

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ
РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ
ТРЕХ ТЕЛ**

А. П. Маркеев, А. Г. Сокольский

(Москва)

Численно исследуется устойчивость треугольных решений эллиптической ограниченной задачи трех тел. Для плоской задачи в пространстве параметров e и μ (e — эксцентриситет, μ — отношение массы меньшего из двух основных тел к сумме их масс) построены области устойчивости для большинства начальных условий и области формальной устойчивости; при резонансных значениях параметров обнаружена неустойчивость по Ляпунову или устойчивость в четвертом приближении относительно координат и импульсов возмущенного движения. Для пространственной задачи получены утверждения об устойчивости в четвертом приближении.

1. Рассмотрим движение трех материальных точек, притягивающихся по закону Ньютона. Дифференциальные уравнения движения задачи трех тел допускают частное решение, соответствующее такому движению, при котором три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся в своей плоскости вокруг центра масс системы трех тел. Исследуем устойчивость этого частного решения для случая эллиптической ограниченной задачи трех тел.

Рассмотрим плоскую задачу. Выберем единицы измерения такими, чтобы расстояние между телами конечных масс, сумма их масс и постоянная тяготения равнялись единице. Тогда в координатах Нехвилла с истинной аномалией ν в качестве независимой переменной разложение функции Гамильтона возмущенного движения имеет вид

$$(1.1) \quad H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{1}{8} q_1^2 - \frac{5}{8} q_2^2 - k q_1 q_2 \right) + \frac{e \cos \nu}{2(1 + e \cos \nu)} (q_1^2 + q_2^2)$$

$$H_3 = \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(-\frac{7\sqrt{3}k}{36} q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_1^2 q_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12} q_1 q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} q_2^3 \right)$$

$$H_4 = \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{37}{128} q_1^4 + \frac{25k}{24} q_1^3 q_2 - \frac{123}{64} q_1^2 q_2^2 - \frac{15k}{8} q_1 q_2^3 - \frac{3}{128} q_2^4 \right)$$

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)$$

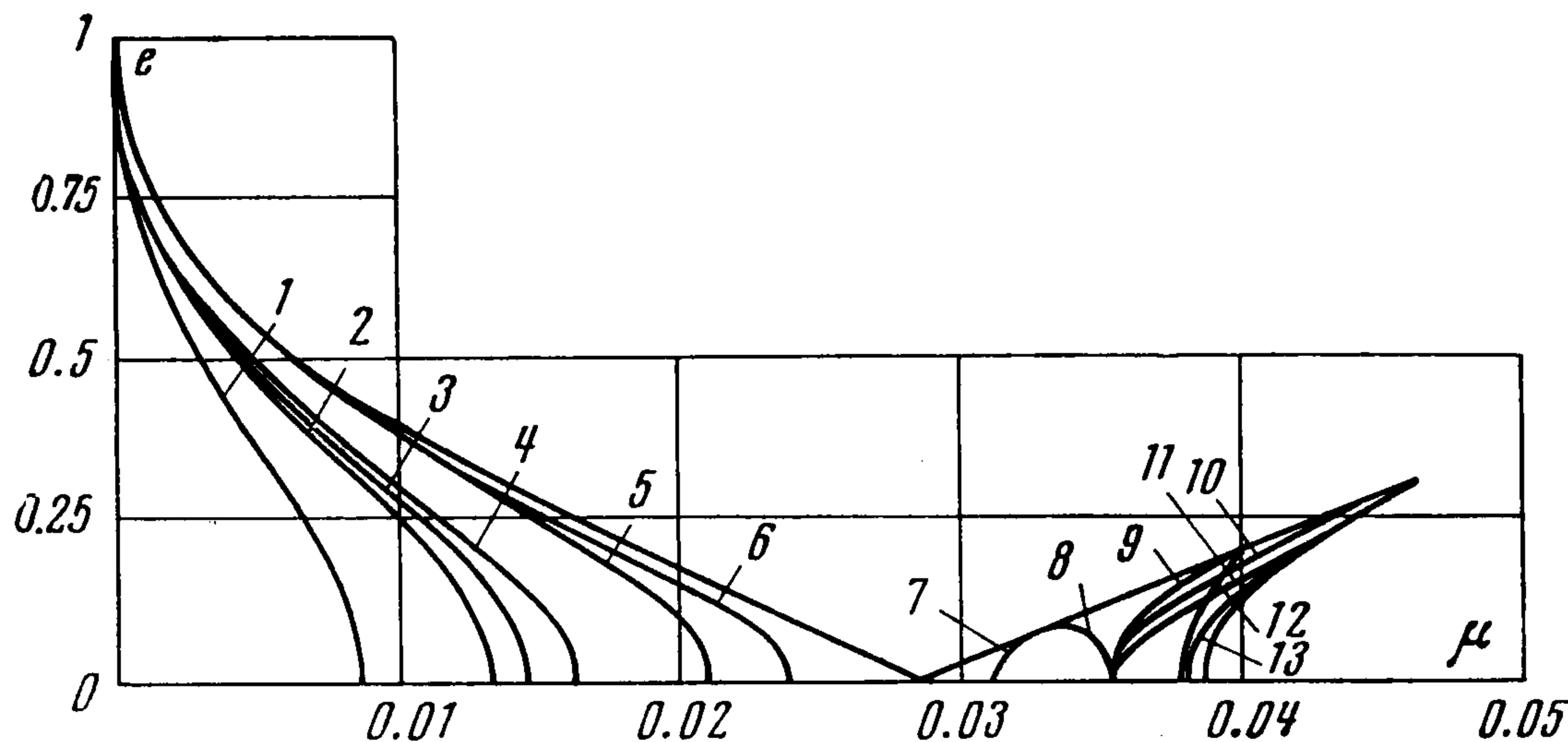
Здесь e — эксцентриситет орбиты основных тел, μ — масса меньшего из них, а q_i, p_i — обобщенные координаты и импульсы.

