi) \kappa_{4k}]\} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

Здесь  $I$  — момент инерции ротора,  $L_k, M_k$  — коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции, где

$$L_k = 2 \left( \frac{\pi}{c} \right)^2 \frac{\mu}{k}, \quad M_k = 2 \left( \frac{\pi}{c} \right)^2 \left( \frac{a}{b} \right)^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Обобщенные силы определяются из выражения виртуальной работы

$$(1.3) \quad \delta A = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^2 (E_{ik} - R_{1i} \kappa_{ik}) \delta \kappa_{ik} + \sum_{j=3}^4 (E_{jk} - R_{2j} \kappa_{jk}) \delta \kappa_{jk} \right] + K(\varphi) \delta \varphi = \sum_{l=1}^{\infty} Q_l \delta q_l$$

Сопровиления ротора  $R_{rk}^p$  и статора  $R_{rk}^c$  вычисляются по формулам

$$R_{rk}^p = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_1 \cos r\theta'} \frac{\sin k\theta'}{\cos} d\theta', \quad R_{rk}^c = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_2 \cos r\theta} \frac{\sin k\theta}{\cos} d\theta$$

Уравнения движения вспомогательной модели записываются в форме уравнений Лагранжа — Максвелла

$$(1.4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L_*}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

при составлении которых используются выражения (1.2) и (1.3).

**2. Асинхронная машина с синусоидальными обмотками на статоре.** Перейдем к рассмотрению модели асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки, которая получается из вспомогательной модели путем наложения идеальных связей. Осуществление этих связей, накладывающих ограничение на токи вспомогательной модели, предполагает наличие каких-то дополнительных эдс, которые по аналогии с классической механикой будем называть обобщенными силами реакции связей. Как будет видно из дальнейшего, в рассматриваемом случае связи оказываются идеальными в силу того, что при наложении связей обращаются в нуль некоторые токи  $q_i$ , описывающие состояние системы. При этом виртуальная работа дополнительных эдс (сил реакции связей) обращается в нуль, потому что на участках приложения этих эдс выполняются соотношения  $\delta q_i = 0$  (ситуация, аналогичная случаю качения твердого тела без проскальзывания). Как будет показано, именно этот случай имеет место при

переходе от вспомогательной модели электрической машины к модели асинхронной машины.

Ради определенности рассмотрим две модели асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки: в первой модели статор содержит обмотки с синусоидальным распределением витков, во второй модели витки обмоток распределены по статору равномерно.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда на статоре имеются две обмотки с синусоидальным распределением витков. Как известно, для создания вращающегося магнитного поля достаточно магнитные оси этих обмоток расположить под прямым углом и приложить к обмоткам эдс, сдвинутые по фазе на  $\pi / 2$ . Пусть витки первой обмотки распределены вдоль окружности статора по закону  $\varepsilon |\cos \theta|$ , а витки второй обмотки — по закону  $\varepsilon |\sin \theta|$ . Если на единицу площади поперечного сечения каждой обмотки приходится  $m$  проводников с током  $q_1^{\cdot}$  (в первой обмотке) и  $q_2^{\cdot}$  (во второй обмотке), то суммарная плотность тока в статорных обмотках равна

$$j_c(\theta) = \varepsilon m (q_1^{\cdot} \cos \theta + q_2^{\cdot} \sin \theta)$$

Сравнение этого выражения с (1.1) показывает, что в рассматриваемом случае модель асинхронной электрической машины получается из вспомогательной модели путем наложения связей

$$\kappa_{k3}^{\cdot} = \kappa_{k4}^{\cdot} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Для осуществления этих связей достаточно в контуры вспомогательной модели, в которых протекали токи

$$\kappa_{k3}^{\cdot}, \kappa_{k4}^{\cdot} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

включить дополнительные эдс такой величины и направления, чтобы результирующий ток в этих контурах обратился в нуль. Согласно предыдущему, виртуальная работа дополнительных эдс равна нулю, поэтому накладываемые связи идеальные.

Функция Лагранжа (1.2) принимает вид

$$L_* = \frac{1}{2} L (q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}) + M (\kappa_{11}^{\cdot} \cos \varphi - \kappa_{12}^{\cdot} \sin \varphi) q_1^{\cdot} + \\ + (\kappa_{11}^{\cdot} \sin \varphi + \kappa_{12}^{\cdot} \cos \varphi) q_2^{\cdot} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} L_k (\kappa_{k1}^{\cdot 2} + \kappa_{k2}^{\cdot 2}) + \frac{1}{2} I \varphi^2$$

Здесь введены обозначения

$$\kappa_{13}^{\cdot} = \beta q_1^{\cdot}, \quad \kappa_{14}^{\cdot} = \beta q_2^{\cdot}, \quad L = L_1 \beta^2 = 2\mu \beta^2 (\pi / c)^2 \\ M = \beta M_1 = 2\alpha \mu (\pi / c)^2, \quad \alpha = m a \varepsilon, \quad \beta = m b \varepsilon$$

Обозначим величину омического сопротивления каждой из обмоток статора через  $R$  и введем обобщенные силы при помощи выражений

$$Q_{q_1} = (E + e) \cos \omega_1 t - R q_1^{\cdot}, \quad Q_{q_2} = E \sin (\omega_1 + \psi) - R q_2^{\cdot} \\ Q_{\kappa_{k1}^{\cdot}} = -R \kappa_{k1}^{\cdot}, \quad Q_{\kappa_{k2}^{\cdot}} = -R \kappa_{k2}^{\cdot} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad Q_{\varphi} = K(\varphi^{\cdot})$$

где ради общности предполагается, что приложенные к обмоткам статора ЭДС отличаются одна от другой по амплитуде на величину  $e$  и имеют дополнительный сдвиг фаз на величину  $\psi$ .

