УДК 624.07 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЭЙЛЕРУ ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Э. И. Гольденгершель

(Москва)

Для продольно сжатого вязко-упругого стержня, находящегося под действием медленно меняющейся поперечной нагрузки, вычисляется критическое значение продольной сжимающей силы. Для докритических значений этой силы дается обоснование метода расчета на ползучесть по длительному модулю.

Метод исследования основан на некоторых тауберовых теоремах типа Пэли — Винера — Гельфанда [1-4].

1. Пусть тонкий вязко-упругий стержень переменного сечения конечной длины l находится под действием продольной сжимающей силы P и под влиянием медленно меняющейся внешней поперечной нагрузки $p(x, t)$ подвергается слабому изгибу [5]. Выберем начало координат в одном из концов стержня и будем предполагать, что в начальный момент $t = 0$ и ось стержня расположена вдоль оси x. Тогда прогиб $y(x, t)$ оси стержня описывается следующей краевой задачей [5, 6]:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P\int_0^t K(t,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,d\tau = -p(x,t) - \int_0^t K(t,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{1.1}$$

$$U_i[y] = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.2}$$

Здесь (1.2) — самосопряженные краевые условия, описывающие характер закрепления стержня на концах $x = 0$ и $x = l$, $K(t, \tau)$ — ядро ползучести материала стержня, $I(x)$ —момент инерции относительно оси сечения стержня с абсциссой E — мгновенный модуль упругости.

Будем предполагать, что $K(t, \tau)$ слабо сингулярно на $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, $E = \mathrm{const}$, $I(x)$ конечно и отделено от нуля на $[0, l]$, и два из четырех краевых условий (1.2) имеют вид

$$y'(0) = h_1 y(0), \qquad y'(l) = h_2 y(l), \quad 0 \leqslant |h_i| \leqslant \infty, \qquad i = 1,\ 2 \tag{1.3}$$

Как известно [5], условия (1.3) выполняются при заделке, шарнирном закреплении и на свободно опертом конце.

Будем говорить, что вектор-функция $f(t)$, $0 \leqslant t < \infty$ принадлежит классу A, если она принимает значения из банахова пространства $C[0, l]$ и измерима и почти всюду ограничена на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$ [7].

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $p(x, t)$ как функция t принадлежит A. Тогда $y(x, t)$ тоже будет принадлежать A.

Пусть $\alpha(t)$ — некоторая непрерывная положительная на $[0, \infty)$ функция.

Будем говорить, что при данном P краевая задача (1.1), (1.2) устойчива по Эйлеру с весом $\alpha(t)$, если существование равномерного по $x \in [0, l]$ конечного предела

$$L_\alpha p = \lim_{t\to\infty} p(x, t)\,\alpha(t) \tag{1.4}$$

влечет за собой существование равномерного по $x \in [0, l]$ конечного предела

$$L_\alpha y = \lim_{t\to\infty} y(x, t)\,\alpha(t) \tag{1.5}$$

Будем называть $P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ критическим значением силы P, соответствующим весу $\alpha(t)$, если при всех $P < P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $\alpha(t)$, а при $P = P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ она уже не имеет места.

Как известно [8], исследование устойчивости по Эйлеру упругого стержня сводится к спектральному анализу одного дифференциального оператора четвертого порядка.

Исследование устойчивости по Эйлеру вязко-упругого стержня потребовало, кроме того, применения некоторых тауберовых теорем типа Пэли — Винера — Гельфанда, основанных на изучении спектра вольтеррова оператора на полуоси [1-4].

Этот подход позволил получить следующие результаты.

Теорема 1. Пусть

1) $$\sup_{0\leqslant t<\infty}\int\limits_0^t |K(t,\tau)|\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau<\infty,$$ 2) $$\lim_{t\to\infty}\int\limits_\Delta K(t,\tau)\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau=0$$

для любого измеримого ограниченного множества $\Delta\subset[0,\infty)$

3) $$T_k=\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t K(t,\tau)\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau \text{ существует.}$$

Тогда для критического значения силы $P_{\langle\alpha(t)\rangle}$ имеет место оценка

$$P_{\langle\alpha(t)\rangle}\geqslant P_\varepsilon\left(1+\lim_{s\to\infty}\sup_{t\geqslant s}{}_t\int\limits_s^t |K(t,\tau)|\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}d\tau\right)^{-1}$$

где P_ε — эйлерова критическая сила для упругой задачи, соответствующей задаче (1.1), (1.2).