Известно [1, 2], что в круговой задаче ($e = 0$) лагранжевы решения устойчивы по Ляпунову при всех μ из интервала

$$0 < \mu < 1/18 (9 - \sqrt{69}) \simeq 0.0385208\dots$$

кроме двух значений $\mu_1 \simeq 0.02429\dots$ и $\mu_2 \simeq 0.01352\dots$ (резонансы третьего и четвертого порядков), при которых имеет место неустойчивость. При малых значениях эксцентриситета e было показано ¹, что при нерезонансных значениях μ из указанного интервала и достаточно малых e лагранжевы решения устойчивы для большинства начальных условий, а при $0.024294\dots < \mu < 0.0385208\dots$ и достаточно малых e , не принадлежащих резонансным кривым третьего и четвертого порядков, лагранжевы решения формально устойчивы. Для значений параметров e и μ , попадающих на резонансы третьего и четвертого порядков, получены утверждения об устойчивости в четвертом приближении и о неустойчивости по Ляпунову.

Вопрос об устойчивости лагранжевых решений при произвольных значениях эксцентриситета в настоящее время аналитически решить не представляется возможным. Даже в линейном приближении вопрос можно разрешить только численным интегрированием, с привлечением современных ЭВМ.



Фиг. 1

Область устойчивости в линейном приближении в плоскости параметров e и μ впервые была численно найдена в работе Дэнби [3]. Эта область изображена на фиг. 1. Здесь же изображены резонансные кривые третьего и четвертого порядков, полученные в [4]. На фиг. 1 резонансные кривые занумерованы соответственно следующих значений: 1 — $4\lambda_2 = -1$, 2 — $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, 3 — $3\lambda_2 = -1$, 4 — $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$, 5 — $2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$, 6 — $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, 7 — $3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, 8 — $3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$, 9 — $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 10 — $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$, 11 — $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$, 12 — $4\lambda_1 = 3$, 13 — $3\lambda_2 = -2$.

Пусть характеристические показатели $\pm i\lambda_1$ и $\pm i\lambda_2$ системы с гамильтонианом H_2 таковы, что все ее мультипликаторы различны. Тогда функцию Гамильтона H системы 2π -периодическим по ν вещественным линейным каноническим преобразованием можно привести к виду (см., например, [5])

$$H = \frac{1}{2} \lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 3}^{\infty} h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\nu) q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4}$$

$$(1.2) \quad h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\nu + 2\pi) = h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\nu)$$

¹ Маркеев А. П. Исследование устойчивости лагранжевых решений плоской эллиптической задачи трех тел. Препринт ИПМ АН СССР, 1973, № 1.

В данной работе это преобразование находилось с помощью алгоритма, предложенного в [6].

