Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Н. Сатимов

(Ташкент)

Доказывается достаточное условие окончания преследования в нелинейных играх. Указан класс игр на плоскости, для которых выполнено это условие, введено понятие относительной оптимальности, рассмотрен пример.

1. Пусть движение вектора z в n-мерном евклидовом пространстве R_n описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z^{\cdot}, u, v), \qquad u \in P, \qquad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь функция $f(z, u, v)$ определена и непрерывна при всех z, u, v; P и Q — произвольные компактные подмножества соответственно p- и q-мерного евклидовых пространств R_p и R_q. Управляющий параметр u соответствует преследующему (догоняющему) объекту, v — преследуемому (убегающему) объекту. Далее, в R_n выделено некоторое терминальное множество M. Игра заключается в следующем: преследующий объект пытается вывести точку z на M, а убегающий — вообще говоря, помешать этому. Игра считается законченной, когда точка z попадает на M. Этими данными описана дифференциальная игра преследования (ср. [1]).

Пусть игра начинается из точки $z_0 \overline{\in} M$ при $t = 0$. Будем говорить, что преследование может быть закончено из точки z_0 за конечное время, если существует число $t(z_0) > 0$ такое, что при произвольном измеримом изменении $v(t)$ параметра v можно подобрать такое измеримое изменение $u(t)$ параметра u, что решение $z(t)$ уравнения

$$z^{\cdot} = f(z, u(t), v(t)), \qquad z(0) = z_0 \tag{1.2}$$

попадает на M за время, не превосходящее числа $t(z_0)$; при этом для нахождения значения $u(t)$ параметра u в каждый момент времени $t \geqslant 0$ используется только текущая информация: значения $z(t)$ и $v(t)$ вектора z и параметра v в тот же момент времени t.

В дальнейшем понадобится обобщение леммы А. Ф. Филиппова [2, 3]. Приведем ее в необходимой для дальнейшего форме.

Лемма А. Ф. Филиппова. Если $\varphi(t, u)$ — непрерывная n-вектор-функция аргументов $t \in [\alpha, \beta]$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r) \in \Pi$, Π — компакт r-мерного евклидова пространства, $y(t)$ — измеримая n-вектор-функция, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(t, \Pi) \ni y(t)$, то существует измеримая функция $u(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, для которой $\varphi(t, u(t)) = y(t)$ почти всех $t \in [\alpha, \beta]$, т. е. уравнение $\varphi(t, u) = y(t)$ имеет измеримое решение.

Сформулируем обобщение этой леммы.

Лемма 1. Если $\psi(t, u, v)$ — непрерывная n-вектор-функция аргументов $t \in [\alpha, \beta]$, $u \in \Pi_1$, $v \in \Pi_2$, Π_1 и Π_2 — компакты соответственно r- и s-мерного евклидовых пространств, $v_0(t)$, $y(t)$ — измеримые функции, определенные на $[\alpha, \beta]$ и $\psi(t, \Pi_1, v_0(t)) \ni y(t)$, то уравнение $\psi(t, u, v_0(t)) = y(t)$ имеет измеримое решение.

Доказательство. Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ через $u_0(t)$ обозначим наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения $\psi(t, u, v_0(t)) = y(t)$ [2, 3]. По теореме Н. Н. Лузина для любого $\varepsilon > 0$ найдется компактное множество $\sigma \subset [\alpha, \beta]$, $\beta - \alpha - \text{mes}\,\sigma < \varepsilon$, на котором функции $v_0(t)$, $y(t)$ непрерывны. Рассуждая так же, как и в [2, 3], можно показать измеримость $u_0(t)$ на σ. В силу произвольности числа ε функция $u_0(t)$ будет измеримой и на $[\alpha, \beta]$.

Теорема 1. Пусть игра начинается из точки $z_0 \overline{\in} M$ при $t = 0$. Если существует абсолютно-непрерывная функция $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, для которой: 1) $\xi(0) = z_0$, $\xi(\tau_0) \in M$, $\tau_0 = T(z_0)$, 2) $\xi^{\cdot}(t) \in f(\xi, (t), P, v)$ для любого $v \in Q$ при почти каждом $t \in [0, \tau_0]$, то за время $T(z_0)$ можно закончить преследование.