Уравнения движения рассматриваемой модели асинхронной машины имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Lq_1'' + M \frac{d}{dt} (\kappa_1' \cos \varphi - \kappa_2' \sin \varphi) + Rq_1' &= (E + e) \cos \omega_1 t \\ Lq_2'' + M \frac{d}{dt} (\kappa_1' \sin \varphi + \kappa_2' \cos \varphi) + Rq_2' &= E \sin (\omega_1 t + \psi) \\ L_1 \kappa_1'' + M \frac{d}{dt} (q_1' \cos \varphi + q_2' \sin \varphi) + R_1 \kappa_1' &= 0 \\ L_1 \kappa_2'' + M \frac{d}{dt} (-q_1' \sin \varphi + q_2' \cos \varphi) + R_1 \kappa_2' &= 0 \\ L_k \kappa_k'' + R_1 \kappa_k' = 0, \quad L_k \kappa_k'' + R_1 \kappa_k' = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \\ I\varphi'' + M [q_1' (\kappa_1' \sin \varphi + \kappa_2' \cos \varphi) - q_2' (\kappa_1' \cos \varphi - \kappa_2' \sin \varphi)] &= K(\varphi') \end{aligned}$$

Поскольку переменные

$$\kappa_k \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

отделились и затухают со временем, уравнения для этих переменных можно опустить.

В безразмерных комплексных переменных

$$\zeta = \frac{\omega_1 L}{E} (q_1' + q_2'), \quad \zeta_1 = \frac{\omega_1 L}{E} [\kappa_1' \cos \varphi - \kappa_2' \sin \varphi + i (\kappa_1' \sin \varphi + \kappa_2' \cos \varphi)]$$

динамика рассматриваемой модели описывается системой дифференциальных уравнений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} + \rho\zeta + \mu \frac{d\zeta_1}{d\tau} &= e^{i\tau} + \sigma e^{-i\tau} \\ \frac{d\zeta_1}{d\tau} + \rho_1 \zeta_1 - i\xi \zeta_1 + \mu_1 \frac{d\zeta}{d\tau} - i\mu_1 \xi \zeta &= 0 \\ \frac{d\xi}{d\tau} + M_0 \operatorname{Im}(\zeta^* \zeta_1) &= K_0(\xi) \\ [\tau = \omega_1 t, \xi = \varphi' \omega_1^{-1}, \sigma = 2E^{-1}(e + i\psi E)] \end{aligned}$$

Здесь использованы неравенства  $e \ll E$ ,  $\psi \ll 1$ . Безразмерные параметры в уравнениях (2.2) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{M}{L}, \quad \mu_1 = \frac{M}{L_1}, \quad \rho = \frac{R}{\omega_1 L}, \quad \rho_1 = \frac{R_1}{\omega_1 L_1}, \\ M_0 &= \frac{ME^2}{IL\omega_1^4}, \quad K_0 = \frac{K}{I\omega_1^2} \end{aligned}$$

Заметим, что из уравнений (2.1) нетрудно получить уравнения однофазной асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки. Эти урав-

нения имеют вид

$$\begin{aligned} Lq_1'' + Rq_1' + M\pi_1'' &= E \cos \omega_1 t, & L_1\pi_1'' + L_1\varphi'\pi_2' + Mq_1'' + R_1\pi_1' &= 0 \\ I\varphi'' + Mq_1'\pi_2' &= K(\varphi), & L_1\pi_2'' - L_1\varphi'\pi_1' - Mq_1'\varphi' + R_1\pi_2' &= 0 \\ (\pi_1' &= \kappa_1' \cos \varphi - \kappa_1' \sin \varphi, & \pi_2' &= \kappa_1' \sin \varphi + \kappa_1' \cos \varphi) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь модель асинхронной машины с тремя синусоидальными обмотками на статоре, магнитные оси которых составляют между собою углы в  $120^\circ$ . Если  $m$  — число квазилинейных проводников на единицу площади поперечного сечения обмотки статора,  $\varepsilon$  — максимальная толщина одной обмотки, тогда поверхностная плотность  $j_c$  тока на статоре определяется выражением

$$j_c = m\varepsilon \left[ q_1' \cos \theta + q_2' \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + q_3' \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

где  $q_1'$ ,  $q_2'$ ,  $q_3'$  — токи в соответствующих обмотках. Вместо токов  $q_2'$ ,  $q_3'$  введем  $q_x'$ ,  $q_y'$  посредством соотношений

$$q_2' = q_1' - q_x' + 1/\sqrt{3} q_y', \quad q_3' = q_1' - q_x' - 1/\sqrt{3} q_y'$$