Далее, если для целых k_1, k_2 , удовлетворяющих равенству $|k_1| + |k_2| = k$, $k = 3; 4$, выполняется условие

$$(1.3) \quad k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq N \quad (N - \text{целое число})$$

то существует [5] аналитическое по q_i, p_i и 2π -периодическое по ν каноническое преобразование, приводящее гамильтониан (1.2) к виду

$$(1.4) \quad H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + H^*(q_i, p_i, \nu) \\ 2r_i^2 = q_i^2 + p_i^2$$

Здесь коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} не зависят от ν , а лишь от параметров e и μ , а 2π -периодическая по ν функция H^* будет аналитической по q_i, p_i и ее разложение в ряд по координатам и импульсам] начинается с членов не ниже пятой степени.

Приведение функции Гамильтона (1.2) к виду (1.4) осуществлялось не с помощью общепринятого преобразования Биркгофа [5], а с помощью метода точечных отображений¹. В основе метода точечных отображений лежит идея возможности сведения изучения движения динамической системы к изучению свойств производящих функций, задающих отображение. Приведение гамильтониана (1.2) к виду (1.4) методом отображений осуществляется в несколько этапов. Сначала по функции Гамильтона находится производящая функция отображения, затем проводится ее нормализация, т. е. приведение ее к некоторому простейшему виду, и, наконец, построение нормализованной функции Гамильтона по полученному нормализованному отображению. Такой способ нормализации дает значительную экономию машинного времени

