Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

Г. Г. Хазина

(Москва)

Рассматриваются вопросы устойчивости положения равновесия нелинейных систем, нейтральных в линейном приближении. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости при наличии одного резонанса, а также некоторые результаты, касающиеся взаимодействия нескольких резонансов. Показано, что из неустойчивости в конечном порядке следует неустойчивость по Ляпунову.

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами

$$dx_\alpha / dt = A_\alpha{}^\beta x_\beta + A_\alpha{}^{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma + \ldots, \qquad \alpha = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Изучим устойчивость положения равновесия $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (относительно вариации начальных данных), если собственные значения линеаризованной системы — чисто мнимые, простые и отличные от нуля (условия (A)).

При этих условиях в безрезонансном случае вопрос об устойчивости положения равновесия системы (1.1) рассмотрен А. М. Молчановым [1]. При наличии резонансов произвольного порядка этот вопрос изучен для гамильтоновых систем [1]. Для общих систем рассмотрен случай одного резонанса третьего порядка [2].

В данной работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия системы (1.1) во втором порядке теории возмущений при наличии параметрического резонанса; доказана неустойчивость положения равновесия системы (1.1) по Ляпунову при наличии произвольного резонанса третьего порядка, если система неустойчива по Биркгофу (во втором порядке); рассмотрены вопросы взаимодействия двух или нескольких резонансов. Показано, в частности, что взаимодействие двух резонансов может привести к неустойчивости даже в том случае, когда каждый резонанс в отдельности неустойчивости не вызывает.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_l$ — собственные значения (частоты) рассматриваемой системы ($2l = n$).

Говорят, что система (1.1) обладает резонансом порядка k, если существуют целые, не все равные нулю k_m ($m = 1, \ldots, l$), $|k_1| + \ldots + |k_l| = k$, такие, что $k_1\lambda_1 + \ldots + k_l\lambda_l = 0$. (Например, соотношениями вида $\lambda_i - 2\lambda_j = 0$, $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 0$, $\lambda_i + \lambda_j - \lambda_k = 0$ исчерпываются все резонансы третьего порядка). Вектор $(k_1, \ldots, k_l)$ называется резонансным.

---

[1] Молчанов А. М. Докторск. дисс. «Об устойчивости нелинейных систем». М., 1962.

При выполнении условий (A) систему (1.1) можно квадратичной заменой переменных привести к нормальному виду (звездочка означает сопряжение)

$$dy_\alpha / dt = \lambda_\alpha y_\alpha + B_\alpha^{\beta\gamma} y_\beta y_\gamma + \ldots \tag{1.2}$$
$$dy_\alpha^* / dt = \lambda_\alpha^* y_\alpha^* + (B_\alpha^{\beta\gamma})^* y_\beta^* y_\gamma^* + \ldots$$
$$\alpha = 1, \ldots, l; \quad \beta, \gamma = 1, \ldots, l, 1^*, \ldots, l^*; \quad y_{\alpha^*} = y_\alpha^*$$

Систему

$$dy_\alpha/dt = \lambda_\alpha y_\alpha + B_\alpha^{\beta\gamma} y_\beta y_\gamma \tag{1.3}$$
$$dy_\alpha^*/dt = \lambda_\alpha^* y_\alpha^* + (B_\alpha^{\beta\gamma})^* y_\beta^* y_\gamma^*$$
$$\alpha = 1, \ldots, l; \quad \beta, \gamma = 1, \ldots, l, 1^*, \ldots, l^*; \quad y_{\alpha^*} = y_\alpha^*$$

полученную из (1.2) отбрасыванием всех членов выше второго порядка, будем называть укороченной и говорить, что (1.2) устойчива (неустойчива) во втором порядке, если устойчива (неустойчива) ее укороченная система.

Пусть система (1.1) обладает (параметрическим) резонансом $\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$. Первая группа уравнений (1.3) имеет тогда следующий вид (уравнения для сопряженных величин выписываются аналогично):

$$dy_1 / dt = \lambda_1 y_1 + B_1^{21*} y_2 y_1^*, \quad dy_2 / dt = \lambda_2 y_2 + B_2^{11} y_1^2 \tag{1.4}$$
$$dy_\alpha / dt = \lambda_\alpha y_\alpha, \quad \alpha = 3, \ldots, l$$

Переходя к полярной системе координат $y_\alpha = \rho_\alpha e^{i\varphi_\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, l$, получим

$$\frac{d\rho_j^2}{dt} = 2\rho_1^2 \rho_2 P_j(\psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = 2\rho_1^2 \rho_2 \left(\frac{P_1'}{\rho_1^2} + \frac{P_2'}{2\rho_2^2} \right), \quad j = 1,2 \tag{1.5}$$
$$\frac{d\rho_\alpha^2}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \frac{\lambda_\alpha}{i} \quad \alpha = 1, \ldots, l$$