Тогда предыдущее выражение можно записать в виде

$$j_c = m\varepsilon [ q_x' \cos \theta + q_y' \sin \theta ]$$

Сравнивая его с (1.1) находим

$$\kappa_3' = \beta q_x', \quad \kappa_4' = \beta q_y', \quad \kappa_k' = \kappa_k' = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Отсюда следует, что и в рассматриваемом случае связи идеальные. Функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L_* &= \frac{1}{2} L (q_x'^2 + q_y'^2) + M [ (\kappa_1' \cos \varphi - \kappa_1' \sin \varphi) q_x' + \\ &+ (\kappa_1' \sin \varphi + \kappa_1' \cos \varphi) q_y' ] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} L_k (\kappa_k'^2 + \kappa_k'^2) + \frac{1}{2} I\varphi'^2 \end{aligned}$$

Для нахождения обобщенных сил составим выражение виртуальной работы

$$\begin{aligned} \delta A &= (E \cos \omega_1 t - Rq_1') \delta q_1 + \left[ E \cos \left( \omega_1 t - \frac{2\pi}{3} \right) - Rq_2' \right] \delta q_2 + \\ &+ \left[ E \cos \left( \omega_1 t + \frac{2\pi}{3} \right) - Rq_3' \right] \delta q_3 + K(\varphi') \delta \varphi \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q_{q_1} &= R(2q_x' - 3q_1'), & Q_y &= K(\varphi') \\ Q_{q_2} &= E \cos \omega_1 t + 2R(q_1' - q_2'), & Q_{q_y} &= E \sin \omega_1 t - 2/3 Rq_y' \end{aligned}$$

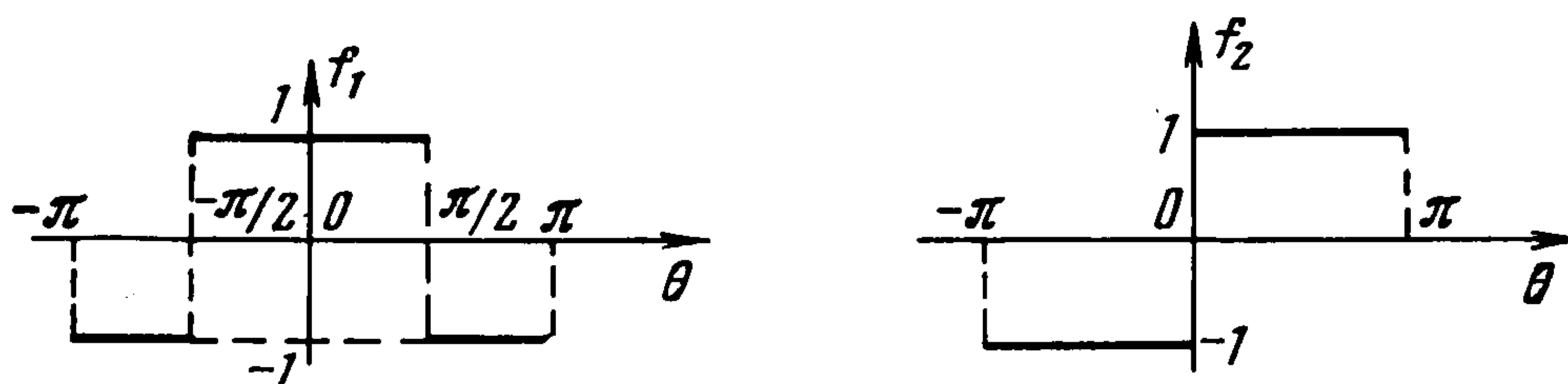
Функция  $L_*$  не зависит от координаты  $q_1'$  и ее производной по времени, поэтому уравнение Лагранжа (1.4) для этой координаты вырождается в связь  $q_1' = 2/3 q_x'$ , которая по известной функции  $q_x'$  позволяет определить  $q_1'$ .

Уравнения движения рассматриваемой модели асинхронной машины имеют вид, аналогичный (2.1) при  $e = \psi = 0$  и замене  $q_1, q_2$  на  $q_x, q_y$ , а  $R$  — на  $\frac{2}{3}R$ . Следовательно, динамика асинхронной машины с тремя синусоидальными обмотками на статоре не отличается от динамики асинхронной машины с двумя синусоидальными обмотками на статоре.

Этот результат обобщается на произвольное число обмоток на статоре с синусоидальным распределением витков. Отсюда можно сделать вывод при наличии синусоидальных обмоток на статоре и соответствующих эдс, необходимых для создания вращающегося магнитного поля, асинхронная электрическая машина с ротором типа беличьей клетки эквивалентна по своей динамике модели, ротор которой содержит всего две замкнутых синусоидальных обмотки с ортогональными магнитными осями. Таким образом, для асинхронной электрической машины с синусоидальными обмотками на статоре гипотеза Г. Крона [2] подтверждается.