Доказательство. 1°. Из условия 2) теоремы следует, что $\xi^{\cdot}(t) \in f(\xi(t), P, Q)$ при почти каждом $t \in [0, \tau_0]$. Обозначим через Π декартово прямое произведение $P \times Q$, а через $\varphi(t, w)$ — функцию $f(\xi(t), u, v)$, $w = (u, v)$. Очевидно, функция $\varphi(t, w)$ непрерывна по t, w, множество Π компактно в $R_p \times R_q$. Следовательно, выполнены все условия леммы А. Ф. Филиппова. Поэтому существует измеримая функция $w_0(t)$, определенная на отрезке $[0, \tau_0]$, для которой

$$\varphi(t, w_0(t)) = \xi^{\cdot}(t)$$

Очевидно, компоненты $u_0(t)$, $v_0(t)$ измеримой функции $w_0(t)$ также измеримы и $f(\xi(t), u_0(t), v_0(t)) = \xi^{\cdot}(t)$ для почти всех $t \in [0, \tau_0]$. Значит, функция $\xi(t)$ — решение уравнения (1.1) (при $u = u_0(t)$, $v = v_0(t)$).

2°. Пусть теперь $v = v_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$ — произвольная измеримая функция со значениями из Q. Обозначим через $\psi(t, u, v)$ функцию $f(\xi(t), u, v)$. Функция $\psi(t, u, v)$ определена при всех $t \in [0, \tau_0]$, $u \in P$, $v \in Q$, непрерывна по t, u, v, и $\psi(t, P, v_1(t)) \in \xi^{\cdot}(t)$ в силу условия 2) теоремы. Значит, все условия леммы 1 выполнены. Поэтому существует измеримая функция $u_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, для которой

$$f(\xi(t), u_1(t), v_1(t)) \equiv \psi(t, u_1(t), v_1(t)) = \xi^{\cdot}(t) \tag{1.3}$$

почти для каждого t. Из (1.3) видно, что абсолютно-непрерывная функция $\xi(t)$ — решение уравнения (1.1) (при $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$).

3°. Пусть преследуемый объект выбрал произвольное измеримое управление $v = v(t)$, значение которого в каждый момент времени $t \geqslant 0$ становится известным догоняющему. Тогда он по значению $v(t)$ выбирает значение $u(t)$ своего управляющего параметра u в тот же момент времени t так, чтобы

$$f(\xi(t), u(t), v(t)) = \xi^{\cdot}(t)$$

Очевидно, решение $z(t)$ уравнения (1.1), соответствующее управлениям $u(t)$, $v(t)$, совпадает с $\xi(t)$: $z(t) \equiv \xi(t)$ (см. п. 2). Поэтому $z(0) = z_0$ и $\xi(\tau_0) = z(\tau_0) \in M$.

Теорема доказана.

2. Рассмотрим нелинейные игры на плоскости. Укажем условия, при выполнении которых игру можно завершить из точек некоторой области. Далее, докажем оптимальность времени преследования относительно области (определение см. ниже).

Пусть движение вектора z описывается системой

$$(2.1) \qquad z_1^{\cdot} = z_2, \qquad z_2^{\cdot} = g(z, u, v)$$

Здесь, u, v — скалярные управляющие параметры, области изменения которых $P = Q = [-1, 1]$. Терминальное множество $M = \{0\}$. Относительно функции $g(z, u, v)$ предполагается, что она непрерывна по всем аргументам при всех z и $u \in P$, $v \in Q$, непрерывно дифференцируема по z_1, z_2 при $u = v = 1$, $u = v = -1$ и всех z. Далее предполагаются выполненными следующие условия.

1) Никакая траектория системы (2.1) не может за конечный промежуток времени уйти в бесконечность или прийти из бесконечности.

2) Пусть $f_1 = f_1(z) \equiv g(z, 1, 1)$, $f_2 = f_2(z) \equiv g(z, -1, -1)$.

При всех z и $i = 1, 2$

а) $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_1} < -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_2}\right)^2$

б) $\left(\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_1, \partial z_2}\right)^2 \leqslant \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_1^2}\,\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_2^2}, \qquad (-1)^i\left[\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_1^2} - \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_2^2}\right] \leqslant 0$

3) $f_1(z) > f_2(z)$ для всех z.

4) $f_1(0) > 0 > f_2(0)$

5) Функция $g(z, u, v)$ при каждом фиксированном v достигает своего максимума при $u = 1$, минимума при $u = -1$. Кроме того, $g(z, 1, v) \geqslant g(z, 1, 1)$, $g(z, -1, v) \leqslant g(z, -1, -1)$.

