Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ ОЦЕНКЕ НЕКОТОРЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

В. Г. Трейвас

(Москва)

Рассматривается поведение замкнутой стационарной управляемой системы, когда задающие воздействия принадлежат к некоторому классу функций (задача Б. В. Булгакова [1,2]). Приводятся оценки для модуля максимального значения выходной величины и для наибольшей накопленной ошибки системы.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&c_0 y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_{n-2} y'' + y' = k\varepsilon_x(t) \\
&y^{(n-1)}(0) = \ldots = y(0) = 0 \\
&\varepsilon_x(t) = x(t) - y(t)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Уравнения (1.1) описывают поведение широко распространенной в технике замкнутой линейной астатической системы автоматического регулирования с жесткой отрицательной обратной связью, в которой $x(t)$ — задающее воздействие, $y(t)$ — регулируемая величина, $\varepsilon(t)$ — ошибка системы.

Задающее воздействие заранее неизвестно и принадлежит к классу F кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$
|x(t)| \leqslant m_1 \tag{1.2}
$$

Показателями качества системы являются максимальное значение выходной величины $y_{\max}(t)$ при наихудших воздействиях $x(t)$ из класса F, наибольшая накопленная ошибка системы $\varepsilon_{\max}(t)$ и ее предельное при $t \to \infty$ значение ε_∞

$$
\varepsilon_{\max}(t) = \max_{x \in F} \varepsilon_x(t), \qquad \varepsilon_\infty = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_{\max}(t)
$$

Сформулированная задача известна как задача Б. В. Булгакова [1,2]. Для систем высокого порядка ее точное решение и исследование влияния параметров системы регулирования на $\varepsilon_{\max}(t)$ и ε_∞ связано со значительными вычислительными трудностями. Это делает актуальным получение гарантированных оценок для этих величин.

Оценка $|y_{\max}(t)|$ при задающих воздействиях из класса функций F дается теоремой 1.

Теорема 1. Пусть коэффициент усиления k выбран так, что все корни z_i характеристического многочлена замкнутой системы (1.1) расположены в левой полуплоскости и выполняется неравенство

$$
-\operatorname{Re} z_i > a_0, \quad a_0 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}
$$

Тогда

$$(1.4)\qquad |y_{\max}(t)| \leqslant \frac{m_1 k}{c_0 a_0^n}\left(1 - e^{-a_0 t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(a_0 t)^i}{i!}\right)$$

$$|y_{\max}(\infty)| \leqslant \frac{m_1 k}{c_0 a_0^n}$$

Доказательство. Переходя в уравнении (1.1) к преобразованию Лапласа, имеем

$$Y(p) = k\,[c_0 (p - z_1) \ldots (p - z_n)]^{-1} X(p)$$

Здесь z_i — корни характеристического многочлена $N(p)$ замкнутой системы (1.1)

$$N(p) = p^n + \frac{r c_1}{c_0} p^{n-1} + \ldots + \frac{1}{c_0} p + \frac{k}{c_0}$$

Применяя теорему о свертке и выбирая наихудшее задающее воздействие $x(t)$ из класса кусочно-непрерывных, ограниченных по модулю функций, получим

$$(1.5)\qquad |y_{\max}(t)| = \frac{m_1 k}{c_0}\int_0^t |g(\tau)|\,d\tau$$

Здесь $g(\tau)$ — оригинал, соответствующий изображению $[(p - z_1) \ldots (p - z_n)]^{-1}$.

Теорема обращения для преобразования Лапласа и выполнение условий леммы Жордана позволяют представить $g(\tau)$ в виде

$$(1.6)\qquad g(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{j=1,\, i\neq j}^{n}(z_i - z_j)\Big]^{-1}\exp(z_i\tau)$$

Правая часть выражения (1.6) представляет собой разделенную разность порядка $n - 1$ от функции $e^{p\tau}$ в точках $z_1, \ldots, z_n$ комплексной плоскости, причем представление (1.6) остается верным при любых совпадениях точек $z_1, \ldots, z_n$ [3].

В силу известной, приведенной в [3], оценки для модуля разделенной разности имеем

$$(1.7)\qquad |g(\tau)| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\max_{z_i}|(e^{p\tau})_p^{(n-1)}| \leqslant \frac{\tau^{n-1}e^{-a_0\tau}}{(n-1)!}$$

Подставляя оценку (1.7) в выражение (1.5), получим оценки (1.4).

Замечание 1. Изображение по Лапласу ошибки системы имеет вид

$$E(p) = (1 - k/c_0 N(p))\,X(p)$$

Поэтому при задающих воздействиях, удовлетворяющих условию (1.3), для максимально накопленной ошибки справедлива оценка

$$\varepsilon_\infty \leqslant m_1 + k m_1/c_0$$

Замечание 2. Выбор коэффициента усиления k и его связь со степенью устойчивости a_0 замкнутой системы (1.1) рассмотрены в работе [4].