### 3. Асинхронная машина с равномерной обмоткой на статоре.

Пусть на статоре асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки находятся две ортогональные обмотки с равномерным распределением



Фиг. 2

витков по окружности. Плотность тока на статоре можно представить в виде

$$j_c = m\varepsilon [q_1 \cdot f_1(\theta) + q_2 \cdot f_2(\theta)]$$

Здесь  $\varepsilon$  — толщина одной обмотки,  $m$  — число проводников, приходящихся на единицу площади поперечного сечения статорной обмотки, а функции  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$  имеют вид, показанный на фиг. 2. Тогда

$$f_1(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} k^{-1} (-1)^{(k-1)/2} \cos k\theta, \quad f_2(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} k^{-1} \sin k\theta$$

Сравнивая выражение для  $j_c$  с (1.1), получаем соотношения

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \kappa_k^{\cdot} &= 4\beta (-1)^{(k-1)/2} q_1^{\cdot}, & \kappa_k^{\cdot} &= \frac{4\beta}{k\pi} q_2^{\cdot} \quad (k = 1, 3, \dots) \\ \kappa_{2n}^{\cdot} &= \kappa_{2n}^{\cdot} = 0 & & (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Последние соотношения в (3.1) представляют, согласно предыдущему, уравнения идеальных связей. Покажем, что и остальные соотношения (3.1) являются уравнениями идеальных связей. Для этого рассмотрим, например, счетное множество второй группы уравнений (3.1). Они отражают наличие связей между токами

$$\kappa_k^{\cdot} \quad (k = 1, 3, \dots)$$

а именно

$$(3.2) \quad \kappa_{\frac{3}{4}}^{\bullet} = \frac{1}{3} \kappa_{\frac{1}{4}}^{\bullet}, \quad \kappa_{\frac{5}{4}}^{\bullet} = \frac{1}{5} \kappa_{\frac{1}{4}}^{\bullet}, \dots$$

При этом соотношение

$$\kappa_{\frac{1}{4}}^{\bullet} = (4\beta / \pi) q_2^{\bullet}$$

можно рассматривать как новое обозначение тока  $\kappa_{\frac{1}{4}}^{\bullet}$ . До наложения связей (3.2) токи

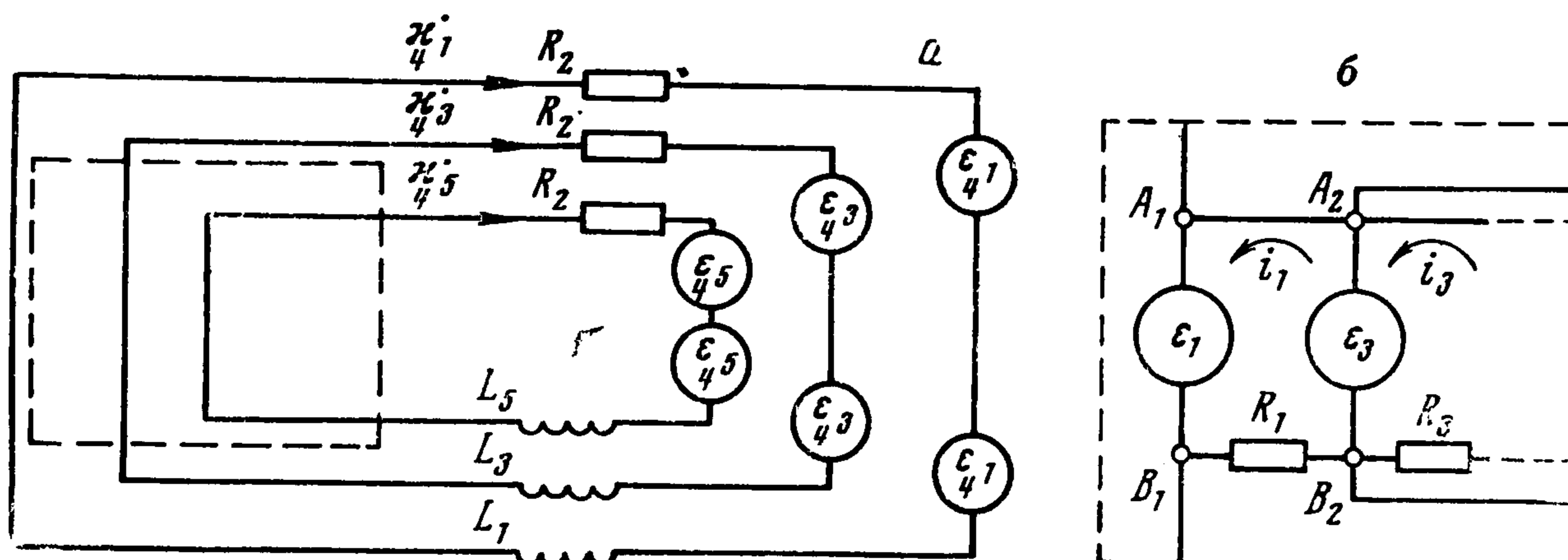
$$\kappa_k^{\bullet} \quad (k = 1, 3, \dots)$$

в статорных контурах, согласно (1.4), подчинялись уравнениям (фиг. 3, а)

$$L_k \kappa_k^{\bullet\bullet} + R_2 \kappa_k^{\bullet} = E_k + E_k^i \quad (k = 1, 3, \dots)$$

$$E_k^i = -M_k \frac{d}{dt} (\kappa_{\frac{1}{4}}^{\bullet} \sin k\varphi + \kappa_{\frac{3}{4}}^{\bullet} \cos k\varphi)$$