Здесь

$$\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1, \; P_j = A_j \cos\psi + B_j \sin\psi, \; P_j' = dP_j / dt, \quad j = 1, 2$$
$$A_1 = \operatorname{Re} B_1^{21*}, \quad B_1 = \operatorname{Im} B_1^{21*}, \quad A_2 = \operatorname{Re} B_2^{11},$$
$$B_2 = -\operatorname{Im} B_2^{11}$$

Теорема 1. Положение равновесия ($\rho_1 = \ldots = \rho_l = 0$) системы (1.5) устойчиво тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$A_1 = -\gamma A_2, \quad B_1 = -\gamma B_2, \quad \gamma > 0 \tag{1.6}$$

Доказательство. Если условия (1.6) выполнены, система (1.5) имеет интеграл $I = \rho_1^2 + \gamma\rho_2^2 + \rho_3^2 + \ldots + \rho_l^2$, существование которого гарантирует устойчивость.

Пусть теперь условия (1.6) не выполнены. Покажем, что тогда система (1.5) имеет растущее решение типа инвариантного луча

$$\rho_\alpha(t) = k_\alpha b(t), \quad k_\alpha > 0, \quad b^\cdot > 0, \quad b(0) > 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{1.7}$$
$$\psi = \psi_0 = \text{const}$$

Подставив (1.7) в (1.5), получим

$$b^{\bullet} = k_2 P_1(\psi_0) b^2, \qquad b^{\bullet} = \frac{k_1^2}{k_2} P_2(\psi_0) b^2 \tag{1.8}$$

$$\psi^{\bullet} = 2k_1^2 k_2 \left(\frac{P_1'(\psi_0)}{k_1^2} + \frac{P_2'(\psi_0)}{2k_2^2}\right) b$$

Решение вида (1.7) системы (1.5) существует, если найдутся такие $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, что

$$(B_1 k_2^2 - B_2 k_1^2)\sin\psi_0 + (A_1 k_2^2 - A_2 k_1^2)\cos\psi_0 = 0 \tag{1.9}$$

$$(2A_1 k_2^2 + A_2 k_1^2)\sin\psi_0 - (2B_1 k_2^2 + B_2 k_1^2)\cos\psi_0 = 0$$

$$(P_1(\psi_0) > 0)$$

Первое соотношение (1.9) получено сравнением правых частей первых двух равенств (1.8); второе соотношение (1.9) — условие обращения в нуль правой части последнего соотношения (1.8). Неравенство в скобках можно удовлетворить, взяв $\psi_0 + \pi$ вместо ψ_0.

Система (1.9) как система линейных уравнений относительно $\sin\psi_0$ и $\cos\psi_0$ совместна, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$2(A_1^2 + B_1^2)\varkappa^2 - (A_1 A_2 + B_1 B_2)\varkappa - (A_2^2 + B_2^2) = 0, \quad \varkappa = k_2^2 / k_1^2$$

Это уравнение относительно $\varkappa$ имеет положительный корень $\varkappa_0$. Видно, что при $\varkappa = \varkappa_0$ можно найти ψ_0 из (1.9) такое, что $P_1(\psi_0) > 0$. (Заметим, что при выполнении (1.6) тоже существует положительный корень $\varkappa_0 = 1 / 2\gamma$, но при этом $\varkappa_0$ первое равенство (1.9) превращается $P_1(\psi_0) = 0$, так что условие в скобках в (1.9) не выполняется).

Итак, решение вида (1.7) системы (1.5) существует и при этом $db / dt = n^2 b^2$, $n \neq 0$, откуда следует неустойчивость. Теорема доказана.

Будем говорить, что резонанс включен, если соответствующий ему коэффициент $B_\alpha^{\beta\gamma}$ при резонансном члене не равен нулю. Резонанс называется существенным или несущественным в зависимости от того, приводит он к неустойчивости или нет при остальных выключенных резонансах.

В этих терминах теорема 1 формулируется следующим образом: резонанс $\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$ является существенным тогда и только тогда, когда одно из решений системы (1.5) — инвариантный луч. Аналогичное утверждение верно и для резонансных векторов $k(1, -1, -1, 0, \ldots, 0)$, $k(1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$ (см. [2]). Резонансы третьего порядка могут быть только указанных типов, поэтому справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 2. Пусть система (1.1) обладает одним (произвольным) резонансом третьего порядка. Для того чтобы во втором порядке резонанс был существенным, необходимо и достаточно, чтобы среди решений укороченной системы было растущее решение типа инвариантного луча.

Отметим, что резонанс $1:2$ почти всегда существенный, в то время как резонанс $1:1:1$ приводит к неустойчивости лишь в половине случаев.