При $P<P_{\langle\alpha|t\rangle}$ $L_\alpha y$ есть решение краевой задачи получающейся из (1.1), (1.2) заменой y на $L\alpha y$, p на $L\alpha p$, вольтеррова оператора V с ядром $K(t,\tau)$ — оператором умножения на константу T_k.

Более точный результат (см. [9]) удается получить при

(1.6) $$\alpha(t)=e^{-\theta t},\qquad \mathrm{Im}\theta=0$$

Теорема 2. Пусть

(1.7) $$K(t,\tau)=K_0(t-\tau)+K_1(t,\tau)$$

причем

1) $K_0(t)\geqslant 0,\quad t\geqslant 0,$ 2) $$k_0(\theta)=\int\limits_0^\infty K_0(t)e^{-\theta t}dt<\infty,\qquad \mathrm{Im}\,\theta=0$$

3) $k_0(w)$ принимает вещественные значения только на вещественной оси;

4) $K_1(t,\tau)$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1 при $\alpha(t)=e^{-\theta t}$;

5) $$\lim_{s\to\infty}\sup_{t\geqslant s}{}_t\int\limits_s^t|K_1(t,\tau)|e^{-\theta(t-\tau)}d\tau=0$$

Тогда критическая сила $P_{\langle e^{-\theta t}\rangle}$ определяется выражением

(1.8) $$P_{\langle e^{-\theta t}\rangle}=P_\varepsilon[1+k_0(\theta)]^{-1}$$

где P_ε — эйлерова критическая сила для упругой задачи, соответствующей задаче (1.1) (1.2).

При $P<P_{\langle e^{-\theta t}\rangle}$ предельный прогиб $(L_\alpha y)(x)$ есть решение краевой задачи, получающейся из (1.1) (1.2) заменой y на $L_\alpha y$, p на $L_\alpha p$, оператора V — оператором умножения на $k_0(\theta)$.

2. Множество P_i, $i=1,2,\ldots$ тех P, для которых однородная упругая краевая задача, соответствующая (1.1) (1.2), имеет нетривиальное решение, будем называть эйлеровым спектром упругой задачи, соответствующей (1.1) (1.2). (Как известно, все $P_i>0$, и эйлерова критическая сила P_ε совпадает с P_1.)

Обозначим через $M(P)$ дифференциальный оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$l_0[y] \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2}{dx^2} - PI\right)\right)y$$

и краевыми условиями (1.2), через $D(M(P))$ — его область определения в пространстве $C[0, l]$ и через $Q_0(x, \xi, P)$ — его функцию Грина.

Пусть B — оператор, порождаемый операцией двукратного дифференцирования и краевыми условиями (1.3). Его область определения в $C[0, l]$ обозначим через $D(B)$. Ясно, что $D(B) \supset D(M(P))$.

Положим $Q(P) = M^{-1}(P)B$. При фиксированных x и P $Q_0(x, \xi, P) \in \in D(B)$, и оператор B самосопряжен в $L_2(0, l)$, поэтому для любого $g \in D(B)$

$$(2.1) \qquad (Q(P)g)x = \int_0^l \frac{\partial^2 Q_0(x, \xi, P)}{\partial \xi^2} g(\xi)\, d\xi$$

Всюду в дальнейшем под $Q(P)$ будем понимать оператор Фредгольма (2.1), действующий в $C[0, l]$.