Тем не менее, чтобы найти коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} для каждой пары параметров e и μ из области устойчивости линеаризованной задачи, приходилось на ЭВМ интегрировать системы дифференциальных уравнений сначала 16-го порядка (для нахождения λ_1 и λ_2 и линейного нормализующего преобразования), а потом 39-го (для получения коэффициентов производящей функции отображения). Оказалось, что при больших значениях эксцентриситета e и при малых значениях μ время счета при заданной точности становится очень большим. В связи с этим при $e > 0.6$ и $\mu < 0.001$ в области левее значения $\mu^0 \simeq 0.028595\dots$ (точка параметрического резонанса $2\lambda_2 = -1$) и при $\mu > 0.042$ в правой области расчеты не проводились.

Если $D \equiv c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$, то положение равновесия $q_i = p_i = 0$ устойчиво для большинства начальных условий [7], а движение в окрестности начала координат для этих начальных условий условно-периодическое.

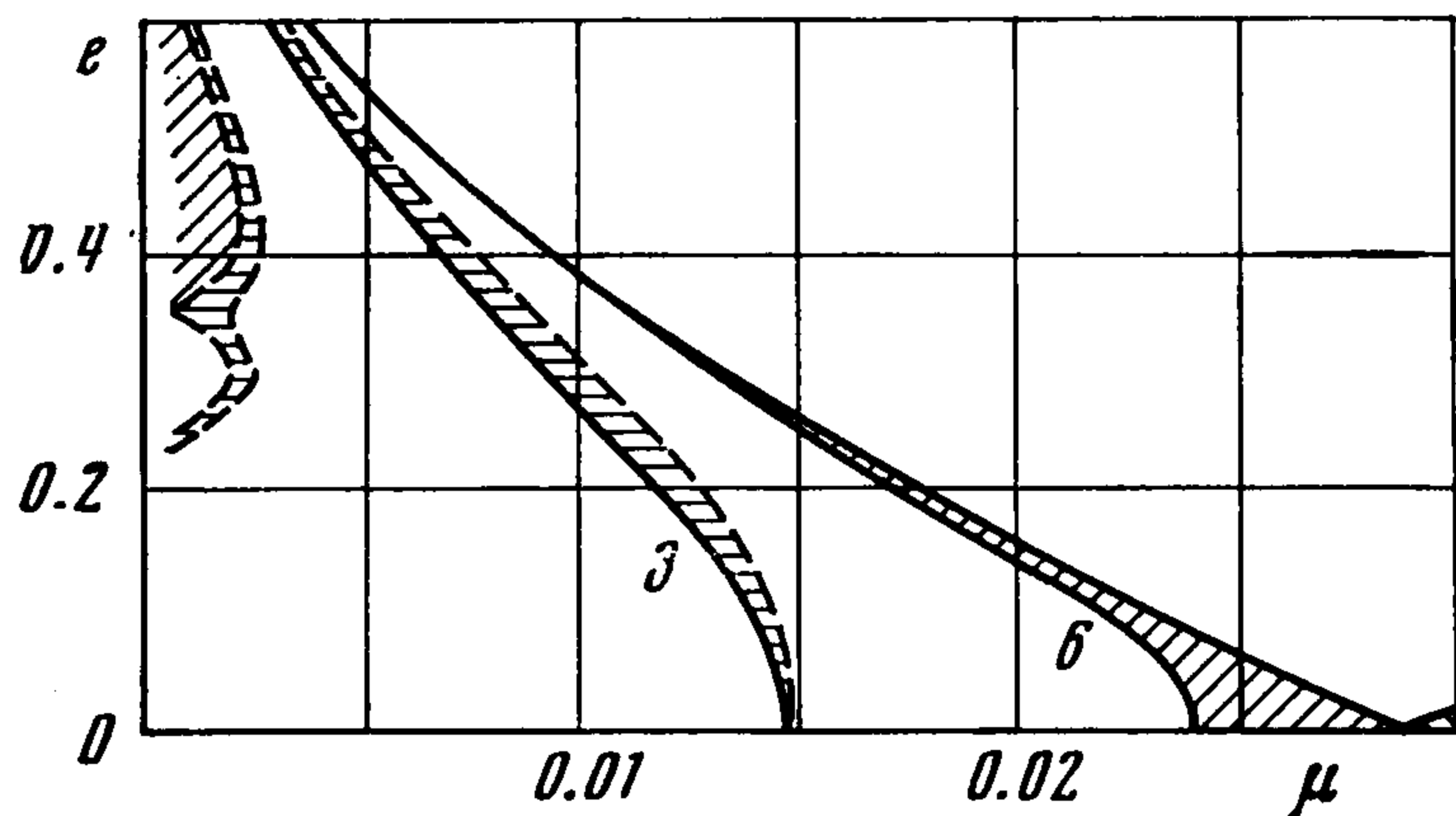
В данной работе, кроме устойчивости по Арнольду, рассматривался еще один тип устойчивости — формальная устойчивость [8], означающая, что неустойчивость не может быть обнаружена при учете любого конечного числа членов разложения функции Гамильтона. Для системы с гамильтонианом (1.4) формальная устойчивость, как установлено в работе Глим-