2. *Теорема* 3. Если система (1.1) обладает резонансом $\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$, то из неустойчивости положения равновесия во втором порядке следует неустойчивость по Ляпунову.

Наличие среди решений модельной системы специфического решения (инвариантного луча) является необходимым и достаточным условием неустойчивости укороченной системы. Полная система (1.1), отличающаяся от укороченной лишь старшими членами, может не иметь такого решения. Оказывается, однако, что решения полной системы в некоторой окрестности инвариантного луча укороченной системы остаются растущими.

Доказательство. Система (1.2) при указанных условиях выглядит следующим образом (уравнения для сопряженных величин выписываются аналогично):

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} x_1^{\bullet} &= \lambda_1 x_1 + B_1^{1*2} x_1^* x_2 + x_1 B_1^{jj^*} x_j x_j^* + R_1 \\ x_2^{\bullet} &= \lambda_2 x_2 + B_2^{11} x_1^2 \quad + x_2 B_2^{jj*} x_j x_j^* + R_2 \\ x_k^{\bullet} &= \lambda_k x_k + \qquad\qquad x_k B_k^{jj*} x_j x_j^* + R_k, \quad k = 3, \ldots, l \end{aligned}$$

Здесь R_k — члены более высоких порядков: степень R_1, R_2 по переменным $x_1, \ldots, x_l^*$ больше трех, $R_3, \ldots, R_l$ — больше четырех.

В переменных ρ_α, φ_α $(x_\alpha = \rho_\alpha e^{i\varphi_\alpha},\ \alpha = 1, \ldots, l)$ выпишем лишь ту подсистему, которая не содержит $\varphi_2^{\bullet}, \ldots, \varphi_l^{\bullet}$

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\rho_\alpha^2}{dt} &= 2\rho_1^2\rho_2 P_\alpha(\overline{\psi}) + \rho_\alpha^2 (C_1^\alpha \rho_1^2 + C_2^\alpha \rho_2^2 + S_\alpha) + \bar{R}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \\ \frac{d\rho_\beta^2}{dt} &= \qquad\qquad \rho_\beta^2 (C_1^\beta \rho_1^2 + C_2^\beta \rho_2^2 + S_\beta) + \bar{R}_\beta, \quad \beta = 3, \ldots, l \\ \frac{d\overline{\psi}}{dt} &= 2\rho_1^2\rho_2 \left(\frac{P_1'}{\rho_1^2} + \frac{P_2'}{2\rho_2^2}\right) + (L_1\rho_1^2 + L_2\rho_2^2 + N) + \bar{R}_{l+1} \\ P_j(\overline{\psi}) &= A_j \cos\overline{\psi} + B_j \sin\overline{\psi},\ \overline{\psi} = \varphi_2 - 2\varphi_1,\ \bar{R}_\alpha = \bar{R}_\alpha(\rho_1, \ldots, \rho_l, \varphi_j\, \overline{\psi}) \\ N &= \sum_{j=3}^{l} L_j \rho_j^2,\quad P_j' = \frac{dP}{d\overline{\psi}},\quad S_\alpha = \sum_{j=3}^{l} C_j^\alpha \rho_j^2 \end{aligned}$$

Здесь A_j, B_j, C_i^j, L_i — вещественные коэффициенты, а $\bar{R}_\alpha$ — члены более высоких порядков по сравнению с выписанными.

Условия существования инвариантного луча в укороченной системе следующие (см. (1.9)):

$$(2.3)\qquad P_2(\overline{\psi}_0) = k^2 P_1(\overline{\psi}_0),\ P_2'(\psi_0) = -2k^2 P_1'(\overline{\psi}_0),\ P_1(\overline{\psi}_0) > 0 \quad (k = k_2 / k_1)$$

Используя эти условия, приведем систему (2.2) к более удобному виду. Введем сначала переменные r, $\overline{\varphi}$: $\rho_1 = k^{-1} r \sin\overline{\varphi}$, $\rho_2 = r\cos\overline{\varphi}$. Система (2.2) в переменных $r, \overline{\varphi}, \rho_3, \ldots, \rho_l$ принимает вид