Рассмотрим управляемый объект, описываемый системой

$$(2.2) \qquad z_1^{\cdot} = z_2, \qquad z_2^{\cdot} = f(z, w)$$

$$f(z, w) = {}^1/_2\,[(1 + w) f_1(z) + (1 - w) f_2(z)]$$

Здесь управляющий параметр w может принимать значения из отрезка $W = [-1, 1]$.

Для системы (2.2) рассмотрим задачу быстрейшего попадания в начало координат плоскости R_2.

Все условия теоремы 3.32 работы [4] выполнены.

Действительно, в силу предположения 5) множество $g(z, P, Q) \supset f(z, W)$, т. е. любая траектория системы (2.2), одновременно служит и траекторией системы (2.1), поэтому выполнено условие А теоремы 3.32. Так как $f(z, 1) = f_1(z)$, $f(z, -1) = f_2(z)$, то выполнены и условия В, Г (см. 2). Далее, $\partial f / \partial w = f_1 - f_2 > 0$, согласно 3), и $f(0, 1) = f_1(0) > 0$, $f(0, -1) = f_2(0) < 0$, согласно 4); значит, условия (3.73), (3.74) из [4] также выполнены.

Следовательно [4], для управляемого объекта (2.2) при выполнении условий 1) — 5) существует область G ($\subset R_2$), из любой точки которой возможно оптимальное в области G движение в начало координат. Синтез оптимальных в области G управлений осуществляется следующим образом. Линия переключения Λ состоит из дуг σ_n^-, σ_n^+, $n = 1, 2, \ldots$, а синтезирующая функция $w(z)$ равна 1 ниже линии Λ и на дуге σ_1^+ и равна -1 выше линии Λ и на дуге σ_1^-.

Теорема 2. Пусть z_0 — произвольная точка области G, $T(z_0)$ — время, за которое по оптимальной траектории системы (2.2) фазовая точка переходит из z_0 в начало координат. Тогда из точки z_0 за время $T(z_0)$ можно завершить преследование.

Доказательство. Через $z_0(t)$ обозначим оптимальную траекторию системы (2.2), соединяющую точки z_0 и начало координат. Система (2.2) автономна, поэтому можно считать $z_0(0) = z_0$. Тогда $z_0(T(z_0)) = 0$. Убедимся, что траектория $z_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Очевидно, условие 1) выполнено. Так как $\dot{z}_{01}(t) = z_{02}(t)$, $\dot{z}_{02}(t) = f(z_0(t), w_0(t))$, где $w_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$ — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из z_0 в начало координат по траектории $z_0(t)$, то для проверки условия 2) достаточно показать, что $f(z_0(t), w_0(t)) \subset g(z_0(t), P, Q)$ для любого v и при почти каждом t. Имеем

$$f(z_0(t), w_0(t)) \subset [g(z_0(t), -1, -1), g(z_0(t), 1, 1)]$$

С другой стороны

$$g(z_0(t), P, Q) = [g(z_0(t), -1, v), \ g(z_0(t), 1, v)] \supset$$
$$\supset [g(z_0(t), -1, -1), g(z_0(t), 1, 1)]$$

Значит, $f(z_0(t), w_0(t) \subset g(z_0(t), P, v)$ для любого v и почти для каждого t. Следовательно, в силу теоремы 1 из z_0 можно закончить преследование.

В цитированной выше теореме из работы [4] утверждается оптимальность траекторий только в области G, т. е. они оптимальны по сравнению лишь с траекториями, целиком расположенными в G. Поэтому и в дифференциальной игре, описываемой системой (2.1), можно рассматривать оптимальность времени преследования относительно области G. Введем точное определение.

Определение. Пусть D — некоторое подмножество R_2, содержащее точку z_0. Число $t(z_0)$ называется оптимальным временем преследования относительно D, если: 1) за время $t(z_0)$ можно завершить преследование из точки z_0, 2) существует такое измеримое управление $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(z_0)$, что для любого измеримого управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(z_0)$, решение $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(z_0)$, системы (2.1), соответствующее управлениям $u(t)$, $v(t)$ и выходящее из z_0 при $t = 0$, удовлетворяет условиям $z(t) \in D$ при всех $t \in [0, t(z_0)]$ и $z(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, t(z_0))$.

