Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОЙ ПОГОНИ ЗА ТОЧКОЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается игровая задача [1, 2], близкая по постановке к задачам [3–5] и являющаяся непосредственным продолжением результатов статьи [6]. Две материальные точки единичных масс (первый и второй игроки) движутся в трехмерном пространстве под действием одних только управляющих сил F_1, F_2. Управление $u = F_1$ ограничено по полному импульсу, а управление $-v = F_2$ ограничено по модулю. Множеством M окончания игры является произвольная фиксированная точка в пространстве относительных положений и скоростей игроков, а платой — время приведения относительной траектории в эту точку. Это время минимизирует первый и максимизирует второй игрок. Решение во многом аналогично решению [6], где определялись минимаксы времени до «жесткой» (по координатам) и до «мягкой» (по координатам и скоростям) встречи точек. В заключение рассмотрена задача мягкой встречи двух управляемых точек в позиционном линейном центральном поле тяготения.

В ходе решения озаглавленной задачи сформирована некоторая функция $q(w, p)$, зависящая от позиции w игры и параметра p, и все пространство W возможных позиций разделено на области W° и W_0. В области W° существует функция $p_2(w) < 0$, определяемая как наименьший корень уравнения $q(w, p) = 0$. В области W° сформированы оптимальные управления первого и второго игроков и вычислено минимаксное время. В области W_0, где уравнение $q(w, p) = 0$ либо вовсе не допускает корней, либо допускает лишь неотрицательные корни, сформировано управление второго игрока, позволяющее ему уклониться от попадания на множество M при любых действиях первого игрока.

1. Пусть векторы r_1, r_2 определяют положение точек m_1, m_2 относительно некоторой неподвижной системы координат, а два фиксированных вектора b и a определяют множество окончания игры по уравнениям M° $[r_1 - r_2 = b,\ r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot} = a]$. Полагая $x = r_1 - r_2 - b$, $y = r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot}$, составим уравнения относительного движения в виде

$$(1.1)\qquad x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = u + v, \qquad \mu^{\cdot} = -|u|$$

$$(1.2)\qquad \mu \geqslant 0, \qquad |v| \leqslant \nu$$

Последнее уравнение системы (1.1) в совокупности с ограничением $\mu \geqslant 0$ эквивалентно «импульсному» ограничению

$$(1.3)\qquad \mu_0 - \int_0^\tau |u|\,dt = \mu^{(1)}(\tau) \geqslant 0$$

на управляющее воздействие u первого игрока. Это ограничение допускает скачки переменных y, μ по формулам

$$(1.4)\qquad y^{(1)} = y + \mu_1, \qquad \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1| \geqslant 0$$

Вектор w, определяемый совокупностью векторов и чисел $w = [x, y, a, \mu]$, назовем позицией, а результат $w^{(1)} = [x, y^{(1)} = y + \mu_1(w), a, \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1|(w)]$ импульсных действий первого игрока выделим отдельным обозначением.

Пусть вектор $w^{(1)}$ ($t \geqslant 0$) задан как функция времени. Позицией при $t = 0$ назовем $w(0)$ — ее начальное значение, а позицией $w(\tau > 0)$ назовем левый предел $w(\tau - 0)$ вектора $w^{(1)}$.

Пару управлений $u(w, v)$, $v(w)$ и отвечающую им единственную траекторию $w^{(1)}$ ($t \geqslant 0$, $\{u(w, v), v(w)\}$, $w(0)$) назовем допустимыми, если траектория почти при всех t удовлетворяет уравнениям (1.1), при всех t непрерывна справа и удовлетворяет ограничениям (1.2), на всяком конечном отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ допускает конечное число скачков по формулам (1.4) и абсолютно непрерывна на интервалах непрерывности.

Спроектируем вектор y на вектор x и на плоскость, нормальную к x. Получим проекцию y_α и вектор y_β и введем правую тройку единичных ортов j_α, j_β, j_γ по формулам $j_\alpha = x / |x|$, $j_\beta = y_\beta / |y_\beta|$ при $|x| > 0$, $|y_\beta| > 0$, $j_\alpha = x / |x|$, j_β, j_γ произвольны при $|x| > 0$, $|y_\beta| = 0$.

Обозначая нижними индексами α, β, γ проекции векторов на орты, получим следствия уравнений (1.1) в виде

$$
\begin{aligned}
&|x|^{\cdot} = y_\alpha, \quad y_\alpha = u_\alpha + v_\alpha + y_\beta^2 / |x| \\
&|y_\beta|^{\cdot} = u_\beta + v_\beta - y_\alpha |y_\beta| / |x|, \quad a_\alpha^{\cdot} = a_\beta |y_\beta| / |x| \\
&a_\beta^{\cdot} = -a_\alpha |y_\beta| / |x| \quad \text{при } |x| > 0, \ |y_\beta| > 0.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

При $|x| > 0$, $|y_\beta| = 0$ уравнения (1.5) сохраняются, за исключением уравнения для $|y_\beta|^{\cdot}$, которое приобретает вид

$$|y_\beta|^{\cdot} = [(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2]^{1/2}$$

Уравнения (1.4) для скачка запишем в виде

$$y_\alpha^{(1)} = y_\alpha + \mu_{1\alpha}, \qquad |y_\beta^{(1)}| = [(|y_\beta| + \mu_{1\beta})^2 + \mu_{1\gamma}^2]^{1/2}$$

Поскольку интуитивно ясно, что решение задачи зависит только от совокупности величин $|x|$, y_α, y_β, a_α, a_β, μ, сохраним за ней обозначение w и только при $|x| = 0$ будем под величиной w подразумевать совокупность y, a, μ.

При $\nu > 0$ нормированием переменных можно получить $\nu = 1$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать два случая: $\nu = 1$, $\nu = 0$. Возможность скачкообразных изменений скорости y трансформирует множество M° в множество

$$M\,[\,|x| = 0, \quad \mu \geqslant |y - a|\,]$$

Подход к множеству $|x| = 0$ в момент $\tau > 0$ сопровождается условием $y_\beta(\tau) = 0$, поэтому для решения вопроса о принадлежности множеству M достаточно знать знак разности

$$\mu - [a^2 - 2a_\alpha(\tau)y_\alpha(\tau) + y_\alpha^2(\tau)]^{1/2}$$

Если же в начальный момент $|x(0)| = 0$, то для решения вопроса о принадлежности к M нужно знать знак разности $\mu - |y - a|$, поэтому будем считать, что при $|x| = 0$ известны векторы a, y.