¹ Маркеев А. П. О методе точечных отображений и некоторых его приложениях в задаче трех тел. Препринт ИПМ АН СССР, 1973, № 49.

ма [9], будет иметь место в случае знакоопределенности квадратичной формы $F = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ в области $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$. Форма F , как легко видеть, будет знакоопределенной, если или $D < 0$, или, если

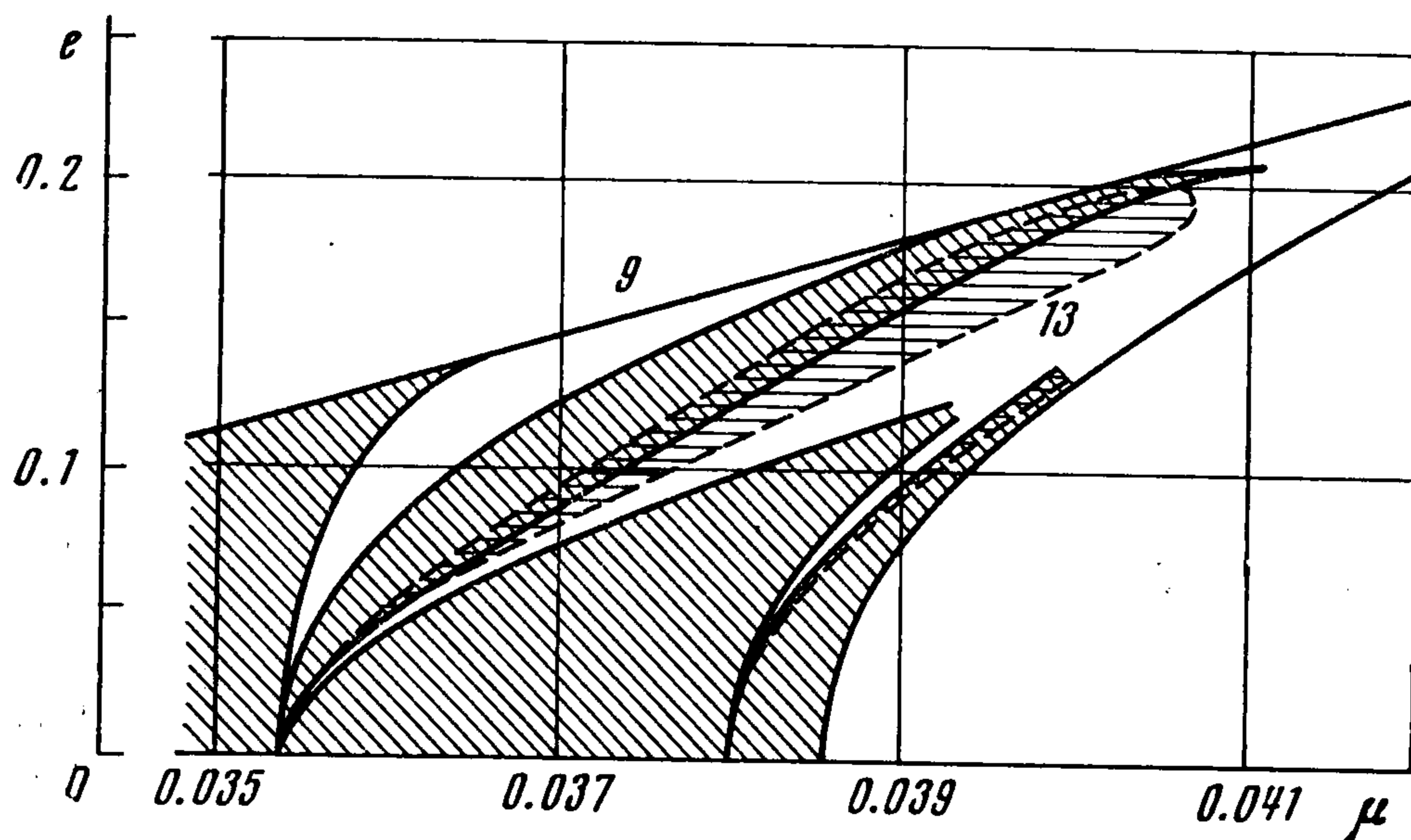
$D > 0$, но все ее коэффициенты c_{ij} имеют одинаковые знаки.

На фиг. 2 и 3 представлены результаты численных расчетов для параметров e и μ , принадлежащих области устойчивости линеаризованной задачи. Из этих фигур видно, что устойчивость по Арнольду имеет место во всей области выполнения необходимых условий устойчивости, за исключением резонансных



Фиг. 2

кривых третьего и четвертого порядков (см. фиг. 1) и кривых $D = 0$, изображенных на фиг. 2 и 3 пунктирными линиями. На фигурах области формальной устойчивости заштрихованы, причем горизонтальной штриховкой изображены области, где $D < 0$, а наклонной штриховкой —



Фиг. 3

области, в которых все коэффициенты c_{ij} имеют одинаковые знаки (оказалось, что существуют только те области, в которых все c_{ij} положительны).

2. Исследуем устойчивость лагранжевых решений при резонансах третьего и четвертого порядков.

Заметим прежде всего, что резонансные кривые $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N$, у которых k_1 и k_2 имеют разные знаки, в подробном исследовании не нуждаются, так как для подобных резонансов Мозером [8] доказана формальная устойчивость положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы. Формальная устойчивость здесь имеет место в случае отсутствия других резонансных соотношений любого порядка. В противном случае можно сделать утверждение об устойчивости при учете в разложении функции Гамильтона членов лишь до четвертого порядка включительно.

Пусть параметры задачи e и μ таковы, что при $|k_1| + |k_2| = 3$ не выполнено соотношение (1.3), т. е. имеет место резонансное соотношение третьего порядка. В этом случае функцию Гамильтона системы нельзя уже привести к виду (1.4), так как появляются нулевые знаменатели, обусловленные наличием резонанса. Функцию Гамильтона (1.2) можно привести к виду [10]

$$H = a_{k_1 k_2} r_1^{1/2|k_1|} r_2^{1/2|k_2|} \sin(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2) + H^*(r_i, \varphi_i, \nu)$$

где полярные координаты r_i, φ_i связаны с координатами q_i и импульсами p_i соотношениями

$$q_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2)$$

коэффициент $a_{k_1 k_2}$ не зависит от ν , а функция H^* периодична по ν и ее разложение в ряд по степеням $\sqrt{r_i}$ начинается с членов не ниже четвертой степени.