Очевидно, если $D = R_2$, то введенная выше оптимальность совпадает с оптимальностью в смысле Л. С. Понтрягина [1].

Теорема 3. Если выполнены условия 1) — 5), то для любой точки $z_0 \in G$ время $T(z_0)$ оптимально относительно G.

Доказательство. Возможность завершения преследования из произвольной точки $z_0 \in G$ за время $T(z_0)$ установлена в теореме 2. Остается доказать справедливость второй части определения.

Допустим, что убегающий объект применяет управление $v(t) = w_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, а догоняющий — произвольное управление $u(t)$, $0 \leqslant \leqslant t \leqslant T(z_0)$. Траектория $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, соответствующая $u(t)$, $v(t)$, соединяет точки z_0, $z(T(z_0))$ и целиком расположена в G (см. определение). Пусть, для определенности, z_0 выше Λ, при $0 \leqslant t < t_1$ траектория $z(t)$ лежит в двумерной клетке Σ_1, при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — является частью одномерной клетки второго рода ν, при $t_2 \leqslant t < t_3$ — частью двумерной клетки Σ_2 и т. д. [4], наконец, при $t_k \leqslant t \leqslant T < T(z_0)$ — по клетке первого рода попадает в начало координат.

Как известно [4], функция $\omega(z) \equiv -T(z)$, $z \in G$, называемая функцией Беллмана, непрерывно дифференцируема в области $G \setminus \Lambda$ и удовлетворяет в ней уравнению Беллмана

$$(2.3) \qquad \max_{w \in W}\left[\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial\omega(z)}{\partial z_2} f(z, w)\right] = 1$$

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial\omega(z)}{\partial z_2} f(z, -1) = 1, \quad \text{если } z \text{ выше } \Lambda$$

Функция $z(t)$, $0 \leqslant t < t_1$, абсолютно-непрерывна, а функция $\omega(z)$ в области $G \setminus \Lambda$ гладкая. Поэтому [5] их суперпозиция $\omega(z(t))$, $0 \leqslant \leqslant t < t_1$, абсолютно-непрерывна. Значит, почти для всех $t \in [0, t_1]$ существует производная $d\omega(z, (t))/dt$ и ее можно вычислить по формуле

$$(2.4) \qquad \frac{d\omega(z(t))}{dt} = \frac{\partial\omega(z(t))}{\partial z_1} z_1(t) + \frac{\partial\omega(z(t))}{\partial z_2} g(z(t), u(t), -1)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $\varepsilon < t_1$. Рассмотрим (2.4) при $0 \leqslant t \leqslant t_1 - \varepsilon$. Так как при $t \in [0, t_1 - \varepsilon]$ функция $\partial\omega(z(t))/ /\partial z_2 < 0$ [4], то, согласно (2.3), имеем $d\omega(z(t))/dt \leqslant 1$. Значит, $\omega(z(t_1 - \varepsilon)) - \omega(z(0)) \leqslant t_1 - \varepsilon < t_1$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $t_1 \geqslant \omega(z(t_1)) - \omega(z_0)$.

Пусть теперь $z(t)$ лежит в одномерной клетке первого рода при $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Из-за специального вида системы (2.1) это возможно тогда и только тогда, когда

$$g(z(t), u(t), w_0(t)) = f(z(t), 1), \quad g(z(t), u(t), w_0(t)) = f(z(t), -1)$$

Следовательно, фазовая точка по траектории $z(t)$ движется с той же скоростью, с какой она движется в силу системы (2.2) вдоль Λ от $z(\tau_1)$ до $z(\tau_2)$. Значит, $\tau_2 - \tau_1 = \omega(z(\tau_2)) - \omega(z(\tau_1))$.

Известно, что если $z(t)$ при $\tau < t < s$ — часть двумерной или одномерной клетки первого рода, то $s - \tau \geqslant \omega(z(s)) - \omega(z(\tau))$. Но в данном случае фазовая точка $z(t)$ может некоторое время идти по одномерной клетке первого рода. Можно доказать, что если $z(t) \in \nu$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то $t_2 - t_1 \geqslant \omega(z(t_2)) - \omega(z(t_1))$.

Для этого достаточно доказать справедливость уравнения Беллмана на ν, т. е. достаточно, чтобы [6]: а) оптимальные траектории системы (2.2) не только подходили (это вытекает из условий 1) — 5)), но и отходили под ненулевым углом от клетки ν, б) линии уровня функции $\omega(z)$ в точках ν не касались клетки ν.