Рассмотрим соединение этих контуров в новую схему, которая получается из схемы фиг. 3, а заменой части схемы, обведенной пунктиром,



Фиг. 3

на часть, показанную на фиг. 3, б. Здесь  $R_1, R_3, \dots$  — дополнительные регулируемые сопротивления,  $E_1, E_3, \dots$  — дополнительные регулируемые эдс. Можно выбрать  $R_1(t), R_3(t), \dots, E_1(t), E_3(t), \dots$  так, что выполняются соотношения (3.2), причем виртуальная работа дополнительных эдс  $E_1(t), E_3(t), \dots$ , прикладываемых для реализации связей (3.2), будет равна нулю. В самом деле, условием идеальности связей служит выполнение соотношений

$$(3.3) \quad i_1 = \kappa_{\frac{3}{4}}^{\bullet}, \quad i_3 = i_1 + \kappa_{\frac{5}{4}}^{\bullet}, \dots$$

где  $i_1, i_3, \dots$  — дополнительные контурные токи. Условие (3.3) означает равенство нулю полного тока на участках  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ . Составим уравнения Кирхгофа для указанной новой схемы

$$L_1 \kappa_1^{\bullet\bullet} + R_2 \kappa_1^{\bullet} = E_1 + E_1^i, \quad R_1 i_1 = E_1 - E_3$$

$$\begin{aligned} L_3 \kappa_3^{\bullet\bullet} + R_2 \kappa_3^{\bullet} &= E_3 + E_3^i - E_1, & R_3 i_3 &= E_3 - E_5 \\ L_5 \kappa_5^{\bullet\bullet} + R_2 \kappa_5^{\bullet} &= E_5 + E_5^i - E_3, & R_5 i_5 &= E_5 - E_7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что если определить  $E_1, E_3, \dots$  выражениями

$$(3.4) \quad \begin{aligned} E_1 &= E_3 + E_3^i - \frac{1}{3} L_3 \kappa_1^{\bullet\bullet} - \frac{1}{3} R_2 \kappa_1^{\bullet} \\ E_3 &= E_5 + E_5^i - \frac{1}{5} L_5 \kappa_1^{\bullet\bullet} - \frac{1}{5} R_2 \kappa_1^{\bullet} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

то отношения (3.2) оказываются выполненными, а для удовлетворения соотношений (3.3) достаточно определить  $R_1, R_3, \dots$  в виде

$$R_1 = \frac{3(E_1 - E_3)}{\kappa_1^{\bullet}}, \quad R_3 = \frac{15(E_3 - E_5)}{8\kappa_1^{\bullet}}, \dots$$

где величины  $E_1, E_3, \dots$  заменены их выражениями (3.4).

Аналогичное доказательство можно провести и для другой группы уравнений (3.1).

Используя соотношения (3.1) и вводя обозначения

$$L_0 = \left(\frac{4\beta}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{L_k}{k^2}, \quad M_k^{\circ} = \frac{4\beta M_k}{k\pi} \quad (k=1, 3, \dots)$$

получим из (1.2) функцию Лагранжа в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} L_* &= \frac{1}{2} \left[ L_0 (q_1^{\bullet 2} + q_2^{\bullet 2}) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n (\kappa_n^{\bullet 2} + \kappa_n^{\bullet 2}) \right] + \frac{1}{2} I \varphi^{\bullet 2} + \\ &+ \sum_{k=1,3}^{\infty} M_k^{\circ} [q_1^{\bullet} (\kappa_k^{\bullet} \cos k\varphi - \kappa_k^{\bullet} \sin k\varphi) + q_2^{\bullet} (\kappa_k^{\bullet} \sin k\varphi + \kappa_k^{\bullet} \cos k\varphi)] \end{aligned}$$

Из выражения виртуальной работы находим обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_{q_1} &= (E + e) \cos \omega_1 t - R_0 q_1^{\bullet}, & Q_{q_2} &= E \sin(\omega_1 t + \psi) - R_0 q_2^{\bullet} \\ Q_{\kappa_n^{\bullet 1}} &= -R_1 \kappa_n^{\bullet}, & Q_{\kappa_n^{\bullet 2}} &= -R_1 \kappa_n^{\bullet} \quad (n=1, 2, \dots), & Q_{\varphi} &= K(\varphi^{\bullet}) \end{aligned}$$

Теперь при помощи (1.4) нетрудно составить уравнения движения асинхронной машины с равномерной обмоткой на статоре.

В безразмерных переменных

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \zeta_k &= \frac{\omega_1 L_0}{E} [\kappa_k^{\bullet} \cos k\varphi - \kappa_k^{\bullet} \sin k\varphi + i(-1)^{(k-1)/2} \times \\ &\times (\kappa_k^{\bullet} \sin k\varphi - \kappa_k^{\bullet} \cos k\varphi)] \\ \zeta &= \frac{\omega_1 L_0}{E} (q_1^{\bullet} + i q_2^{\bullet}), & \tau &= \omega_1 t, & \xi &= \frac{\varphi^{\bullet}}{\omega_1}, & \lambda_k &= \frac{M_k^{\circ}}{L_0} \\ \mu_k &= \frac{M_k^{\circ}}{L_k}, & \rho &= \frac{R_0}{\omega_1 L_0}, & \rho_k &= \frac{R_1}{\omega_1 L_k} \\ \gamma &= \frac{E^2}{I \omega_1^4 L_0}, & K_0 &= \frac{K}{I \omega_1^2}, & \sigma &= \frac{1}{2E} (e + i\psi E) \end{aligned}$$