Было показано [10], что если $a_{k_1 k_2} \neq 0$, то положение равновесия $q_i = p_i = 0$ неустойчиво. Если $a_{k_1 k_2} = 0$, то резонанс третьего порядка в членах третьей степени разложения функции Гамильтона в ряд по степеням координат и импульсов не проявляется и исследование устойчивости можно проводить как в п. 1.

В области устойчивости линеаризированной ограниченной задачи трех тел в плоскости параметров e и μ существует пять резонансных кривых третьего порядка, а на четырех из них величины k_1 и k_2 резонансного соотношения (1.3) имеют одинаковые знаки. В результате проведенного в данной работе численного исследования выяснено, что для всех четырех резонансов $3\lambda_2 = -1, \lambda_2 + 2\lambda_2 = 0, 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1, 3\lambda_2 = -2$ коэффициенты $a_{k_1 k_2}$ при $e > 0$ нигде не обращаются в нуль, и, следовательно, на всех кривых имеет место неустойчивость.

3. Рассмотрим теперь параметры e и μ , при которых не выполнено соотношение (1.3) при $|k_1| + |k_2| = 4$.

В этом случае функцию Гамильтона задачи можно привести к виду

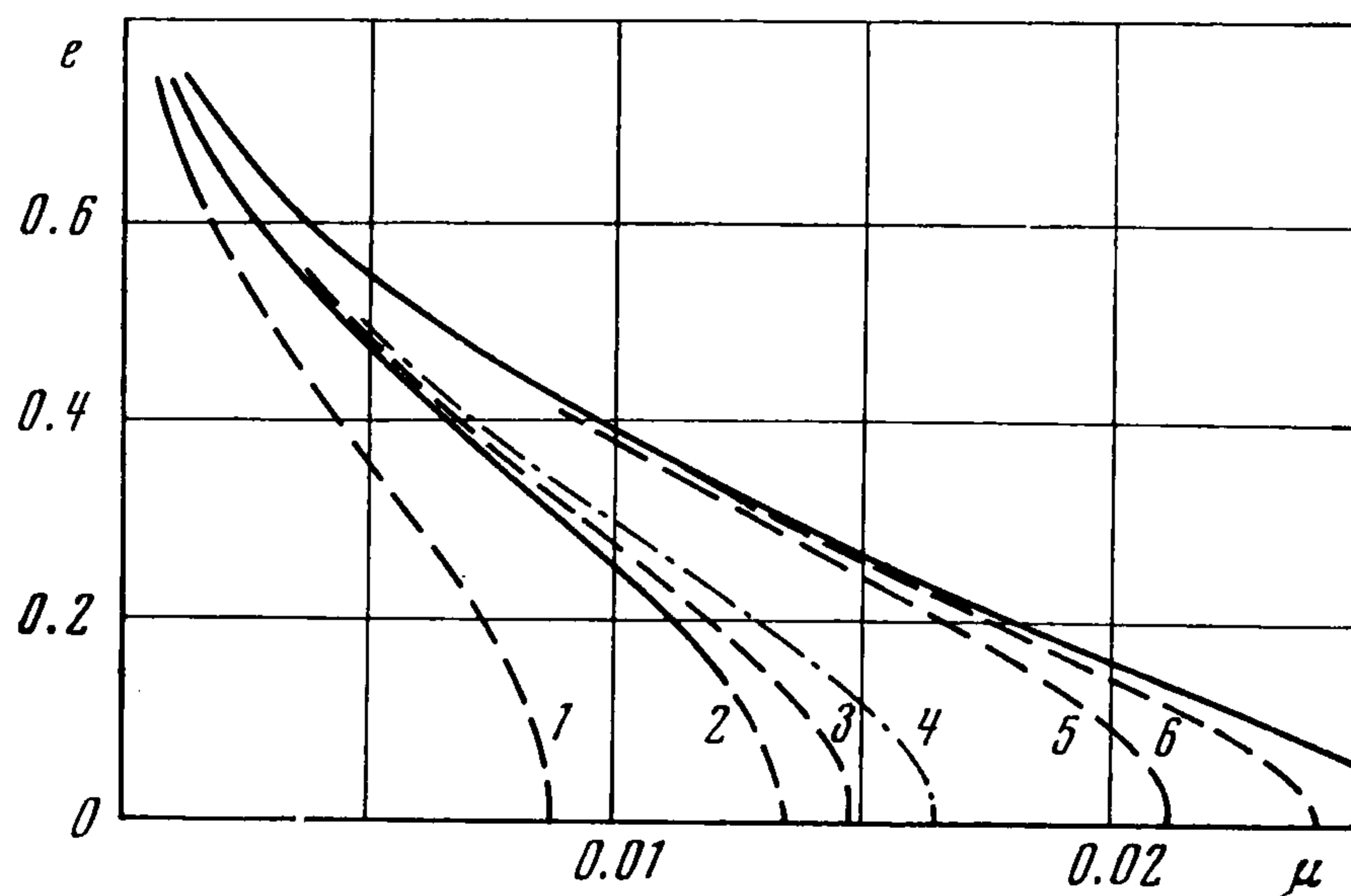
$$(3.1) \quad H = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ + b_{k_1 k_2} r_1^{1/2|k_1|} r_2^{1/2|k_2|} \sin(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2) + H^*(r_i, \varphi_i, \nu)$$