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^2 \left(P_1 + \frac{P_2}{k^2}\right) \sin^2\overline{\varphi} \cos\overline{\varphi} + \frac{r}{2}(S_1 \sin^2\overline{\varphi} + S_2 \cos^2\overline{\varphi}) + \\ &+ \frac{r^3}{2k^2} \sin^2\overline{\varphi} \left(\frac{C_1^1}{k^2} \sin^2\overline{\varphi} + C_1^2 \cos^2\overline{\varphi}\right) + \\ &+ \frac{r^3}{2} \cos^2\overline{\varphi} \left(\frac{C_2^1}{k^2} \sin^2\overline{\varphi} + C_2^2 \cos^2\overline{\varphi}\right) + \bar{R}_0^1 \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar\varphi}{dt} = r\sin\bar\varphi\left(P_1\cos^2\bar\varphi - \frac{P_2}{k^2}\sin^2\bar\varphi\right) + $$
$$+ \frac{r^2}{2}\sin\bar\varphi\cos\bar\varphi\left(\frac{M_1}{k^2}\sin^2\bar\varphi + M_2\cos^2\bar\varphi\right) + M + \bar R_1{}^1$$
$$\frac{d\bar\psi}{dt} = \frac{r}{\cos\bar\varphi}\left(2P_1{}'\cos^2\bar\varphi + \frac{P_2{}'}{k^2}\sin^2\bar\varphi\right) +$$
$$+ r^2\left(\frac{L_1}{k^2}\sin^2\bar\varphi + L_2\cos^2\bar\varphi\right) + N + \bar R_2{}^1$$
$$\frac{d\rho_\alpha{}^2}{dt} = \rho_\alpha{}^2\left(\frac{C_1{}^\alpha}{k^2}\sin^2\bar\varphi + C_2{}^\alpha\cos^2\bar\varphi\right) + S_\alpha\rho_\alpha{}^2 + \bar R_\alpha{}^1, \qquad \alpha = 3, \ldots, l$$
$$M_j = C_j{}^1 - C_j{}^2, \qquad M = \sum_{j=3}^{l} M_j\rho_j{}^2$$

Здесь степень $\bar R_0{}^1$ по r, $\rho_3, \ldots, \rho_l$ больше четырех, $\bar R_1{}^1$, $\bar R_2{}^1$ — больше двух, $\bar R_3{}^1, \ldots, \bar R_l{}^1$ — больше пяти.

Инвариантному лучу укороченной системы отвечают $\bar\varphi = \pi / 4$, $\bar\psi = \bar\psi_0$. Сделав замену $\varphi = \bar\varphi - \pi / 4$, $\psi = \bar\psi - \bar\psi_0$ и разложив правые части в ряд Тейлора в окрестности $\varphi = 0$, $\psi = 0$, учитывая условия существования луча (2.3) и ограничиваясь только членами первого порядка по φ и ψ, окончательно запишем систему в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{2\sqrt2}(2P_1{}^\circ + 2P_1{}^\circ\varphi - P_1{}^{\circ\prime}\psi) + \frac{r}{4}(S_1 + S_2) + Q_0 \tag{2.5}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r}{2\sqrt2}(-4P_1{}^\circ\varphi + 3P_1{}^{\circ\prime}\psi) + Er^2 + \frac14 M + Q_1$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{\sqrt2}(-8P_1{}^{\circ\prime}\varphi - 3P_1{}^\circ\psi) + \frac{r^2}{2}\left(\frac{L_1}{k^2} + L_2\right) + N + Q_2$$
$$\frac{d\rho_\alpha{}^2}{dt} = \frac{r^2}{2}\rho_\alpha{}^2\left(\frac{C_1{}^\alpha}{k^2} + C_2{}^\alpha\right) + S_\alpha\rho_\alpha{}^2 + Q_\alpha, \quad \alpha = 3, \ldots, l$$
$$P_\alpha{}^\circ = P_\alpha(\bar\psi_0), \qquad P_\alpha{}^{\circ\prime} = P_\alpha{}'(\bar\psi_0), \qquad E = \frac18\left(\frac{M_1}{k^2} + M_2\right)$$

Здесь Q_α — члены более высоких порядков.

Покажем теперь, что при надлежащем выборе δ функция

$$F(r, \varphi, \psi, \rho_3, \ldots, \rho_l) = \varphi^2 + \delta^2\psi^2 + \rho_3 + \ldots + \rho_l - r$$

является функцией Четаева для системы (2.5), т. е. в области $F \leqslant 0$ в силу системы (2.5) $dF / dt < 0$.

Имеем

$$\frac{dF}{dt} = 2\varphi\left\{\frac{r}{2\sqrt2}(-4P_1{}^\circ\varphi + 3P_1{}^{\circ\prime}\psi) + \left[Er^2 + \frac{M}{4} + Q_1\right]\right\} + \tag{2.6}$$
$$+ 2\delta^2\psi\left\{\frac{r}{\sqrt2}(-8P_1{}^{\circ\prime}\varphi - 3P_1{}^\circ\psi) + \left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{L_1}{2} + L_2\right) + N + Q_2\right]\right\} +$$
$$+ \sum_{j=3}^{l}\frac{r^2}{4}\rho_j\left(\frac{C_1{}^j}{k^2} + C_2{}^j\right) + \left[\frac{S_j\rho_j}{2} + Q_j\right] -$$
$$- \left\{\frac{r^2}{\sqrt2}P_1{}^\circ + \left[\frac{r^2}{2\sqrt2}(2P_1{}^\circ\varphi - P_1{}^{\circ\prime}\psi) + \frac{r}{4}(S_1 + S_2) + Q_0\right]\right\}$$

В силу того, что в рассматриваемой области

$$\varphi^2 \leqslant r, \quad \delta^2\psi^2 \leqslant r, \quad \rho_3 + \rho_4 + \ldots + \rho_l \leqslant r \quad (\rho_j \geqslant 0)$$

слагаемые, стоящие в квадратных скобках, при достаточно малых r несущественны по сравнению с величинами порядка r^2.