2. По аналогии со статьей [6] предположим, что существует некоторая функция $p_0(w) < 0$, которая удовлетворяет оценке

(2.1) $$q(w, p_0) = \mu - l_1(w, p_0) - l_2(w, p_0) + |x| / p_0 \geqslant 0$$

Здесь

$$l_1(w, p) = \sqrt{a_\theta^2 + (p - a_\alpha)^2}, \qquad l_2(w, p) = \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha^2)}$$
$$a_\theta = a_\beta j_\beta + a_\gamma j_\gamma$$

Пусть, кроме того, функция $p_0(w)$ такова, что и равенства

(2.2) $$p_0(|x|, y_\alpha, |y_\beta| = 0, a_\alpha, a_\beta, \mu) - y_\alpha = 0$$

следует равенство

(2.3) $$p_0(|x_1|, y_\alpha, |y_\beta| = 0, a_\alpha, a_\beta, \mu^1) - y_\alpha = 0$$

для любых $|x_1| \leqslant |x|$, $\mu^1 \leqslant \mu$.

Тогда управление

$$u_1(w, v) = +(p_0 - y_\alpha)\delta j_\alpha - |y_\beta|\delta j_\beta, \qquad w \in [l_2(w, p_0) > 0]$$
$$u_1(w, v) = -v, \qquad w \in [l_2(w, p_0) = 0]$$

приведет траекторию на множество M через время

$$T_1(w) = -|x| / |p_0|(w)$$

Действительно, в начальный момент имеем равенство

$$w^{(1)} = [|x|, p_0(w), |y_\beta^{(1)}| = 0, a_\alpha, a_\beta, \mu^{(1)} = \mu - l_2(w, p_0)]$$

В дальнейшем происходит прямолинейное равномерное движение по уравнениям

$$|x|^\cdot = p_0(w), \qquad y_\alpha^\cdot = y_\beta^\cdot = 0, \qquad \mu^\cdot = -|v|$$

и вдоль этого движения реализуется управление $u_1(w, v) = -v$ согласно ограничениям (2.2), (2.3).

Вопрос о возможности реализации управления $u_1(w, v)$ естественно приводит к задаче исследования на максимум в области $p < 0$ функции $q(w, p)$.

Для первой $q^{(1)}$ и второй $q^{(2)}$ частных производных функции $q(w, p)$ по переменной p получим выражения

$$q^{(1)} = (a_\alpha - p) / l_1 + (y_\alpha - p) / l_2 - |x| / p^2$$
$$q^{(2)} = -a_\theta^2 / l_1^3 - y_\beta^3 / l_2^3 + 2|x| / p^3 < 0$$

Эти формулы показывают, что при $w \in D_1 [|x| > 0, |a_\theta| > 0, |y_\beta| > 0]$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $p_1(w) < 0$, отвечающая равенствам

$$q^{(1)}(w, p_1(w)) = 0, \qquad r(w) = q(w, p_1(w)) = \max_{p<0} q(w, p)$$

Области

$$D_2\ [\,|x|>0,\ |a_\theta|=0,\ |y_\beta|>0]$$
$$D_3\ [\,|x|>0,\ |a_\theta|>0,\ |y_\beta|=0]$$
$$D_4\ [\,|x|>0,\ |a_\theta|=|y_\beta|=0]$$

требуют более подробного исследования. В области D_2 имеем равенства

$$q^{(1)}(w,\ p-a_\alpha<0)=1+(y_\alpha-p)\,/\,l_2-|x|\,/\,p^2$$
$$q^{(2)}(w,\ p-a_\alpha>0)=-1+(y_\alpha-p)\,/\,l_2-|x|\,/\,p^2<0$$

Следствием этих соотношений является альтернатива:

Точка максимума $p_1(w)$ отвечает уравнению

$$q^{(1)}(w,\ p-a_\alpha<0)=1-(y_\alpha-p)\,/\,l_2(w,p)-|x|\,/\,p^2=0 \tag{2.4}$$

если позиция

$$w\in D_{2,1}=D_2\cap\{[a_\alpha\geqslant 0]\cup[a_\alpha<0,\ q_2(w)=$$
$$=1+(y_\alpha-a_\alpha)\,/\,l_2(w,a_\alpha)-\ x\ \,/\,{a_\alpha}^2<0]\}$$

Точка максимума $p_1(w)$ отвечает уравнению

$$p_1(w)=a_\alpha \tag{2.5}$$

если позиция

$$w\in D_{2,2}=D_2\cap[a_\alpha<0,\ q_2(w)\geqslant 0]$$

Исследование в областях D_3, D_4 проводится аналогично:

$$q^{(1)}(w,p_1-y_\alpha<0)=(a_\alpha-p_1)\,/\,l_1(w,p_1)+1-|x|\,/\,p_1^2=0 \tag{2.6}$$

если позиция

$$w\in D_{3,1}=D_3\cap\{[y_\alpha\geqslant 0]\cup[y_\alpha<0,\ q_3(w)=$$
$$=(a_\alpha-y_\alpha)\,/\,l_1(w,y_\alpha)+1-|x|\,/\,{y_\alpha}^2<0]\}$$

Точка максимума $p_1(w)$ отвечает уравнению

$$p_1(w)=y_\alpha \tag{2.7}$$

если позиция

$$w\in D_{3,2}=D_3\cap[y_\alpha<0,\ q_3(w)\geqslant 0]$$

В области D_4 осуществляется один из двух случаев

$$p_1(w)=-\sqrt{|x|\,/\,2},\quad w\in D_{4,1}=D_4\cap[-\sqrt{|x|\,/\,2}< \min(y_\alpha,a_\alpha)] \tag{2.8}$$

$$p_1(w)=\min(y_\alpha,a_\alpha),\quad w\in D_{4,2}=D_4\cap[-\sqrt{|x|\,/\,2}\geqslant \min(y_\alpha,a_\alpha)] \tag{2.9}$$

Итак, функция $p_1(w)<0$ и функция $r(w)=\max_{p<0}q(w,p)$ определены соотношениями $q^{(1)}(w,p)=0$, (2.4)—(2.9) в областях $D_1,\ldots,D_4$.

3. Приступим к построению управления $v_0(w)$, решающего задачу

$$r^{\cdot}(w,\ u_0(w,v),\ v_0(w))=\min_v\max_u r^{\cdot}(w,\ u(w,v),\ v(w))$$

В области D_5 $[|x| > 0,\ l_2(w, p_2(w)) > 0]$ это построение не встречает затруднений и приводит к управлению

$$v_0(w) = (-(p_1(w) - y_\alpha)j_\alpha + |y_\beta| j_\beta) / l_2(w, p_1), \quad w \in D_5$$

В областях

$$D_6\ [|x| > 0,\ l_2(w, p_1(w)) = 0,\ l_1(w, p_1(w)) > 0]$$

$$D_7\ [|x| > 0,\ l_2(w, p_1(w)) = 0,\ l_1(w, p_1(w)) = 0]$$

вычисление $r^\cdot(w, u, v)$ встречает трудности. В этих областях будем, задавая управление u, v, вычислять $p_1(w + \Delta w)$ по тем формулам из набора $q^{(1)}(w + \Delta w, p_1(w + \Delta w)) = 0$, (2.4)—(2.9), которые отвечают принадлежности вектора

$$w + \Delta w = w + w^\cdot(w, u, v)\Delta t$$

областям $D_1, D_{2,1}, \ldots, D_{4,2}$) соответственно. В большинстве случаев предельный переход при $\Delta t \to 0$ в этих формулах дает возможность вычислить $p_1^\cdot(w, u, v)$. В тех случаях, когда производная $p_1^\cdot(w^\cdot, u, v)$ обращается в бесконечность, оказывается возможным вычислить $p_1(w + \Delta w)$; затем вычислить $r(w + \Delta w)$ и производную $r^\cdot(w, u, v)$, которая окажется конечной.