В работе [10] получены условия неустойчивости по Ляпунову и устойчивости в четвертом приближении в зависимости от коэффициентов $b_{k_1 k_2}$ и c_{ij} гамильтониана (3.1).

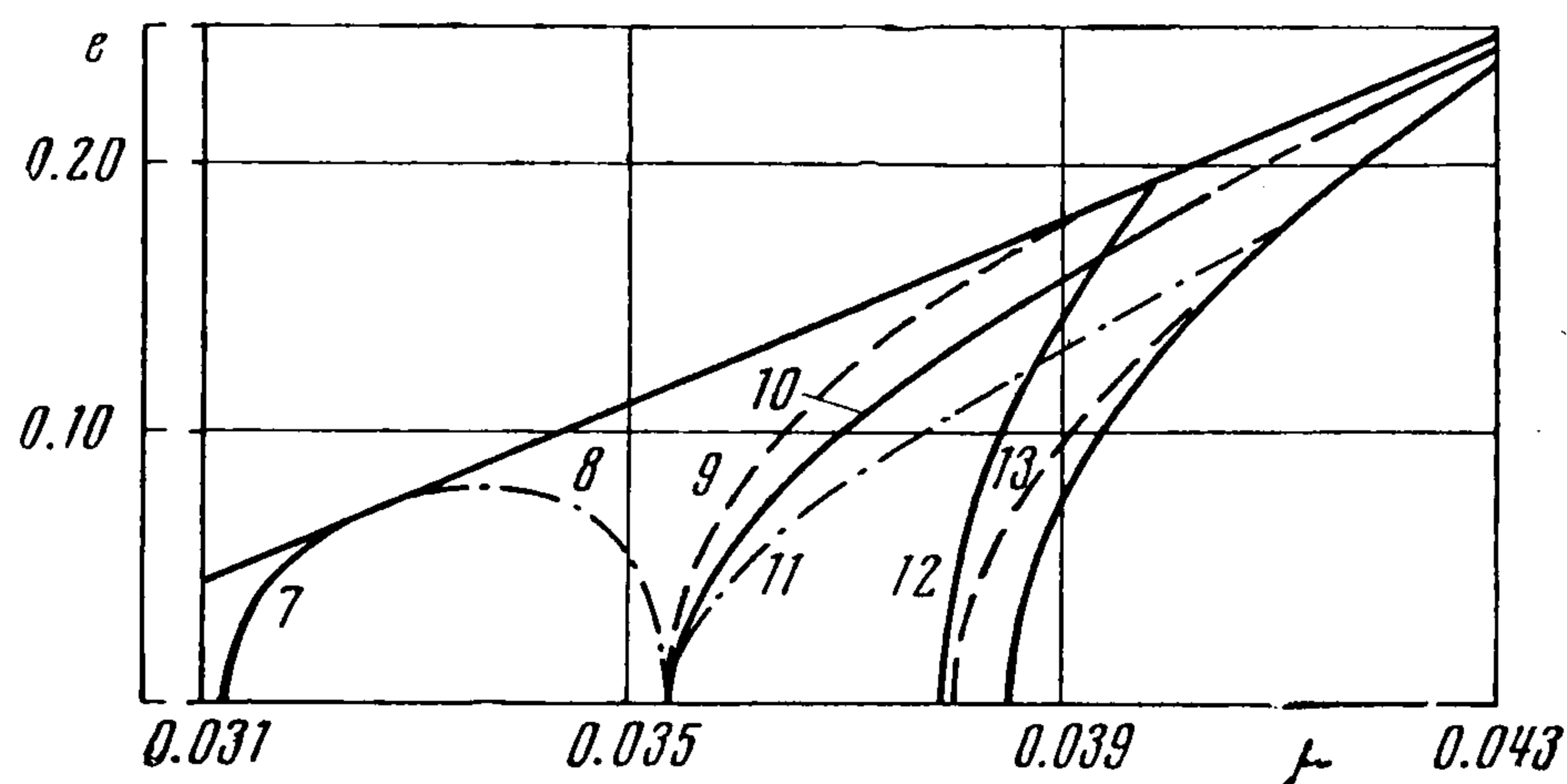
В области устойчивости линеаризированной задачи имеется восемь резонансных кривых четвертого порядка. Из них шесть имеют в резонансных соотношениях $k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 = N$ одинаковые знаки у k_1 и k_2 . Проведенные расчеты показывают, что на резонансных кривых четвертого порядка существуют как участки устойчивости в четвертом приближении, так и участки неустойчивости по Ляпунову. Результаты расчетов приведены в таблице.