Покажем, что можно выбрать δ так, чтобы было отрицательным выражение

$$-r^2P_1^0 - 16\delta^2 r\varphi\psi P_1^{\circ\prime} - 6r\delta^2\psi^2 P_1^\circ - 4r\varphi^2 P_1^\circ + 3r\varphi\psi P_1^{\circ\prime}$$

Так как $P_1^\circ > 0$, достаточно установить положительную определенность квадратичной формы по переменным φ, ψ

$$6\delta^2\psi^2 + 4\varphi^2 + (16\delta^2 - 3)\frac{P_1^{\circ\prime}}{P_1^\circ}\varphi\psi$$

Видно, что дискриминант $D(\delta^2)$ этой формы имеет два положительных различных корня и поэтому всегда можно выбрать требуемое δ. Теорема доказана.

С несколько большими трудностями связано доказательство аналогичного утверждения для резонанса $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Теорема 4. Если система (1.1) обладает резонансом (третьего порядка) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, то из неустойчивости положения равновесия во втором порядке следует неустойчивость его по Ляпунову.

Доказательство. По аналогии с предыдущим вопрос об устойчивости положения равновесия системы (1.1) сводится к исследованию следующей системы:

$$\frac{d\rho_\alpha^2}{dt} = 2\rho_1\rho_2\rho_3 P_\alpha(\overline{\psi}) + \rho_\alpha^2(C_1^\alpha\rho_1^2 + C_2^\alpha\rho_2^2 + C_3^\alpha\rho_3^2 + S^\alpha) + R_{\alpha-1}, \tag{2.7}$$

$$\alpha = 1, 2, 3$$

$$\frac{d\rho_\beta^2}{dt} = \rho_\beta^2(C_1^\beta\rho_1^2 + C_2^\beta\rho_2^2 + C_3^\beta\rho_3^2 + S^\beta) + R_{\beta-1},$$

$$\beta = 4, \ldots, l$$

$$\frac{d\overline{\psi}}{dt} = \rho_1\rho_2\rho_3\left(\frac{P_1'}{\rho_1^2} + \frac{P_2'}{\rho_2^2} + \frac{P_3'}{\rho_3^2}\right) + L_1\rho_1^2 + L_2\rho_2^2 + L_3\rho_3^2 + N^1 + R_l$$

$$P_\alpha(\overline{\psi}) = A_\alpha\cos\overline{\psi} + B_\alpha\sin\overline{\psi}, \qquad \overline{\psi} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

$$R_i = R_i(\rho_1, \ldots, \rho_l, \overline{\psi}, \varphi_j)$$

$$N^1 = \sum_{j=4}^{l} L_j\rho_j^2, \qquad P_\alpha' = \frac{dP_\alpha}{d\overline{\psi}}, \qquad S^\alpha = \sum_{j=4}^{l} C_j^\alpha\rho_j^2$$

A_α, B_α, C_i^j, L_j — вещественные коэффициенты, R_i — члены более высоких порядков по сравнению с выписанными.

Необходимые и достаточные условия существования инвариантного луча

$$\rho_\alpha = k_\alpha b(t), \qquad k_\alpha > 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

$$db^2 / dt = \varkappa^2 b^3, \qquad \varkappa \neq 0, \quad \overline{\psi} = \psi_0 = \text{const}$$

следующие:

$$k_2^2 P_1(\psi_0) = k_1^2 P_2(\psi_0), \qquad k_3^2 P_1(\psi_0) = k_1^2 P_3(\psi_0) \tag{2.8}$$

$$\frac{P_1'(\psi_0)}{k_1^2} + \frac{P_2'(\psi_0)}{k_2^2} + \frac{P_3'(\psi_0)}{k_3^2} = 0, \qquad P_\alpha(\psi_0) > 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

Используя эти условия, запишем систему (2.7) «в окрестности» инвариантного луча. Введем для этого новые координаты r, φ, θ, ψ

$$\rho_1 = k_1 r\cos(\theta+\theta_0)\cos(\varphi+\pi/4)$$
$$\rho_2 = k_2 r\cos(\theta+\theta_0)\sin(\varphi+\pi/4)$$
$$\rho_3 = k_3 r\sin(\theta+\theta_0),\quad \psi = \bar\psi - \psi_0$$
$$(\cos\theta_0 = \sqrt{2}/\sqrt{3},\qquad \sin\theta_0 = 1/\sqrt{3})$$