Применяя описанную технику, придем к выражению

$$v_0(w) = -sj_\alpha + \sqrt{1 - s^2}\, j_\beta$$

$$s = \begin{cases} 1 - |x| / a_\alpha^2, & w \in D_6 \\ (a_\alpha - y_\alpha) / l_1(w, y_\alpha) - |x| / y_\alpha^2, & w \in D_7 \end{cases}$$

Можно показать, что при $|x| > 0$ функция $s(w)$ заключена в пределах $1 > s(w) \geqslant -1$ и поэтому извлечение квадратного корня всегда возможно.

Продолжим на множество M_1 $[|x| = 0,\ \mu - |a - y| < 0]$ функции $r(w)$ и $v_0(w)$ по формулам

$$r(w) = \mu - |a - y|, \qquad v_0(w) = y - a / |y - a|$$

и приступим к доказательству леммы.

Лемма 3.1. Функция $r(w)$ не возрастает вдоль любой траектории, определяемой допустимой парой $u(w, v)$, $v_0(w)$.

Доказательство леммы 3.1 во многом аналогично доказательству соответствующей леммы статьи [6], поэтому некоторые утверждения не будем доказывать, ограничиваясь соответствующей ссылкой.

3.1.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$ не увеличивает функцию $r(w)$ [6].

3.1.2. Правая производная $r^\cdot(w, u, v_0(w))$ неположительна, причем

(3.1) $$r^\cdot(w, u, v_0(w)) < 0 \qquad w \in D_5$$

(3.2) $$r^\cdot(w, u \neq u_0(w, v), v_0(w)) < 0, \qquad w \in (D_6 \cup D_7) \cap [s > -1]$$

(3.3) $$r^\cdot(w, u_0(w, v), v_0(w)) = 0 \qquad w \in D_6 \cup D_7$$

Для доказательства оценки (3.3) вычислим производную $r^{\cdot}$, разбивая ее на два слагаемых

$$r^{\cdot}(w, u, v_0(w)) = R_1(w) + R_2(w, u)$$
$$R_1(w) = y_\alpha / p_1 + p_1\alpha_\beta \mid y_\beta \mid / \mid x \mid l_1 + p_1 y_\beta^2 / \mid x \mid l_2 - 1$$
$$R_2(w, u) = - \mid u \mid + (p_1 - y_\alpha)u_\alpha / l_2 - \mid y_\beta \mid u_\beta / l_2$$
$$p_1 = p_1(w), \quad l_1 = l_1(w, p_1), \quad l_2 = l_2(w, p_1)$$

Простыми действиями получим равенство

$$R_1(w) = p_1 / \mid x \mid [(\mid x \mid / p_1^2)(y_\alpha - p_1) + a_\beta \mid y_\beta \mid / l_1 + y_\beta^2 / l_2]$$

Заменяя в первом слагаемом в квадратной скобке множитель $\mid x \mid / p_1^2$ на сумму $(a_\alpha - p_1) / l_1 + (y_\alpha - p_1) / l_2$, по уравнению $q^{(1)}(w, p_1(w)) = 0$, получим

$$R_1(w) = p_1 [l_1 l_2 + (y_\alpha - p_1)(a_\alpha - p_1) + a_\beta \mid y_\beta \mid] / l_1 \mid x \mid < 0 \tag{3.4}$$

Последняя оценка — следствие соотношений

$$p_1(w) < 0, \quad (y_\alpha - p_1) / l_2 + (a_\alpha - p_1) / l_1 = \mid x \mid / p_1^2 \tag{3.5}$$

Действительно, следствием предположения о равенстве нулю выражения в квадратных скобках в (3.4) является равенство нулю левой части второго соотношения (3.5).

Примечание. Оценка (3.4) совместно с оценкой $R_2(w, u) \leqslant 0$ устанавливает оценку (3.1) при $w \in D_5 \cap [l_1 > 0, \ l_2 > 0]$. В области $w \in D_5 \cap [l_1 = 0, \ l_2 > 0]$ оценка (3.1) устанавливается аналогично.

Соотношение (3.2) и (3.3) установлены в области $D_{4,2} \cap [a_\alpha = y_\alpha < 0, \ -\sqrt{\mid x \mid /2} < a_\alpha]$ при построении управления $v_0(w)$. В остальных частях областей $(D_6 \cup D_7) \cap [s > -1]$, $D_6 \cup D$ эти соотношения проверяются аналогично.

3.1.3. Область $(D_6 \cup D_7) \cap [s = -1]$ характерна тем признаком, что любое управление u, сохраняющее оценку $r^{\cdot}(w, u, v_0(w)) \geqslant 0$, реализует равенство $r^{\cdot}(w, u, v_0(w)) = - \mid u \mid - u_\alpha = 0$ при $u_\alpha < 0$, $u_\beta = u_\gamma = 0$.

Можно, однако, показать, что это управление не может быть импульсным, так как любое импульсное управление $u = -\mu_1 \delta j_\alpha$ уменьшит функцию $r(w)$.

3.1.4. Приращение $\Delta r(w, u, \Delta t, v_0(w)\Delta t) \leqslant 0$ при $w \in M_1$ и малых Δt.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Доказательство леммы 3.1 закончено.

Следствием леммы 3.1 является теорема.

Теорема 3.1. Если $w(0) \in W_0 = [\mid x \mid > 0, \ r(w) < 0] \cup M_1$, то никакая допустимая пара $u(w, v)$, $v_0(w)$ не может привести траекторию на множество M за конечное время. Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы статьи [6] [1].

4. В области $D^\circ \ [\mid x \mid > 0, \ r(w) \geqslant 0]$ существует функция $p_2(w)$ — наименьший корень уравнения $q(w, p) = 0$.

---

[1] Непрерывность функций $p_1(w)$, $r(w)$, $p_2(w)$, $T^0(w)$ устанавливается аналогично [6].