Собственные значения оператора $Q(P)$ обозначим через $(q_i(P))^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Отметим, что $q_i(0)$ совпадают с эйлеровым спектром P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ упругой задачи, соответствующей (1.1) (1.2), и на $D(M(P))$

$$Q^{-1}(P) = B^{-1}M(P) = B^{-1}(M(0) - PB) = B^{-1}M(0) - PI = Q^{-1}(0) - PI$$

Поэтому

$$(2.2) \qquad q_i(P) = P_i - P, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ банахово пространство функций $f(t)$, измеримых и почти всюду ограниченных на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, у которых существует конечный предел

$$(2.3) \qquad L_\alpha f = \lim_{t\to\infty} f(t)\,\alpha(t)$$

с нормой

$$(2.4) \qquad \|f\|_{\langle\alpha(t)\rangle} = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t<\infty} |f(t)|\,\alpha(t)$$

и через $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ — его подпространство, состоящее из тех f, для которых $L_\alpha f = 0$.

Аналогично [3,4] имеет место следующее утверждение.

Для того, чтобы для каждого $f(t)$, измеримого и почти всюду ограниченного на каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, существование $L_\alpha f$ влекло за собой существование $L_\alpha\varphi$, где $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$(2.5) \qquad \int_0^t K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau - \lambda\varphi(t) = f(t)$$

необходимо и достаточно, чтобы λ было регулярной точкой в пространстве $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$, оператора V

$$(2.6) \qquad (Vf)(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что ядро вольтеррова оператора V (2.6) удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 1. Эти условия обеспечивают ограниченность V как в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ [7], так и в $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ [3].

3. Введем в рассмотрение банахово пространство $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ вектор-функцией $f(t) \in A$, для которых существует предел (2.3), с нормой (2.4), где $|f(t_0)|$ означает теперь норму элемента $f(t_0)$ в $C[0, l]$.

Пусть $p(x, t)$ принадлежит $C\Lambda_{\langle\alpha|(t)\rangle}$. Краевая задача (1.1), (1.2) эквивалентна следующему интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$(3.1) \qquad (PVQ(P) - I)\,y = M^{-1}(P)(I + V)\,p$$

где V — действующий в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ вольтерров оператор (2.6).

Исследование вязко-упругой задачи (1.1) (1.2) на устойчивость по Эйлеру сводится к следующей задаче.

Найти условия, при которых для каждого $p \in C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$ решение уравнения (3.1) также принадлежит этому пространству и найти выражение для $L_\alpha y$ через $L_\alpha p$.

Ясно, что если $1/P$— регулярная точка оператора $Q\,(P)\ V$ в пространстве $C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$, то краевая задача (1.1), (1.2) устойчива по Эйлеру с весом $\alpha\,(t)$.

Поэтому исследование краевой задачи (1.1), (1.2) на устойчивость по Эйлеру тесно связано с изучением спектра оператора $Q\,(P)\ V$ в пространстве $C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$.

На оператор $Q\,(P)\ V$, действующий в пространстве $C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$, переносится теорема умножения спектров (см. [4], теорема 3), согласно которой (с учетом (2.2))

$$\sigma_{\langle\alpha\,(t)\rangle}\,(Q\,(P)\,V) = \bigcup_i \bigcup_{\lambda\in\sigma_{\langle\alpha|(t)\rangle}(V)} \lambda\,\frac{1}{P_i - P} \tag{3.2}$$

Здесь $\sigma_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (V)$ — спектр оператора V (2.6) в $\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (0,\infty)$, $\sigma_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (Q\,(P)\ V)$ — спектр оператора $Q\,(P)\ V$ в $C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$.

Лемма 1. Если $1/P$ — регулярная точка оператора $Q\,(P)\ V$ в $C\Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}$, то $L_\alpha y$ — решение следующей краевой задачи:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,(x)\,\frac{d^2L_\alpha y}{dx^2}\right) - P\,(1+T_k)\frac{d^2L_\alpha y}{dx^2} = -(1+T_k)\,L_\alpha p \tag{3.3}$$

$$U_i\,[L_\alpha y] = 0, \qquad i = 1,\,2,\,3,\,4$$

т. е. задачи, получающейся из' (1.1) (1.2) заменой y на $L_\alpha y$, p на $L_\alpha p$, вольтеррова оператора V (2.6) оператором умножения на константу T_k (см. условие 3) теоремы 1).