Инвариантному лучу отвечают $\varphi = 0$, $\theta = 0$, $\psi = 0$. Разложив правые части преобразованной системы в ряд Тейлора в окрестности $\varphi = \theta = \psi = 0$, получим учитывая (2.8),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{3}}P_3{}^\circ k_3{}^{12} + M^\circ r^3 + \frac{F^\circ}{2}r + Q_0 \tag{2.9}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r}{2\sqrt{3}}(-4P_3{}^\circ k_3{}^{12}\varphi + B\psi) + Kr^2 + \frac{1}{4}(S^2 - S^1) + Q_1$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{\sqrt{6}}(P_3{}^{\circ\prime}k_3{}^{12}\psi - 2\sqrt{2}P_3{}^\circ k_3{}^{12}\theta) + \frac{1}{2\sqrt{2}}N_3 r^2 + $$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}S^3 - \frac{F^\circ}{2\sqrt{2}} + Q_2$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{\sqrt{3}}(-3P_3{}^\circ k_3{}^{12}\psi - 2B\varphi - 3\sqrt{2}P_3{}^{\circ\prime}k_3{}^{12}\theta) + L^\circ r^2 + N^1 + Q_3$$
$$\frac{d\rho_\alpha{}^2}{dt} = \rho_\alpha{}^2(N_\alpha r^2 + S^\alpha) + Q_\alpha,\qquad \alpha = 4,\ldots,l$$
$$B = P_2{}^{\circ\prime}k_2{}^{13} - P_1{}^{\circ\prime}k_1{}^{23},\qquad F_j = \frac{1}{3}(C_j{}^1 + C_j{}^2 + C_j{}^3),$$
$$F^\circ = \sum_{j=4}^{l} F_j\rho_j{}^2,\qquad k_\alpha^{\beta\gamma} = \frac{k_\beta k_\gamma}{k_\alpha}$$
$$K = -{}^1/_2(M_1k_1{}^2 + M_2k_2{}^2 + M_3k_3{}^2),\quad L^\circ = {}^1/_3(L_1k_1{}^2 + L_2k_2{}^2 + L_3k_3{}^2$$
$$M_j = C_j{}^1 - C_j{}^2,\quad M^\circ = \frac{1}{6}(F_1k_1{}^2 + F_2k_2{}^2 + F_3k_3{}^2),\quad N^1 = \sum_{j=4}^{l} L_j\rho_j{}^2$$
$$N_\alpha = \frac{1}{3}(C_1{}^\alpha k_1{}^2 + C_2{}^\alpha k_2{}^2 + C_3{}^\alpha k_3{}^2)$$
$$P_\alpha{}^\circ = P_\alpha(\psi_0),\quad P_\alpha{}^{\circ\prime} = P_\alpha{}'(\psi_0),\quad S^\alpha = \sum_{j=4}^{l} C_j{}^\alpha\rho_j{}^2$$

($Q_0, \ldots, Q_l$ — члены более высоких порядков).

По аналогии с предыдущим можно проверить, что при надлежащем выборе δ и достаточно малом r функция Четаева для системы (2.9)

$$F = 4\varphi^2 + \psi^2 + \delta^2\theta^2 + \rho_4 + \ldots + \rho_l - r$$

3. Взаимодействие резонансов. *Определение.* Два резонанса с резонансными векторами k_1 $(k_{11}, \ldots, k_{1l})$ и k_2 $(k_{21}, \ldots, k_{2l})$ называются независимыми, если резонансные соотношения не имеют общих частот, т. е. если