Теорема 4.1. Пара управлений

$$u^\circ(w) = (p_2 - y_\alpha)\,\delta j_\alpha - |y_\beta|\,\delta j_\beta \quad \\ v^\circ(w) = -u^\circ(w)/|u^\circ(w)| \quad \Bigg\} \quad w \in D^\circ \cap [l_2(w, p_2) > 0] \tag{4.1}$$

$$u^\bullet(w, v) = -v \quad \\ v^\circ(w) = v_0(w) \quad \Bigg\} \quad w \in D^\circ \cap [l_2(w, p_2) = 0] \tag{4.2}$$

реализует время $T\,[u^\circ, v^\circ]$ попадания на множество M, равное

$$T\,[u^\circ, v^\circ] = T^\circ(w) = -\,|x|\,/\,p_2(w).$$

и это время удовлетворяет оценкам

$$T\,[u, v^\circ] \leqslant T\,[u^\circ, v^\circ] \leqslant T\,[u^\circ, v]$$

для любых допустимых пар $(u\,(w, v),\ v^\circ(w))$, $\quad (u^\circ\,(w, v),\ v\,(w))$.

Доказательство теоремы 4.1 состоит в последовательном доказательстве ряда утверждений.

4.1.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta \neq m u^\circ(w)$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$ либо строго уменьшает функцию $T^\circ(w)$, либо переводит позицию в область W_0 [6].

4.1.2. Любое конечное управление $u\,(w, v)$ при $w \in [r\,(w) > 0,$ $l_2\,(w, p_2) > 0]$ реализует оценку $T^{\circ\cdot}(w, u, v^\circ(w)) > -1$.

Доказательство. При $w \in [r\,(w) > 0,\ l_2\,(w, p_2) > 0,\ l_1\,(w, p_2) > 0]$ производную $T^{\circ\cdot}$ можно получить в виде

$$T^{\circ\cdot}(w, u, v^\circ(w)) = -1 + T_1(w) + T_2(w, u) \quad T_1(w) =$$
$$= -\,[l_1(w, p_2)\, l_2(w, p_2) + (a_\alpha - p_2)(y_\beta - p_2) + a_\beta\,|y_\beta|\,/\,p_2 q^{(1)}\, l_1(w, p_2);$$
$$q^{(1)} = q^{(1)}(w, p_2) = (a_\alpha - p_2)\,/\,l_1(w, p_2) + (y_\alpha - p_2)/l_2(w, p_2) - |x|\,/\,p_2{}^2 > 0$$
$$T_2(w, u) = -\,[-\,|u| + (p_2 - y_\alpha)\,u_\alpha\,/\,l_2(w, p_2) - |y_\beta|\,u_\beta\,/\,l_2(w, p_2)]\,/\,p_2 q^{(1)}$$

Соображения, аналогичные примененным в доказательстве утверждения 3.1.2 леммы 3.1, позволяют на основании оценок $p_2 < 0$, $q^{(1)}(w, p_2) > 0$ установить оценку $T_1(w) > 0$. Напомним, что оценка $q^{(1)}(w, p_2) > 0$ есть следствие определения $p_2(w)$ как наименьшего корня уравнения $q\,(w, p) = 0$. Оценки $T_1(w) > 0$, $T_2(w, u) \geqslant 0$ завершают доказательство утверждения 4.1.2 при $l_1(w, p_2) > 0$. Случай $l_1(w, p_2) = 0$ доказывается аналогично.

4.1.3. В области

$$[r\,(w) = 0,\ l_2(w, p_2) > 0] \cup [r\,(w) = l_2(w, p_2) = 0,\ s > -1]$$

любое управление $u \neq u^\circ(w)$ $(u \neq u^\circ(w, v) = -v)$ в паре с $v^\circ(w)$ переводит позицию в область W_0.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в указанной области $p_1(w) = p_2(w)$, и вспомнить, что любое управление $u \neq u^\circ(w)$ при $w \in [r\,(w) = 0,\ l_2(w, p_1) > 0]$ реализует оценку $r^\cdot(w, u, v^\circ(w) = v_0(w)) < 0$, а любое управление $u \neq -v$ при $w \in D^\circ \cap [r\,(w) = l_2(w, p_2) = 0,\ s > -1]$ либо реализует оценку $r^\cdot(w, u, v_0(w)) < 0$, либо равенство $r^\cdot(w, u, v_0(w)) = 0$, но при этом переводит позицию в область $D^\circ \cap [r\,(w) = 0,\ l_2(w, p_1) > 0]$.

4.1.4. Как было отмечено в п. 3.1.3, в области $[r\,(w) = l_2(w, p_2) = 0,$ $s = -1]$ равенство $r^\cdot(w, u, v_0(w)) = 0$ сохраняет любое управление $u = u_\alpha j_\alpha$, $u_\alpha < 0$ при условии, что u_α достаточно велико по модулю, т. е. $s^\circ(w, u, v_0) \geqslant 0$. Однако реализация достаточно большого по модулю, но не носящего характера импульса, управления $u_\alpha < 0$ не может изменить время $T^\circ(w)$, так как позиция в следующий момент времени t попадает на множество

$$[r(w) = l_2(w, p_2) = 0, s > -1]$$

Утверждения 4.1.1 — 4.1.4 исчерпывают доказательство первой оценки системы (4.2). Для доказательства второй оценки достаточно установить легко проверяемое равенство $T[u^\circ, v^\circ] = T[u^\circ, v]$. Доказательство теоремы 4.1 закончено.

5. Пусть $\nu = 0$, тогда приходим к задаче быстродействия на множество M. В этом случае многие вычисления можно провести в явном виде. Возникают, однако, и некоторые трудности. Первая из трудностей состоит в том, что функция $q(w, p) = \mu - l_1(w, p) - l_2(w, p)$ может не допускать стационарной точки максимума в области $p \leqslant 0$, а вторая встретится тогда, когда стационарные точки заполнят целые отрезок $a_\alpha \leqslant p \leqslant y_\alpha$. Обозначая через $p_1(w)$ наименьшее из всех p, при которых функция $q(w, p)$ достигает максимума, а через $p_2(w)$, как и раньше, наименьший корень уравнения $q(w, p) = 0$, приведем результаты исследования

$$\begin{aligned} &(5.1) \quad p_1(w) = (a_\alpha |y_\beta| + |a_\theta| y_\alpha) / (|y_\beta| + |a_\theta|) \\ &r(w) = \mu - \sqrt{(|y_\beta| + |a_\theta|)^2 + (a_\alpha - y_\alpha)^2} \\ &|a_\theta| = \sqrt{a_\beta^2 + a_\gamma^2} \\ &w \in [D_1 \cup D_2 \cup D_3] \cap [a_\alpha |y_\beta| + |a_\theta| y_\alpha \leqslant 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(5.2) \quad p_1(w) = \min(a_\alpha, y_\alpha), \quad r(w) = \mu - |a_\alpha - y_\alpha| \\ &w \in D_4 \cap [\min(a_\alpha, y_\alpha) \leqslant 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(5.3) \quad p_1(w) = 0, \quad r(w) = \mu - |a| - |y| \\ &w \in \{[D_1 \cup D_2 \cup D_3] \cap [a_\alpha |y_\beta| + |a_\theta| y_\alpha > 0]\} \cup \\ &\cup \{D_4 \cap [\min(a_\alpha, y_\alpha) > 0]\} \end{aligned}$$