Доказательство. Уравнение (3.1) перепишем следующим образом:

$$\int_0^l \frac{d^2Q_0\,(x,\,\xi,\,P)}{\partial\xi^2}\left(\int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,(y\,(\xi,\,\tau)\,\alpha\,(\tau) - (L_\alpha y)\,(\xi))\,d\tau\right)d\xi\, +$$

$$+\int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,d\tau\int_0^l \frac{\partial^2Q_0\,(x,\,\xi,\,P)}{\partial\xi^2}\,(L_\alpha y)\,(\xi)\,d\xi - \frac{1}{P}\,y\,(x,\,t)\,\alpha\,(t) =$$

$$= \frac{1}{P}\left(\int_0^l Q_0\,(x,\,\xi,\,P)\,p\,(\xi,\,t)\,\alpha\,(t)\,d\xi - \int_0^l Q_0\,(x,\,\xi,\,P)\left(\int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,(p\,(\xi,\,\tau)\,\alpha\,(\tau) - (L_\alpha p)\,(\xi))\,d\tau\right)d\xi - \int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,d\tau\int_0^l Q_0\,(x,\,\xi,\,P)\,(L_\alpha p)\,(\xi)\,d\xi\right)$$

и перейдем в нем к пределу при $t\to\infty$. Получим

$$\left(T_kQ\,(P) - \frac{1}{P}\,I\right)L_\alpha y = \frac{1}{P}\,(1+T_k)\,M^{-1}\,(P)\,L_\alpha p$$

Покажем, что $T_k \in \sigma_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (V)$. Если это не так, то при любом $f \in \Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (0,\infty)$ уравнение (2.5) имеет решение $\varphi \in \Lambda_{\langle\alpha\ (t)\rangle}\ (0,\infty)$. Выберем f так, чтобы $L_\alpha f \neq 0$. Но если в (2.5), которое можно переписать следующим образом:

$$\int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,(\varphi\,(\tau)\,\alpha\,(\tau) - L_\alpha\varphi)\,d\tau + \left(\int_0^t K\,(t,\,\tau)\,\frac{\alpha\,(t)}{\alpha\,(\tau)}\,d\tau\right)\,L_\alpha\varphi - T_k\varphi\,(t)\,\alpha\,(t) = f\,(t)\,\alpha\,(t)$$

перейдем к пределу при $t\to\infty$, то получим $0 = L_\alpha f$.

Согласно (3.2), $1/P\ T_k$ — регулярная точка оператора $Q\,(P)$ в $C\,[0,\,l]$ и, следовательно, $(T_kQ\,(P) - (1/P)\,I)^{-1}$ существует.

Поэтому

$$L_\alpha y = \frac{1+T_k}{P}\left(T_k Q(P) - \frac{1}{P} I\right)^{-1} M^{-1}(P) L_\alpha p \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) можно переписать так:

$$L_\alpha y = -(1+T_k)(Q^{-1}(P) - T_k P I)^{-1} M^{-1}(P) L_\alpha p$$

Отсюда следует, что $L_\alpha y$ — решение краевой задачи (3.3).

Из (3.2) следует, что спектральный радиус оператора $Q(P)V$ в пространстве $C\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}$ равен произведению спектрального радиуса $r_{\langle\alpha(t)\rangle}(V)$ оператора V (2.6) в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ на спектральный радиус оператора $Q(P)$ (2.1).

Для $r_{\langle\alpha(t)\rangle}(V)$ в $\Lambda_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ сохраняется оценка, установленная для пространства $Z_{\langle\alpha(t)\rangle}(0, \infty)$ в [3]. Отсюда и из леммы 1 следует теорема 1.

4. Перейдем к доказательству теоремы 2. Для этого понадобится следующая

Лемма 2. Пусть $K(t, \tau)$ представимо в виде (1.7), причем $K_0(t)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 2, $K_1(t, \tau)$ — условиям 4) и 5) той же теоремы.

Тогда для того, чтобы вязко-упругая задача (1.1), (1.2) была устойчива по Эйлеру с весом $e^{-\theta t}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$P_i \neq P(k_0(w) + 1), \qquad \operatorname{Re} w \geqslant \theta \tag{4.1}$$

где P_i — эйлеров спектр упругой задачи, соответствующей (1.1), (1.2), а $k_0(w)$ — преобразование Лапласа функции $K_0(t)$.