Вначале докажем справедливость условия а). Оптимальные траектории системы (2.2), идущие по клетке Σ_2, подходят к некоторой одномерной клетке ν_1 под ненулевым углом [4]. Пусть z°—произвольная точка клетки ν_1, а $z^\circ(t)$ — оптимальная траектория системы (2.2), проходящая через нее. Пусть $\varphi(\Delta)$, $|\Delta| < \varepsilon$ — уравнение клетки ν_1 в окрестности точки z° и $\varphi(0) = z^\circ$. Оптимальную траекторию системы (2.2), проходящую через точку $\varphi(\Delta)$, обозначим через $z^\Delta(t)$. Из-за автономности системы (2.2) можно считать $z^\Delta(0) = \varphi(\Delta)$, $|\Delta| < \varepsilon$. Траектория $z^\Delta(t)$ при некотором $t = \theta(\Delta)$ пересекает клетку ν, $\theta(\Delta) < 0$. Как доказано в [4], функция $\theta(\Delta)$ гладким образом зависит от параметра Δ. В силу гладкости клетки ν_1 и функция $\varphi(\Delta)$, $|\Delta| < \varepsilon$ гладкая. Имеем $\varphi^{\cdot}(\Delta) = \varphi(0) + \varphi^{\cdot}(0)\,\Delta + 0(\Delta)$ (здесь и далее через $o(\Delta)$ обозначена бесконечно малая величина порядка выше первого относительно Δ). Но $z^\Delta(0) = \varphi(\Delta)$, $z^\circ(0) = \varphi(0) = z^\circ$. Следовательно [4], $z^\Delta(\theta(\Delta)) = z^\circ(\theta(\Delta)) + \delta z(\theta(\Delta))\,\Delta + o(\Delta)$. Здесь через $\delta z(t)$ обозначено решение системы в вариациях

$$\text{(2.5)}\qquad \delta z_1^{\cdot} = \delta z_2, \quad \delta z_2^{\cdot} = \frac{\partial f(z^\circ(t), w_0(t))}{\partial z_1}\,\delta z_1 + \frac{\partial f(z^\circ(t), w_0(t))}{\partial z_2}\,\delta z_2$$

с начальным условием $\delta z(0) = \varphi^{\cdot}(0)$.
Так как, очевидно, $\theta(\Delta) = \theta(0) + \theta'(0)\,\Delta + o(\Delta)$, то

$$\text{(2.6)}\qquad z^\Delta(\theta(\Delta)) = z^\circ(\theta(0)) + [z^{\cdot\circ}(\theta(0))\,\theta'(0) + \delta z(\theta(0))]\,\Delta + o(\Delta)$$

Точка $z^\Delta(\theta(\Delta))$ при всех $|\Delta| < \varepsilon$ принадлежит клетке ν. Поэтому в силу (2.6) вектор

$$\text{(2.7)}\qquad \delta z(\theta(0)) + z^{\cdot\circ}(\theta(0))\,\theta'(0)$$

является касательным к клетке ν в точке $z^\circ(\theta(0))$. Теперь докажем, что вектор (2.7) не коллинеарен вектору $z^{\cdot\circ}(\theta, (0))$, т. е. траектория $z^\circ(t)$ отходит от клетки ν под ненулевым углом. Допустим, что $\delta z(\theta(0)) + z^{\cdot\circ}(\theta(0))\,\theta'(0) = \lambda z^{\cdot\circ}(\theta(0))$, $\lambda \neq 0$. Можно проверить, что функция $z^{\cdot\circ}(t)$, $\theta(0) \leqslant t \leqslant 0$ — решение системы (2.5). Следовательно, функция

$$\delta z(t) + z^{\cdot\circ}(t)\,\theta'(0), \quad \theta(0) \leqslant t \leqslant 0$$

также является решением системы (2.5). В силу теоремы единственности

$$\text{(2.8)}\qquad \delta z(t) + z^{\cdot\circ}(t)\,\theta'(0) \equiv \lambda z^{\cdot\circ}(t)$$

При $t = 0$ из (2.7) имеем

$$\text{(2.9)}\qquad \delta z(0) + z^{\cdot\circ}(0)\,\theta'(0) = \lambda z^{\cdot\circ}(0)$$

Но равенство (2.9) возможно тогда и только тогда, когда вектор $z^{\cdot\circ}(0)$, т. е. касательный вектор к траектории $z^\circ(t)$ в момент времени $t = 0$, коллинеарен вектору $\varphi^{\cdot}(0)$, т. е. касательному вектору к клетке ν_1 в точке z°. Пришли к противоречию, ибо, как отмечено выше, траектория $z^\circ(t)$ к ν_1 подходит под ненулевым углом. Таким образом, траектория $z^\circ(t)$ от ν отходит под ненулевым углом. Условие а) доказано.