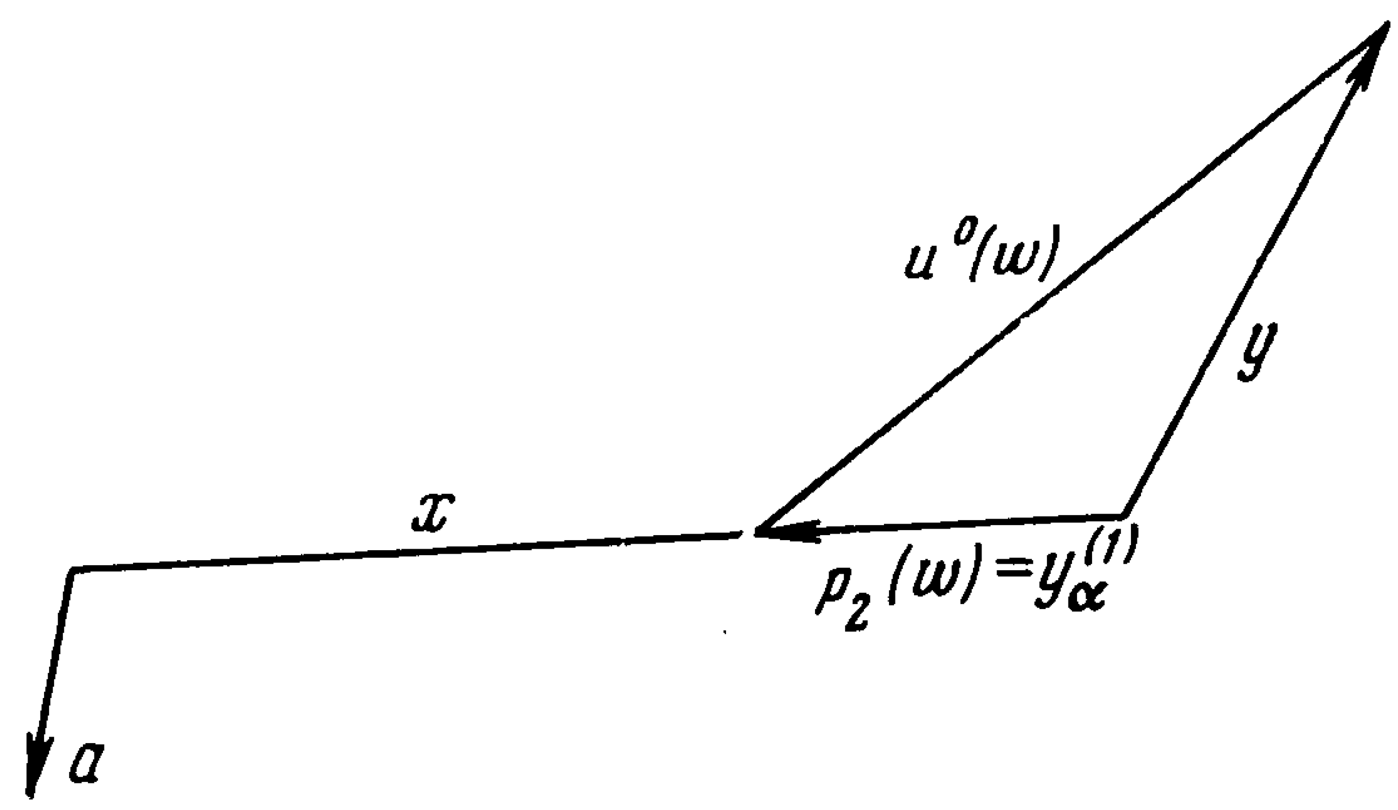
$$\begin{aligned} &(5.4) \quad p_2(w) = \lambda_2^{-1}(\lambda_3 - \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_4}) \\ &\lambda_2 = 2\lambda_5(a_\alpha - y_\alpha) = 2a_\alpha\mu^2, \qquad 2\lambda_5 = \mu^2 + a^2 - y^2 \\ &\lambda_3 = \mu^2 - (a_\alpha - y_\alpha)^2, \qquad \lambda_4 = \lambda_5^2 - \mu^2 a^2 \\ &w \in [r(w) > 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(5.5) \quad p_2(w) = \min(a_\alpha, y_\alpha) \\ &w \in D_4 \cap [r(w) = 0, \min(a_\alpha, y_\alpha) < 0] \end{aligned}$$

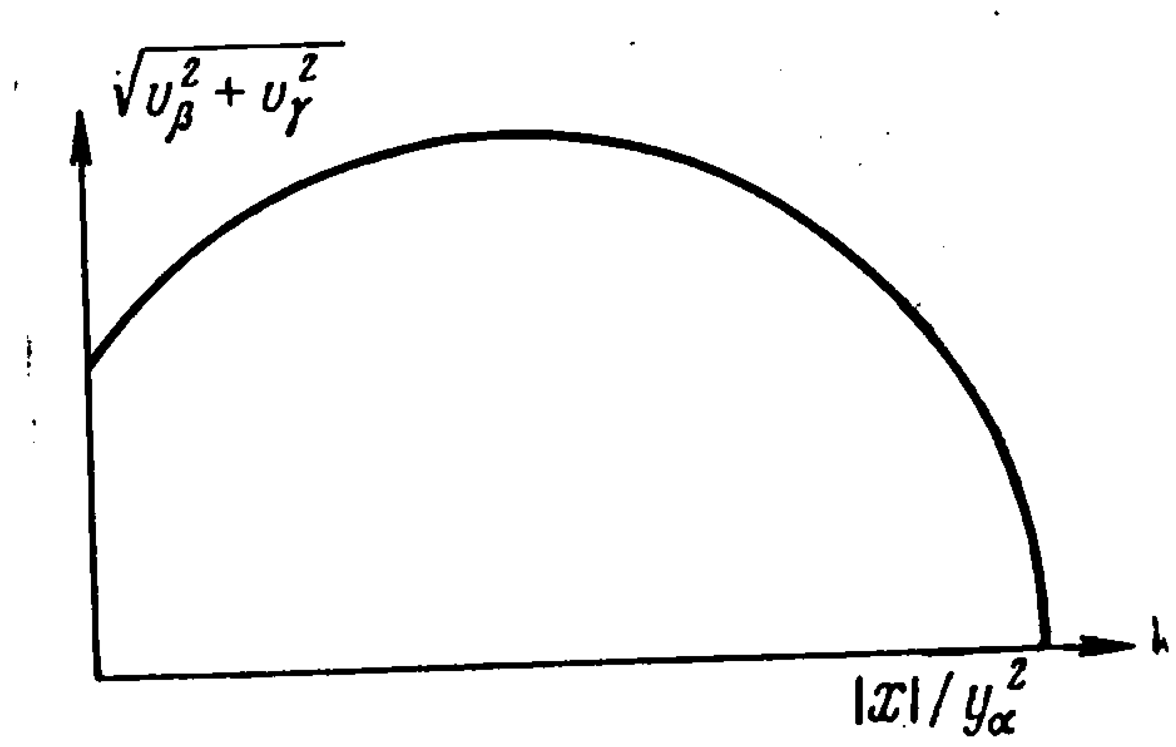
Управление $u^\circ(w)$ формируется по тем же правилам, что и выше. Следует, правда, заметить, что в множество W_0, из которого невозможно попадание на множество M, кроме множества $[r(w) < 0]$, включается также множество $D_0^1[r(w) = 0, p_1(w) = 0]$. Доказательство последнего утверждения основывается на том факте, что множество $D_0^1[r(w) = p_1(w) = 0]$ не содержит множества M, а любое управление u, которое сдвигает позицию с множества D_0^1, обязательно переводит ее в множество $[r(w) < 0]$.