2. Пусть задающие воздействия $x(t)$ принадлежат к классу F_1, кусочно-непрерывных функций с ограниченной скоростью изменения

$$x(0) = 0, \qquad |\dot{x}(t)| \leqslant m$$

Оценка снизу для величины ε_∞ приводится в теореме 2.

Теорема 2. Пусть коэффициент усиления k выбран так, что система (1.1) асимптотически устойчива. Тогда для задающих воздействий из класса F_1

$$\varepsilon_\infty \geqslant m / k$$

Доказательство. Положим $x_1 = mt$, тогда

$$\varepsilon_\infty \geqslant \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{x_1}(t)$$

Так как

$$E(p) = \frac{pL(p)}{pL(p)+k} X_1(p) \tag{2.1}$$

$$L(p) = c_0 p^{n-1} + c_1 p^{n-2} + \ldots + 1, \qquad X_1(p) = mp^{-2}$$

то по теореме о предельных значениях получим

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_{x_1}(t) = \lim_{p\to 0} pE(p) = m/k$$

Это же следует из того, что величина ошибки астатической системы в установившемся режиме при рассматриваемом линейном воздействии равна mk^{-1} [5].

Оценка сверху для величины $\varepsilon_{\max}(t)$ и ε_∞ приводится в теореме 3.

Теорема 3. Пусть коэффициент усиления k выбран так, что все корни z_i характеристического многочлена $N(p)$ замкнутой системы (1.1) расположены в левой полуплоскости и выполняется условие (1.3). Тогда для задающих воздействий из класса F_1

$$\varepsilon_{\max}(t) \leqslant \frac{km}{c_0 a_0^{n+1}} \left(n - e^{-a_0 t} \sum_{i=0}^{n} \frac{(n-i)(a_0 t)^i}{i!}\right), \qquad \varepsilon_\infty \leqslant \frac{kmn}{c_0 a_0^{n+1}} \tag{2.2}$$

Доказательство. Из выражения (2.1) для ошибки $E(p)$ получим

$$E(p) = \frac{L(p)X(p)}{pL(p)+k}$$

Отсюда по теореме о свертке

$$\varepsilon(t) = \int_0^t s(t-\tau)\, x^{\cdot}(\tau)\, d\tau$$

Здесь $s(t)$ — оригинал, соответствующий изображению

$$L(p)(pL(p)+k)^{-1}$$

Для задающих воздействий $x(t)$ из класса F_1

$$\varepsilon_{\max}(t) = m \int_0^t |s(\tau)|\, d\tau \tag{2.3}$$

По теореме обращения для преобразования Лапласа и лемме Жордана имеем

$$(2.4)\qquad s(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\Big[c_0\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(z_i-z_j)\Big]^{-1}L(z_i)\exp(z_i\tau)$$

Так как z_i — корни уравнения $N(p)=0$, то $z_i\,L(z_i)=-k$. Учитывая это, получаем из (2.4)

$$(2.5)\qquad s(\tau)=-\frac{k}{c_0}\sum_{i=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(z_i-z_j)\Big]^{-1}z_i^{-1}\exp(z_i\tau)$$

Правая часть выражения (2.5) представляет собой разделенную разность порядка $n-1$ от функции $e^{p\tau}p^{-1}$ в точках $z_1,\ldots,z_n$ комплексной плоскости.

Для $|s(\tau)|$ справедлива оценка

$$(2.6)\qquad |s(\tau)|\leqslant\frac{k}{c_0(n-1)!}\max_{z_i}\left|\left(\frac{e^{p\tau}}{p}\right)_p^{(n-1)}\right|$$

Дифференцируя $(n-1)$ раз (2.6) и учитывая (1.3), получим

$$(2.7)\qquad |s(\tau)|\leqslant\frac{ke^{-a_0\tau}}{c_0(n-1)!}\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{n-i}\frac{(i-1)!\,\tau^{n-i}}{a_0^{\,i}}$$

Подставляя в (2.3) выражение (2.7) и интегрируя, получим

$$(2.8)\qquad \varepsilon_{\max}(t)\leqslant\frac{km}{c_0a_0^{n+1}}\left(n-e^{-a_0t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(a_0t)^j}{j!}\right)$$

Оценки (2.4) получим, заменяя в (2.8) двойную сумму суммой

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-i)(a_0t)^i}{i!}$$

При $n=2$, если корни z_1 и z_2 характеристического многочлена $N(p)$ системы (1.1) действительны, то полученная оценка снизу совпадает с точным значением ошибки, а при кратных корнях $z_1=z_2$ оценка сверху совпадает с точным значением ошибки.

В работе [4], в частности, рассматривалась задача о точности системы (1.1) при наихудших воздействиях, и получены другие оценки сверху и снизу для наибольшей накопленной ошибки.

Поступила 16 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, № 5.
2. *Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т.* О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, 1950, т. 14, вып. 1.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М., «Наука», 1967.
4. *Гноенский Л. С.* О связи некоторых показателей качества в линейных стационарных управляемых системах. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 1.
5. *Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969.