$$\sum_{j=1}^{l} |k_{1j}|\,|k_{2j}| = 0$$

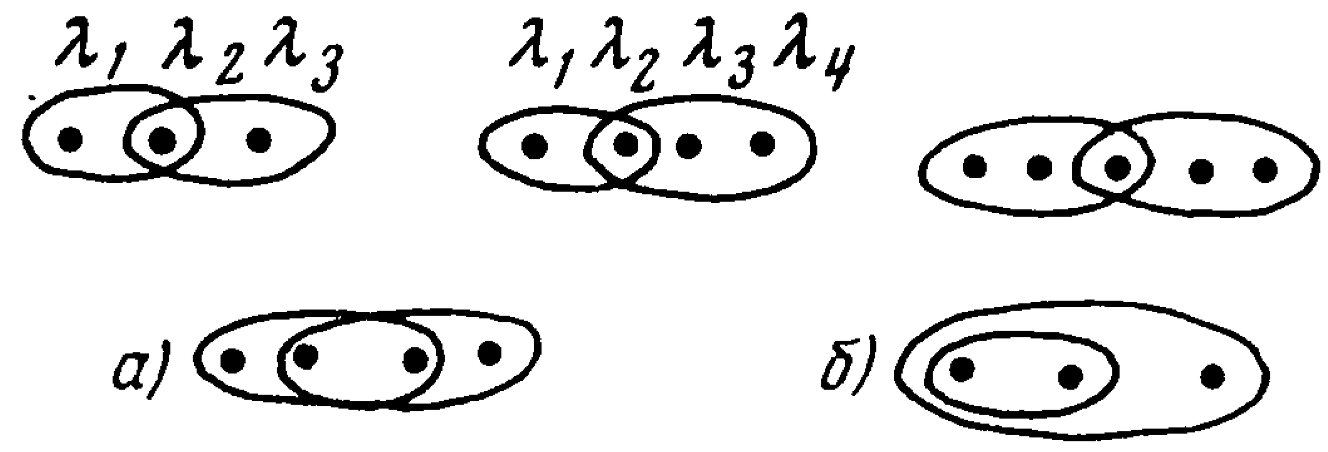
Система, имеющая независимые резонансы, распадается (во втором порядке) на не связанные между собой подсистемы (в подходящих координатах), поэтому устойчивость или неустойчивость положения равновесия во втором порядке зависит от того, будут ли все резонансы несущественными или хотя бы один из них существен.

Будем говорить, что s резонансов зацеплены по m частотам (собственным значениям), если m частот входят в рассматриваемые резонансные соотношения.

Для изучаемых резонансов (третьего порядка) будем рассматривать случаи $m = 1, 2$, $s = 2$ (m не может равняться трем, так как нулевые частоты отсутствуют). Удобно пользоваться следующими схемами зацепления:

А $m=1$, $s=2$

Б $m=2$, $s=2$



А. Рассмотрим сначала случай $m = 1$, $s = 2$. Покажем, что если оба резонанса несущественны, то положение равновесия рассматриваемой системы будет устойчивым. Проверим справедливость этого утверждения на примере взаимодействия следующих резонансов: $\lambda_2 - 2\lambda_1 = 0$, $\lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

При рассматриваемых условиях укороченная система (1.1) в полярных координатах имеет вид (выпишем только уравнения для ρ_α)

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & d\rho_1^2 / dt = 2\rho_1^2\rho_2 P_1(\psi_1), \quad d\rho_2^2 / dt = 2\rho_1^2\rho_2 P_2(\psi_1) + \\
& + 2\rho_2\rho_3\rho_4 Q_1(\psi_2) \\
& d\rho_3^2 / dt = 2\rho_2\rho_3\rho_4 Q_2(\psi_2), \\
& d\rho_4^2 / dt = 2\rho_2\rho_3\rho_4 Q_3(\psi_2) \quad d\rho_\alpha^2 / dt = 0, \quad \alpha = 5, \ldots, l \\
& P_j = A_j \cos\psi_1 + B_j \sin\psi_1, \quad j = 1,\ 2, \quad \psi_1 = \varphi_2 - 2\varphi_1 \\
& Q_k = C_k \cos\psi_2 + D_k \sin\psi_2, \quad k = 1,\ 2,\ 3, \quad \psi_2 = \varphi_4 - \varphi_2 - \varphi_3
\end{aligned}
$$

Здесь A_j, B_j, C_k, D_k — вещественные коэффициенты.

По условию, $P_2 = -k^2 P_1$ (см. (1.8)), а определители

$$
\mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} C_2 & D_2 \\ C_3 & D_3 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{D}_3 = \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}
$$

имеют одинаковые знаки (см. [2]), пусть, для определенности, $D_i > 0$.

Можно проверить, что система (3.1) имеет тогда интеграл

$$
I = \mathrm{D}_1 k^2 \rho_1^2 + \mathrm{D}_1 \rho_2^2 + \mathrm{D}_2 \rho_3^2 + \mathrm{D}_4 \rho_4^2 + \sum_{j=5}^{l} \rho_j^2
$$

существование которого гарантирует устойчивость.

Пусть теперь, по крайней мере, один из резонансов является существенным. Покажем, что в этом случае положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим взаимодействие двух резонансов типа 1 : 1 : 1

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$$

из которых первый является существенным. На этом примере легко уясняется общий ход доказательства для любых двух резонансов третьего порядка.