6. Геометрическая интерпретация оптимального движения состоит в следующем. Пусть в начальный момент вектора x, y, a лежат в одной плоскости (см. фиг. 1). Оптимальным действием первого игрока является импульс $u^\circ(w)$, переводящий позицию w в вектор $w^1\,[|x|,\ y_\alpha^1 = p_2(w),\ y_\beta^{(1)} = 0,\ a_\alpha,\ a_\beta,\ \mu^{(1)} = \mu - |u^\circ(w)|]$.

При $t > 0$ второй игрок реализует управление $v_0(w)$ с компонентой $v_\theta = v_\beta j_\beta + v_\gamma j_\gamma$, направленной произвольно в плоскости, перпендикулярной к вектору x, и модулем $|v_\theta| = \sqrt{v_\beta^2 + v_\beta^2}$, который следует по кругу (фиг. 2) единичного радиуса.



Фиг. 1



Фиг. 2

Центр этого круга расположен на оси $|x| / (y_\alpha)^2$ в точке

$$|x| / y_\alpha^2 = (a_\alpha - y_\alpha) / l_1(w, y_\alpha)$$

Компонента v_α следует по прямой $v_\alpha = -(a_\alpha - y_\alpha) / l_1(w, y_\alpha) + |x| / y_\alpha^2$. Первый игрок при $t > 0$ управлением $u^\circ(w, v) = -v$ парализует действия противника, и движение происходит по прямой $x = x(0)$ с постоянной скоростью $y_\alpha = p_2(w)$ в области $[l_2(w, p_2) = 0 = r(w)]$.

7. Предположим теперь, что, кроме управляющих сил, на точки действуют силы $f_{1,2} = -\omega^2 r_{1,2}$ притяжения к неподвижному центру o, а множество $M^\circ\,[x = r_1 - r_2 = y = r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot} = 0]$ отвечает «мягкой» встрече по координатам и скоростям. После подходящего нормирования получим $\omega^2 = 1$, и уравнения относительного движения, множество M и функция $q(w, p)$ принимают вид

$$|x|^{\cdot} = y_\alpha^{\cdot}, \quad y_\alpha = -|x| + y_\beta^2 / |x| + u_\alpha + v_\alpha$$
$$|y_\beta|^{\cdot} = -y_\alpha |y_\beta| / |x| + u_\beta + v_\beta$$
$$M\,[x = 0,\ \mu - |y| \geqslant 0]$$
$$q(w, p) = \mu - \sqrt{p^2 + x^2} - \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2} + \operatorname{arctg}(p / |x|) + \pi / 2$$

В отличие от предыдущего будем через $l_1(w, p)$ обозначать в дальнейшем величину $\sqrt{p^2 + x^2}$, а также будем независимо от предыдущего обозначать области $D_{i,j}$ фазового пространства. Остальные обозначения сохраним прежними.

Вычисляя $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, получим

$$q^{(1)} = -p / l_1(w, p) - (p - y_\alpha) / l_2(w, p) - |x| / l_1^2(w, p) \tag{7.1}$$
$$q^{(2)} = -|x|^2 / l_1^3(w, p) - y_\beta^2 / l_2^3(w, p) + 2p\,|x| / l_1^4(w, p) \tag{7.2}$$
$$l_1(w, p) = \sqrt{p^2 + x^2}, \qquad l_2(w, p) = \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2}$$

Из $q^{(1)} = 0$ следует уравнение

$$2p_1 \mid x \mid / l_1^4 = -2p_1^2 / l_1^3 - 2p_1 (p_1 - y_\alpha) / l_2 l_1^2$$

поэтому в стационарной $p = p_1(w)$ точке функции $q(w, p)$ вторая производная $q^{(2)}$ имеет вид

$$q^2 (w, p_1 (w)) = l_1^{-1} [-y_\beta^2 / l_2^2 - l_1 y_\beta^2 / l_2^3 - (p_1 / l_1 + (p_1 - y_\alpha) / l_2)^2] < 0$$

Эта оценка устанавливает, что при $w \in D_1$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $p_1(w)$, отвечающая уравнению $q^{(1)}(w, p) = 0$ и равенству

$$r(w) = \max_p q(w, p) = q(w, p_1(w))$$

В области D_2 $[\mid x \mid > 0, \mid y_\beta \mid = 0]$ производная $q^{(1)}(w, p)$ разрывна, поэтому исследование несколько усложняется. Приведем его результат.

Либо $p_1(w)$ определяется из уравнения

$$q^{(1)} (w, p - y_\alpha < 0) = -p / l_1 (w, p) + 1 - \mid x \mid / l_1^2 (w, p) = 0 \tag{7.3}$$

при

$$w \in D_{2,1} = D_2 \cap [q_2 (w) = -y_\alpha / l_1 (w, y_\alpha) + 1 - \mid x \mid / l_1^2 (w, y_\alpha) < 0]$$

либо

$$p_1 (w) = y_\alpha, \quad w \in D_{2,2} = D_2 \cap [q_2 (w) \geqslant 0] \tag{7.4}$$

После подстановки $p_1(w)$ в функцию $q(w, p)$ получим функцию $r(w)$ при $w \in D_2$. Эта функция оказывается непрерывно дифференцируемой при $w \in D_1 \cup D_{2,1}$ и допускает разрывы частных производных при $w \in D_{2,2}$. Можно показать по аналогии с [6], что функции $p_1(w)$ и $r(w)$ сами остаются непрерывными.