Перейдем к доказательству условия б). Через $\psi(t)$ обозначим решение сопряженной системы [4], соответствующее оптимальной траектории $z^\circ(t)$ и управлению $w_0(t)$. Положим, что $z^\circ(t) \in \Sigma_1$, $0 \leqslant t < \tau_1$ и $z^\circ(t) \in \Sigma_2$, $\tau_1 < t < \tau_2$. Как известно [4], при $t \in [0, \tau_1)$ вектор $\psi(t) = \lambda_1 \operatorname{grad} \omega(z^\circ(t))$, $\lambda_1 > 0$, при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ вектор $\psi(t) = \lambda_2 \operatorname{grad} \omega(z^\circ(t))$, $\lambda_2 > 0$, т. е. в точках траектории $z^\circ(t)$, лежащих в Σ_1, Σ_2, вектор $\psi(t)$ направлен ортогонально к линии уровня. В силу условия а) линия уровня $\omega(z) = \omega(z^\circ(t))$ гладкая в точке $z^\circ(\tau_1)$ [6]. Теперь из соображений непрерывности заключаем, что $\psi(\tau_1) = \lambda_1 \operatorname{grad} \omega(z^\circ(\tau_1))$. Но [4] вторая компонента вектора $\psi(\tau_1)$ равна нулю. Поэтому касательный вектор к линии уровня $\omega(z) = \omega(z^\circ(\tau_1))$ в точке $z^\circ(\tau_1)$ направлен параллельно оси z_2. В [4] доказано, что клетка ν не имеет вертикальных касательных. Значит, линия уровня $\omega(z) = \omega(z^\circ(\tau_1))$ не касается клетки ν в точке $z^\circ(\tau_1)$. Так как $z^\circ(\tau_1)$ пробегает всю клетку ν, то условие б) доказано.

Имеем

$$T = (T - t_k) + (t_k - t_{k-1}) + \ldots + (t_2 - t_1) + (t_1 - 0) \geqslant$$
$$\geqslant [\omega (z (T)) - \omega (z (t_k))] + [\omega (z (t_k)) - \omega (z (t_{k-1}))] + \ldots$$
$$\ldots + [\omega (z (t_2)) - \omega (z (t_1))] + [\omega (z (t_1)) - \omega (z (0))] +$$
$$= -\omega (z (0)) = T (z_0)$$

Пришли к противоречию, ибо по предположению $T < T(z_0)$. Теорема доказана.

3. *Пример.* Пусть игра описывается системой [4]

$$z^{\cdot}_1 = z_2, \quad z^{\cdot}_2 = -\omega^2 z_1 - 2\delta z_2 + \rho u - \sigma v \tag{3.1}$$

Здесь ρ — положительное, ω^2, δ, σ — неотрицательные числа, $\rho > \sigma$, $\delta^2 < \omega^2$, множества $P = Q = [-1,1]$, $M = \{0\}$. Условия 1) — 5) для (3.1) легко проверяются. Как известно [4], область G совпадает со всей плоскостью переменных z_1, z_2. Значит, оптимальность относительно G для (3.1) превращается в оптимальность в смысле Л. С. Понтрягина.

Замечание. Пример (3.1) относится к классу линейных однотипных объектов [7]. Используя метод экстремального прицеливания, можно установить возможность завершения преследования из любой точки и при меньшей информированности преследователя (в каждый момент времени $t \geqslant 0$ ему известно лишь значение $z(t)$ фазового переменного z). В линейных дифференциальных играх эта ситуация, как правило, является общей [8, 9].

Поступила 27 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 4.
2. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 2.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.
4. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
5. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., Гостехтеоретиздат, 1957.
6. *Сатимов Н.* О гладкости функций Беллмана для линейных систем. Докл. АН УзССР, 1971, № 7.
7. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
8. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Дифференциальная игра наведения. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 4.
9. *Батухтин В. Д., Субботин А. И.* Об условиях завершения игры преследования. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 1.