Номер	Резонанс	Интервалы неустойчивости	Интервалы устойчивости в 4-м приближении
1	$4\lambda_2 = -1$	$0.022 < e < 0.611$	$0 < e < 0.022$ $0.611 < e < 0.8$
2	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$	$0 \leq e < 0.141$	$0.141 < e < 0.8$
5	$2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$	$0.026 < e < 0.45$	$0 < e < 0.026$
7	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$		$0 < e < 0.065$
10	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$0.196 < e < 0.207$	$0 < e < 0.196$ $0.207 < e < 0.24$
12	$4\lambda_1 = 3$		$0 < e < 0.19$

На фиг. 4 и 5 изображены все резонансные кривые третьего и четвертого порядков. На всех кривых, кроме $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, при $e = 0$ имеет место устойчивость по Ляпунову [2]. На резонансных кривых $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$, $3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$, $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$, изображенных на фигурах



Фиг. 4



Фиг. 5

штрих-пунктирными линиями, имеет место формальная устойчивость [8] при условии отсутствия других резонансных соотношений любого порядка. На резонансных кривых $3\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$3\lambda_2 = -2$ третьего порядка при $e \neq 0$ обнаружена, как и следовало ожидать, неустойчивость по Ляпунову. На фигурах эти кривые изображены пунктирными линиями. На резонансных кривых $4\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, $2(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$, $3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$, $4\lambda_1 = 3$ четвертого порядка участки неустойчивости изображены пунктирными линиями, а участки устойчивости в четвертом приближении — сплошными линиями.

Полученные в данной работе результаты при $e = 0$ совпадают с результатами работ [1, 2], а при малых e — с результатами упомянутого ранее аналитического исследования.

4. Рассмотрим пространственную задачу. Ее особенность состоит в том, что пространственная частота линейных колебаний при всех e и μ равна единице и, следовательно, всегда равна частоте кеплеровского движения основных тел. В работе [11] для малых μ и e доказано, что наличие этого резонанса приводит к неустойчивости лагранжевых решений.

В данной работе в результате проведенных расчетов выяснено, что для всех e и μ лагранжевы решения устойчивы в четвертом приближении. Таким образом, областей неустойчивости обнаружить не удалось. По-видимому, если и имеются области неустойчивости, то их границы проходят очень близко к резонансным кривым третьего порядка или к границам области устойчивости линейной задачи.

Поступила 8 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular lagragian points. *Astron. J.*, 1967, vol. 72, No. 2, p. 173.
2. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. *ПММ.*, 1969, т. 33, вып. 1.
3. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел. *ПММ.*, 1970, т. 34, вып. 2.
4. *Danby J. M. A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies. *Astron. J.*, 1964, vol. 69, No. 2.
5. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
6. *Маркеев А. П.* О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. *ПММ.*, 1972, т. 36, вып. 5.
7. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук.*, 1963, т. 18, вып. 6.
8. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of haimiltonian systems. *Pure Appl. Math.*, 1958, vol. 11, No. 1, p. 81
9. *Glimn J.* Formal stability of hamiltonian systems. *Pure Appl. Math.*, 1964, vol. 17, No. 17, p. 509.
10. *Маркеев А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. *ПММ.*, 1969, т. 33, вып. 3.
11. *Маркеев А. П.* Об устойчивости лагранжевых решений пространственной эллиптической задачи трех тел. *Celestial Mechanics*, 1973, vol. 8, No. 3, p. 307.