Предположим, что в данной позиции w оба игрока пользуются конечными управлениями $u(w, v)$, $v(w)$. Вычислим правую производную $r^\cdot (w, u(w, v), v(w))$, а затем определим $v_0(w)$, отвечающее равенству

$$\min_v \max_u r^\cdot (w, u (w, v), v (w)) = r^\cdot (w, u_0 (w, v), v_0 (w))$$

В результате этого построения (оно встречает некоторые затруднения в области $w \in D_{2,2}$) получим

$$v_0 (w) = (-(p_1 (w) - y_\alpha) j_\alpha + \mid y_\beta \mid j_\beta) / l_2 (w, p_1 (w)), \quad w \in D_1 \cup D_{2,1} \tag{7.5}$$

$$v_0 (w) = -s (w) j_\alpha + \sqrt{1 - s^2 (w)}\, j_\beta, \quad w \in D_{2,2} \tag{7.6}$$

$$s (w) = -y_\alpha / l_1 (w, y_\alpha) - \mid x \mid / l_1^2 (w, y_\alpha)$$

Можно показать, что при $w \in D_{2,2}$ функция $s(w)$ лежит в пределах $1 > s(w) \geqslant -1$ и поэтому извлечение корня $\sqrt{1 - s^2(w)}$ всегда возможно. Заметим также, что поскольку при $w \in D_{2,2}$ направление вектора j_β в плоскости, нормальной к вектору x, может быть взято произвольным, то такой же произвол имеет и управление $v_0(w)$.

Продолжим функции $r(w)$, $v_0(w)$ на множество M_1 $[\,|x| = 0,$ $\mu - |y| < 0]$ по формулам $r(w) = \mu - |y|$, $v_0(w) = y / |y|$ и докажем лемму.

Лемма 7.1. Функция $r(w)$ непрерывна по t в точках непрерывности допустимой траектории и не возрастает вдоль траектории, отвечающей любой допустимой паре $u(w, v)$, $v_0(w)$.

7.1.1. Непрерывность функций $r(w)$, $p_1(w)$ в области $|x| > 0$ доказывается так же, как и в [6]. Пусть $w_i(t_i)$ — последовательность точек допустимой траектории, сходящаяся при $i \to \infty$ к позиции $w(\tau) \in M_1$. Тогда очевидны соотношения

$$y_{\beta i}(t_i) \to 0, \quad y_{\alpha i}(t_i) \to \pm |y(\tau)| \quad \text{при } i \to \infty$$

причем знак минус отвечает случаю $t_{i+1} > t_i$, а плюс — случаю $t_{i+1} < t_i$. В обоих случаях формулы (7.1), (7.3), (7.4) дают равенство

$$\lim (|x(t_i)| / l_1(w(t_i), p_1(w(t_i)))) = 0$$

а также показывают, что при достаточно больших i величины

$$p_1(w(t_i)), \qquad p_1(w(t_i)) - y_{\alpha i}(t_i)$$

не могут иметь одинаковых знаков, возможны два варианта

$$0 \leqslant p_1(w(t_i)) \leqslant y_{\alpha i}(t_i) > 0$$
$$0 \geqslant p_1(w(t_i)) \geqslant y_{\alpha i}(t_i) < 0$$

Последние соотношения устанавливают равенство

$$\lim r(w_i(t_i)) = \mu(\tau) - |y(\tau)|$$

и завершают доказательство первого утверждения леммы.

7.1.2. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$ не увеличивает функцию $r(w)$ [6].

7.1.3. Правая производная $r^{\bullet}(w, u(w, v), v_0(w)) \leqslant 0$ при любом $w \in [|x| > 0]$ и любом управлении $u(w, v)$.

Докажем это утверждение при $w \in D_1 \cap D_{2,1}$. Вычисляя производную $r^{\bullet}(w, u, v_0(w))$, представим ее в виде суммы двух слагаемых

$$r^{\bullet}(w, u, v_0(w)) = R_1(w) + R_2(w, u) + R_3(w, v_0)$$
$$R_3 + R_1(w) = -|x| y_\alpha / l(w, p_1) + (|x| y_\alpha + p(-|x| + $$
$$+ y_\beta^2 / |x|)) / l_2(w, p_1) + p_1 y_\alpha / l_2^2(w, p_1) - 1$$
$$R_2(w, u) = -|u| - (p_1 - y_\alpha) u_\alpha / l_2(w, p_1) - |y_\beta| u_\beta / l_2(w, p_1)$$
$$p_1 = p_1(w)$$

Добавляя к величине $R_1(w)$ выражение $p_1 |x| / l_1(w, p_1) - p_1^2 / l_1^2(w, p_1)$ и вычитая это же выражение, придадим выражению $R_1 + R_3$ вид

$$R_1(w) + R_3(w, v_0) = |x|^{-1} \{(p_1 - y_\alpha) |x|^2 / l_1 -$$
$$- p_1(p_1 - y_\alpha) |x| / l_1^2 + p_1 y_\beta^2 / l_2\} +$$
$$+ |x| [- p_1 / l_1 - (p_1 - y_\alpha) / l_2 - |x| / l_1^2]$$
$$l_1 = l_1(w, p_1), \quad l_2 = l_2(w, p_1)$$

Квадратная скобка обращается в нуль в силу уравнения $q^{(1)}(w, p_1) = 0$. Заменяя в фигурной скобке множитель второго слагаемого $|x| / l_1^2$ на сумму $- p_1 / l_1 - (p_1 -$

$- y_\alpha) / l_2$ по уравнению $q^{(1)}(w, p_1) = 0$ и производя элементарные действия, получим

$$R_1(w) + R_3(w, v_0) = |x|^{-1}[(p_1 - y_\alpha) l_1 + p_1 l_2] =$$
$$= - l_2(w, p_1) / l_1(w, p_1) < 0$$

Последняя оценка совместно с очевидной оценкой $R_2(w, u) \leqslant 0$ устанавливает оценку $r^\cdot(w, u, (w, v), v_0(w)) < 0$ при $w \in D_1 \cup D_{2,1}$.

Оценка $r^\cdot(w, u(w, v), v_0(w)) \leqslant 0$ при $w \in D_{2,2}$ следует из равенства

$$r^\cdot = 1 - |u| + s(u_\alpha + v_\alpha) - \sqrt{1 - s^2}\sqrt{(u_\beta + v_\beta{}^2) + (u_\gamma + v_\gamma)^2}$$

доказательство которого громоздко и здесь не приводится. Отметим только одно его следствие: при $w(0) \in D_{2,2}$ существует только одна траектория $w_1^{(1)}$ $(t \geqslant 0,$ $\{u^\circ \cdot (w, v) = -v, v_0(w)\}, w(0))$, вдоль которой сохраняется равенство $r(w_1(t)) = r(w(0))$, а любое управление $u(w, v)$, сдвигающее в паре с $v^\circ(w)$ позицию с траектории $w_1{}^1(t)$, приводит к уменьшению $r(w)$.