динамика рассматриваемой асинхронной машины описывается системой дифференциальных уравнений

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} + \rho\xi + \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \lambda_k \frac{d\xi_k}{d\tau} &= e^{i\tau} + \sigma e^{-i\tau} \\ \frac{d\xi_k}{d\tau} + \rho_k \xi_k + (-1)^{(k-1)/2} \mu_k \frac{d\xi}{d\tau} - ik\xi (\xi_k + \mu_k \xi) &= 0 \\ \frac{d\xi}{d\tau} + \gamma \sum_{k=1,3}^{\infty} k\lambda_k \operatorname{Im} \{\xi^* \xi_k\} &= K_0(\xi) \end{aligned}$$

Из вида полученных уравнений (3.6) следует, что в модели асинхронной машины с равномерной обмоткой на статоре ротор типа беличьей клетки не эквивалентен двум обмоткам с ортогональными магнитными осями, т. е. здесь предположение Г. Крона [2] не выполняется.

Если в системе уравнений (3.6) положить  $k = 1$ , тогда она совпадает с системой уравнений (2.2), описывающих динамику асинхронной машины с синусоидальными обмотками на статоре, поэтому исследование динамики будем проводить сразу для двух моделей.

**4. Исследование динамики асинхронной машины.** Рассмотрим две модели асинхронной машины с ротором типа беличьего колеса, динамика которых описывается уравнениями (2.2) и соответственно (3.6) в случае  $\sigma = 0$ , т. е. при симметричном питании статорных обмоток. С целью упрощения исследования воспользуемся заменой переменных

$$\xi = ue^{i\tau}, \quad \xi_k = v_k e^{i\tau} \quad (u = u' + iu'', \quad v_k = v_k' + iv_k'')$$

которая позволяет вместо неавтономной системы дифференциальных уравнений (3.6) рассмотреть автономную систему

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} + (\rho + i)u + \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \lambda_k \left( \frac{dv_k}{d\tau} + iv_k \right) &= 1 \\ \frac{dv_k}{d\tau} + [\rho_k + i(1 - k\xi)]v_k + (-1)^{(k-1)/2} \mu_k \frac{du}{d\tau} + &+ i\mu_k [(-1)^{(k-1)/2} - k\xi]u = 0 \\ \frac{d\xi}{d\tau} + \gamma \sum_{k=1,3}^{\infty} k\lambda_k (u'v_k'' - u''v_k') &= K_0(\xi) \quad (k = 1, 3, \dots) \end{aligned}$$

Состояние равновесия системы (4.1), соответствующее стационарному режиму рассматриваемой асинхронной машины, определяется значениями переменных

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u' &= a(a^2 + b^2)^{-1}, & u'' &= -b(a^2 + b^2)^{-1} \\ v_k' &= S_k [\rho_k u'' - (1 - k\xi)u'], & v_k'' &= -S_k [\rho_k u' + (1 - k\xi)u''] \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a &= \rho + \sum_{k=1,3}^{\infty} \lambda_k \rho_k (-1)^{(k-1)/2} S_k, & b &= 1 - \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \times \\ & \times \lambda_k (1 - k\xi) S_k \\ S_k &= \mu_k [(-1)^{(k-1)/2} - k\xi] [\rho_k^2 + (1 - k\xi)^2]^{-1} \quad (k = 1, 3, \dots) \end{aligned}$$

а величина  $\xi$  — корень уравнения

$$(4.4) \quad \gamma (a^2 + b^2)^{-1} \sum_{k=1,3}^{\infty} k \lambda_k \rho_k S_k + K_0(\xi) = 0$$

Рассмотрим случай, когда постоянная времени механического движения ротора много больше времени установления электрических процессов. Пусть  $\gamma = \varepsilon \ll 1$  и  $K_0(\xi) = \varepsilon T(\xi)$ , где  $T(\xi) = \gamma^{-1} K_0(\xi)$  — конечная величина.

Введем «медленное» время  $\tau_0 = \varepsilon t$  и запишем систему уравнений (4.1) в виде

$$(4.5) \quad \varepsilon \frac{du}{d\tau_0} + (\rho + i)u + \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \left( \varepsilon \frac{dv_k}{d\tau_0} + iv_k \right) = 1$$

$$\varepsilon \frac{dv_k}{d\tau_0} + [\rho_k + i(1 - k\xi)]v_k + (-1)^{(k-1)/2} \mu_k \varepsilon \frac{du}{d\tau_0} +$$

$$+ i\mu_k [(-1)^{(k-1)/2} - k\xi]u = 0$$

$$(4.6) \quad \frac{d\xi}{d\tau_0} + \sum_{k=1,3}^{\infty} k \lambda_k (u'v_k'' - u''v_k') = T(\xi) \quad (k = 1, 3, \dots)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  движение системы состоит из быстрых движений по переменным  $u, v_k$  и медленного движения по переменной  $\xi$ . Быстрые движения описываются системой (4.5) с малым параметром при производной. Исследование быстрых движений можно провести, полагая в уравнениях (4.5)  $\xi = \text{const}$ , после чего они превращаются в линейные уравнения. Устойчивость состояния равновесия, к которому скачком (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) приходят переменные  $u, v_k$  ( $k = 1, 3, \dots$ ), определяется корнями  $p$  характеристического уравнения

$$(4.7) \quad p + \rho + i - A(p + i) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k^3} \frac{p + i - i(-1)^{(k-1)/2} k\xi}{p + i + \rho_k - ik\xi} = 0$$

$$A = \left( \sum_{k=1,3}^{\infty} k^{-3} \right)^{-1}, \quad \alpha = ab^{-1} < 1$$