Нормальная форма системы (1.1) при данных условиях имеет следующий вид (уравнения для сопряженных величин аналогичны):

$$\begin{aligned}
&y_1^\cdot = \lambda_1 y_1 + B_1 y_2^* y_3^* + B_2 y_4^* y_5^* \\
&y_2^\cdot = \lambda_2 y_2 + B_3 y_1^* y_3^*, \quad y_3^\cdot = \lambda_3 y_3 + B_4 y_1^* y_2^* \\
&y_4^\cdot = \lambda_4 y_4 + B_5 y_1^* y_5^*, \quad y_5^\cdot = \lambda_5 y_5 + B_6 y_1^* y_4^* \\
&y_\alpha^\cdot = \lambda_\alpha y_\alpha, \qquad \alpha = 6, \ldots, l
\end{aligned}$$

Покажем, что эта система имеет растущее решение. Положив $y_4 = \ldots = y_l = 0$, получим систему, по условию обладающую инвариантным лучом.

Итак, положение равновесия системы (1.1), имеющей два резонанса третьего порядка, зацепленных по одной частоте, устойчиво во втором порядке, если оба резонанса несущественны, и неустойчиво, если хотя бы один из них существен. Это последнее утверждение, очевидно, справедливо для любого количества резонансов.

Таким образом, картина полностью соответствует уже рассмотренному случаю независимых резонансов.

Б. Пусть зацепление резонансов происходит по двум частотам. Этот случай качественно отличается от предыдущих тем, что взаимодействие двух несущественных резонансов может привести к неустойчивости.

Рассмотрим систему, зависящую от параметра β, и покажем, что при $\beta > \beta_1$ положение равновесия устойчиво, при $\beta < \beta_2$ — неустойчиво.

Пусть $\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, оба резонанса несущественны, и система в полярных координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
&d\rho_1^2 / dt = -{}^5/_2 \rho_1^2 \rho_2^2 \sin \psi_1 + 2\rho_1\rho_2\rho_3 \sin \psi_2 \\
&d\rho_2^2 / dt = 10\rho_1^2\rho_2 \sin \psi_1 - 2\beta\rho_1\rho_2\rho_3 \sin \psi_2 \\
&d\rho_3^2 / dt = 3\rho_1\rho_2\rho_3 \sin \psi \\
&\frac{d\psi_1}{dt} = 5\rho_1^2\rho_2 \left(-\frac{1}{2\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right) \cos \psi_1 - \rho_1\rho_2\rho_3 \left(\frac{2}{\rho_1^2} + \frac{\beta}{\rho_2^2}\right) \cos \psi_2 \\
&\frac{d\psi_2}{dt} = 5\rho_1^2\rho_2 \left(\frac{1}{4\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right) \cos \psi_1 + \rho_1\rho_2\rho_3 \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\beta}{\rho_2^2} + \frac{3}{2\rho_3^2}\right) \cos \psi_2
\end{aligned}$$

Эта система имеет интеграл $I = 4\rho_1^2 + \rho_2^2 + {}^2/_3 (\beta - 4)\rho_3^2$, поэтому положение равновесия устойчиво при $\beta > 4$. Видно, что при $\beta < {}^5/_2$ решением системы является следующий инвариантный луч:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = b(t), \quad \rho_2 = 2\sqrt{\frac{5 - 2\beta}{3}}\, b(t), \quad \rho_3 = 2b(t) \\
&b^\cdot(t) > 0, \quad b(0) > 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi / 2
\end{aligned}$$

так что положение равновесия неустойчиво. Функция Четаева легко выписыв ается.

Аналогичный пример можно привести и для случая Б а): пусть $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ и

$$\frac{d\rho_1^2}{dt} = \rho_1\rho_2\rho_3 \sin\psi_1, \quad \frac{d\rho_2^2}{dt} = -2\rho_1\rho_2\rho_3 \sin\psi_1 + 6\rho_2\rho_3\rho_4 \sin\psi_2$$

$$\frac{d\rho_3^2}{dt} = 2\rho_1\rho_2\rho_3 \sin\psi_1 - \beta\rho_2\rho_3\rho_4 \sin\psi_2, \quad \frac{d\rho_4^2}{dt} = \rho_2\rho_3\rho_4 \sin\psi_2$$

В уравнения для $\psi_1^{\cdot}$ и $\psi_2^{\cdot}$ входят только слагаемые вида $f(\rho)\cos\psi_\alpha$. При $\beta > 12$ эта система имеет положительно определенный интеграл $I = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 / 2 + (\beta / 2 - 6)\rho_4^2$, при $\beta < 2$ — инвариантный луч

$$\rho_1 = \rho_4 = b(t), \quad \rho_2 = 2b(t), \quad \rho_3 = \sqrt{2-\beta}\, b(t)$$

$$b(0) > 0, \quad b^{\cdot}(t) > 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \pi / 2$$

Автор благодарит руководителя семинара В. В. Румянцева и участников за полезные обсуждения.

Поступила 9 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличиии резонансов ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. *Ибрагимова Н. К.* Об устойчивости некоторых систем при наличии резонанса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.