Уменьшение $r(w)$ при сдвиге позиций с множества M_1 можно проверить непосредственным вычислением, которое завершит доказательство леммы 7.1 и позволит сформулировать теорему.

Теорема 7.1. Если начальная позиция $w(0) \in W_0$ $[r(w) < 0]$, то любая пара $u(w, v)$, $v_0(w)$ не приводит допустимую траекторию на множество M за конечное время [6].

8. В области W° $[r(w) \geqslant 0,$ $|x| > 0]$ определим функцию $p_2(w)$, как наименьший корень уравнения $q(w, p) = 0$, и сформируем управления

$$u^\circ(w, v) = (p_2 - y_\alpha)\delta j_\alpha - |y_\beta|\delta j_\beta$$
$$v^\circ(w) = (-(p_2 - y_\alpha)j_\alpha + |y_\beta| j_\beta) / l_2(w, p_2)$$
$$p_2 = p_2(w), \qquad w \in D_1{}^\circ = W^\circ \cap [l_2(w, p_2) > 0]$$
$$u^\circ(w, v) = -v, \qquad v^\circ(w) = v_0(w)$$
$$w \in D_2{}^\circ = W^\circ \cap [l_2(w, p_2) = 0]$$

Поясним структуру области $D_2{}^\circ$. Условие $l_2(w, p_2) = 0$ влечет следствием равенства $|y_\beta| = 0$, $p_2(w) = y_\alpha$. По определению $p_2(w)$, как наименьшего корня уравнения $q(w, p) = 0$, имеем оценку

$$\lim q^{(1)}(w, p - y_\alpha \to -0) = q_1(w) \geqslant 0$$

Это значит, что, согласно (7.4), имеет место равенство $y_\alpha = p_1(w) = p_2(w)$. Итак, в иных обозначениях можно написать $D_2{}^\circ = D_{2,2} \cap [r(w) = 0]$. Последнее равенство указывает на возможность формирования $v_0(w)$ при $w \in D_2{}^\circ \in D_{2,2}$ по формулам (7.6).

Теорема 8.1. Пара $u^\circ(w, v)$, $v^\circ(v)$ реализует время

$$T[u^\circ, v^\circ] = T^\circ(w) = \operatorname{arctg}(p_2(w) / |x|) + \pi / 2$$

и время $T[u, v]$ первого попадания на множество M, отвечающее допустимой паре $u(w, v)$, $v(w)$, удовлетворяет оценкам

$$T[u^\circ(w, v), v] \leqslant T[u^\circ, v^\circ] \leqslant T[u(w, v), v^\circ(w)]$$

Доказательство теоремы 8.1 опирается на последовательное доказательство следующих утверждений.

8.1.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$ не уменьшает функцию $p_2(w)$ (функцию $T^\circ(w)$), т. е. справедлива оценка

$$\Delta p = p_2(w^{(1)}) - p_2(w) \geqslant 0 \qquad (\Delta T \geqslant 0)$$

причем эта оценка переходит в строгое равенство только на семействе управлений $mu^\circ(w, v)$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$ [6].

8.1.2. Правая производная $T^{\circ\cdot}(w, u, v^\circ(w)) > -1$ при $w \in D_1^\circ \cap \cap [r(w) > 0]$.

Доказательство. Элементарные вычисления позволяют получить равенство

$$T^{\circ\cdot} = -1 + x^2 (p_2 (p_2 - y_\alpha) / x^2 + p_2^\cdot / |x| + 1) / l_1^2 (w, p_2) \tag{8.1}$$

где производная $p_2^\cdot$ вычисляется из уравнения

$$\begin{gathered} p_2^\cdot q^{(1)}(w, p_2) = -|x|\, q^{(1)}(w, p_2) - (p_2 - y_\alpha)|x| / l_1 - p_2 y_\beta^2 / |x|\, l_2 - \\ - p_2 y_\alpha / l_1^2 - x^2 / l_1^2 + P_2(w, u) + P_3(w, v^\circ(w)) \\ P_2(w, u) = + |u| + (p_2 - y_\alpha) u_\alpha / l_2 + |y_\beta|\, u_\beta / l_2 \\ P_3(w, v^\circ(w)) = (p_2 - y_\alpha) v_\alpha^\circ / l_2 + |y_\beta|\, v_\beta^\circ / l_2 = -1 \\ l_1 = l_1(w, p_2), \quad l_2 = l_2(w, p_2), \quad p_2 = p_2(w) \end{gathered} \tag{8.2}$$

При $r(w) > 0$ справедлива оценка $q^1(w, p) > 0$, поэтому после подстановки $p_2^\cdot$ по уравнению (8.2) в уравнение (8.1) получим

$$T^{\circ\cdot} = -1 + l_1^{-2} (q^{(1)})^{-1} (l_1 l_2 [-p_2 / l_1 - (p_2 - y_\alpha) / l_2] + |x| \cdot P_2(w, u)) \tag{8.3}$$

Оценка $-p_2 / l_1 - (p_2 - y_\alpha) / l_2 > |x| / l_1^2 > 0$ является следствием оценки $q^{(1)}(w, p_2) > 0$, а оценка $P_2(w, u) \geqslant 0$ очевидна. В итоге формула (8.3) завершает доказательство утверждения (8.1.2).

8.1.3. Как было отмечено в конце доказательства леммы 7.1, при $w(0) \in D_1^\circ \cap [r(w) = 0]$ включение $w^{(1)}(t) \in D_1^\circ \cap [r(w) = 0]$ сохраняется только на траектории $w_1^{(1)}$, а остальные траектории, порождаемые парами $u(w, v)$, $v^\circ(w)$, либо повторяют траекторию $w_1^{(t)}$ с точностью до множества меры нуль, либо уводят позицию в множество W_0. Эти соображения устанавливают оценку $T^\circ[w] \leqslant T[u, v^\circ(w)]$, при $w \in D_1^\circ \cap \cap [r(w) = \theta]$.

8.1.4. Очевидное равенство $T[u^\circ, v^\circ] = T[u^\circ, v]$ и непрерывность функций $p_2(w)$, $T^\circ(w)$ на множестве $D_1^\circ \cup M$ [6] завершают доказательство теоремы 3.1.

Геометрическая интерпретация оптимального движения повторяет интерпретацию 6 с той разницей, что круг на фиг. 2 всегда имеет центром точку (1, 0), а по горизонтальной оси вместо величины $|x| / y_\alpha^2$ отложена величина $1 - s(w)$.

Поступила 7 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче преследования в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 12.
4. *Пожарицкий Г. К.* К задаче об импульсной встрече движений. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача импульсной «мягкой» встречи двух материальных точек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование точки с ограниченной тягой. ПММ 1973, т. 37, вып. 2.