Обозначив  $z = p + i$ , введем параметр  $w$  и запишем характеристическое уравнение (4.7) в виде

$$(4.8) \quad w = A \frac{z}{z + \rho} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k^3} \frac{z - i(-1)^{(k-1)/2} k\xi}{z + \rho_k - ik\xi}$$

Таким образом, вместо уравнения (4.7) будем изучать семейство характеристических уравнений (4.8), зависящих от параметра  $w$  ( $0 \leq w \leq \infty$ ). Точка  $w = 1$  соответствует исходному характеристическому уравнению (4.7). Из (4.8) видно, что если  $\rho < 1$  и все  $\rho_k > 0$  ( $k = 1, 3, \dots$ ), то точка  $w = \infty$  принадлежит области устойчивости. Кривая  $w = w(i\omega)$ , которая получается из (4.8) при подстановке  $p = i\omega$  и изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , определяет на комплексной плоскости границу  $D$ -разбиения [5] и, следовательно, границу области устойчивости по параметру  $w$ .

Покажем, что эта граница проходит слева от точки  $w = 1$ . В самом деле, уравнение кривой  $w = w(i\omega)$  может быть записано в виде

$$w(i\omega) = AP_0(i\omega) \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k^3} P_k(i\omega)$$

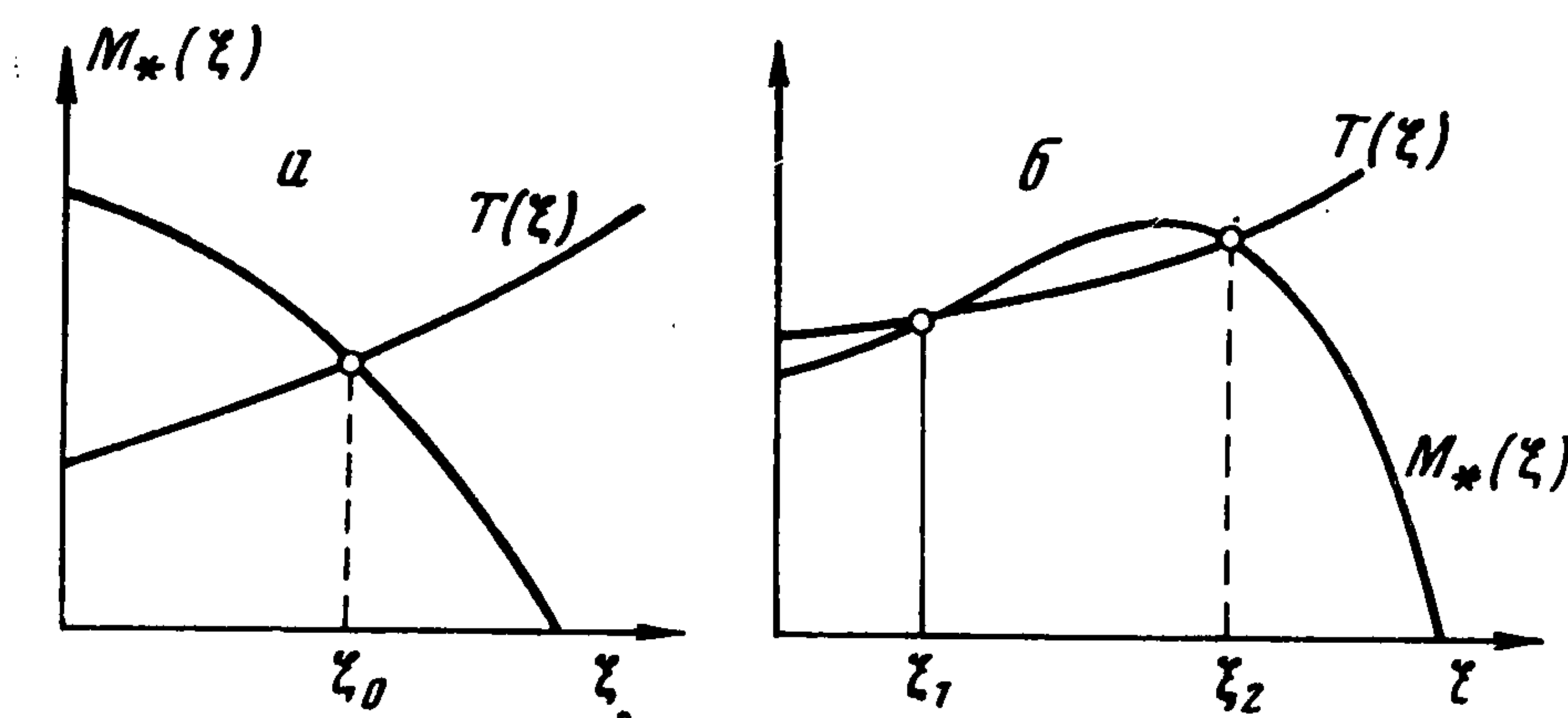
где  $P_0(i\omega) = 0$ ,  $P_k(i\omega) = 0$  ( $k = 1, 3, \dots$ ) представляют уравнения окружностей, проходящих через начало координат и пересекающих ось абсцисс в точке  $w = 1$  при  $w = \pm\infty$ . Отсюда находим, принимая во внимание неравенство  $\alpha < 1$ , что

$$w(\pm i\omega) = A \sum_{k=1,3}^{\infty} \alpha^{2k} k^{-1} < A \sum_{k=1,3}^{\infty} k^{-3} = \frac{A}{A} = 1$$

Таким образом, кривая  $D$ -разбиения проходит слева от точки  $w = 1$ , поэтому точка  $w = 1$ , как и точка  $w = \infty$ , принадлежит области устойчивости, если выполняются неравенства

$$\rho > 0, \quad \rho_k > 0 \quad (k = 1, 3, \dots)$$

При наличии омического сопротивления в роторе и в обмотках статора эти неравенства всегда выполняются и, следовательно, состояния равно-



Фиг. 4

весия для быстрых переменных  $u$ ,  $v_k$  ( $k = 1, 3, \dots$ ) устойчивые. Величины переменных  $u$ ,  $v_k$  в состоянии равновесия определяются выражениями (4.2). Подставляя эти выражения в уравнение (4.6), получаем уравнение динамики асинхронной машины в рассматриваемом случае

$$(4.9) \quad d\xi / d\tau_0 = M_*(\xi) + T(\xi)$$

где в обозначениях (4.3) электромеханический момент  $M_*(\xi)$  определяется выражением

$$(4.10) \quad M_*(\xi) = (a^2 + b^2)^{-1} \sum_{k=1,3}^{\infty} k \lambda_k \rho_k S_k$$

Исследование динамики асинхронной машины в рассматриваемом случае сводится к разбиению фазовой прямой  $\xi$  на траектории, т. е. к отысканию на этой прямой состояний равновесия и к определению их устой-

чивости. Задача решается построением графика кривой  $f(\xi) = M_*(\xi) + T(\xi)$ . Точки пересечения этого графика с осью абсцисс определяют состояния равновесия уравнения (4.9), которые соответствуют стационарным режимам асинхронной машины, а знак производной  $f'(\xi_i)$ , определяет устойчивость данного режима.

Вместо кривой  $f(\xi)$  можно построить графики кривых  $M_* = M_*(\xi)$  и  $T = T(\xi)$ , а затем исследовать характер их точек пересечения. В качестве примера на фиг. 4 приведен график зависимости электромеханического момента  $M_*(\xi)$  от угловой скорости  $\xi$  вращения ротора для асинхронной машины с синусоидальными обмотками на статоре. Выражение этого момента получается из (4.10) при  $k = 1$  и имеет вид

$$(4.11) \quad M_*(\xi) = \frac{\lambda_1 \mu_1 \rho_1 s}{\rho_1^2 (1 + \rho^2) + 2\lambda_1 \mu_1 \rho \rho_1 s + [\rho^2 + (1 - \lambda_1 \mu_1)^2] s^2}$$

где величина  $s = 1 - \xi$  называется скольжением ротора.

Сравнивая выражения (4.10) и (4.11), видим, что электромеханический момент асинхронной машины с ротором типа беличьей клетки, имеющей на статоре обмотки с синусоидальным распределением витков, отличается от электромеханического момента такой же машины, но с обмотками на статоре, имеющими равномерное распределение витков.

На графике фиг. 4 приведена также кривая  $T = T(\xi)$  зависимости момента нагрузки на валу асинхронной машины от угловой скорости вращения ротора.

Характер пересечения кривых  $M_* = M_*(\xi)$  и  $T = T(\xi)$  определяется соотношением параметров. Два из возможных случаев показаны на фиг. 4. В случае фиг. 4, а имеется единственный устойчивый стационарный режим. В случае фиг. 4, б при значении угловой скорости  $\xi = \xi_1$  имеется неустойчивый стационарный режим, а при  $\xi = \xi_2$  — устойчивый. Значение  $\xi = \xi_1$  является границей для начальных значений угловой скорости: при  $\xi < \xi_1$  ротор возвращается к состоянию покоя, а при  $\xi > \xi_1$  ротор приходит к состоянию устойчивого вращения с угловой скоростью  $\xi = \xi_2$ .

Поступила 21 IX 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костенко М. П., Пиотровский Л. М. Электрические машины, ч. 2. Машины переменного тока. М.—Л., «Энергия», 1965.
2. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. М.—Л., Госэнергоиздат, 1955.
3. Гапонов А. В. Метод наложения идеальных связей в общей теории электрических машин. Уч. зап. Горьковск. ун-та, т. 30, 1956.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
5. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л., Ленингр. Краснознаменная Военно-воздушная инж. акад., 1949.