Доказательство. Достаточность условия (4.1) следует из (3.2) и из доказываемого аналогично [4] (см. теорему 2) обобщения тауберовой теоремы Пэли — Винера [1] (см. [3]).

Докажем его необходимость. Пусть при некотором w с $\operatorname{Re} w \geqslant \theta$ и некотором P_i имеет место равенство

$$(P_i - P)/P = k_0(w) \tag{4.2}$$

Это равенство означает, что $(P_i - P)/P$ принадлежит спектру V в $\Lambda_{\langle e^{-\theta t}\rangle}(0, \infty)$. Поэтому (аналогично [4]) существует такая функция $h(t) \in \Lambda_{\langle e^{-\theta t}\rangle}(0, \infty)$, что

$$\left(\left(V - \frac{P_i - P}{P} I\right)^{-1} h\right)(t) \overline{\in} \Lambda_{\langle e^{-\theta t}\rangle}(0, \infty) \tag{4.3}$$

Решение уравнения (3.1) представим в следующем виде:

$$y(x, t) = \left(\frac{B^{-1}}{P} p\right)(x, t) + \frac{1}{P}\left(\left(Q(P)V - \frac{I}{P}\right)^{-1}\left(Q(P) + \frac{I}{P}\right) B^{-1} p\right)(x, t)$$

Обозначим через $g_i(x)$ собственную функцию оператора $Q(P)$ (2.1), отвечающую собственному значению $1/(P_i - P)$, и положим

$$p(x, t) = h(t)(Bg_i)(x) \tag{4.4}$$

Тогда

$$y(x, t) = \frac{1}{P}(B^{-1}g_i)(x) h(t) + \frac{P_i}{P^2(P_i - P)}\left(\left(Q(P)V - \frac{1}{P} I\right)^{-1} g_i h\right)(x, t) \tag{4.5}$$

Аналогично [4] имеем

$$\left(\left(Q(P)V - \frac{1}{P} I\right)^{-1} g_i h\right)(x, t) = \left(\left(\frac{1}{P_i - P} V - \frac{1}{P} I\right)^{-1} h\right)(t)\, g_i(x)$$

Отсюда следует, с учетом (4.3) и (4.5), что для нагрузки $p(x, t)$ вида (4.4) (которая удовлетворяет условию (1.4) при $\alpha(t) = e^{-\theta t}$) прогиб $y(x, t)$ условию (1.5) не удовлетворяет.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 легко следует, что при $1/P > k_0(\theta)/(P_\varepsilon - P)$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $e^{-\theta t}$, а при $1/P = k_0(\theta)/(P_\varepsilon - P)$ она уже не имеет места. Отсюда для $P_{\langle e^{-\theta t}\rangle}$ получается выражение (1.8). Второе утверждение будет следовать из леммы 1 и из (3.2), если будет показано, что $T_k = k_0(\theta)$

Согласно (1.7)

$$T_k = k_0(\theta) + \lim_{t\to\infty}\int_0^t K_1(t, \tau)\, e^{-\theta(t-\tau)}d\tau \tag{4.6}$$

а из условия 5) теоремы 2 и условия 2) теоремы 1 следует, что предел справа в (4.6) равен нулю.

Замечание 1. Ядро Н. Х. Арутюняна [10]

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\gamma_\infty + \frac{c}{\tau}\right)(1 - e^{-\delta(t-\tau)})$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 при $\theta = 0$, так как

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{t\geqslant s}{}_t\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}\frac{d\tau}{\tau} < \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\sup_{t\geqslant s}{}_t\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}d\tau = 0$$

Для ядра Арутюняна выражение (1.8) для критической силы $P_{\langle e^{-\theta t}\rangle}$ при $\theta = 0$ было получено в работе [11].

Замечание 2. Метод вычисления $L_\alpha y$ при $\alpha(t) \equiv 1$ с помощью краевой задачи (3.3) применяется в инженерных расчетах. Это так называемый метод расчета на ползучесть по длительному модулю [6,11]. Теоремы 1 и 2 дают обоснование этого метода.

Автор признателен Ю. Н. Работнову, С. Г. Михлину, Г. И. Баренблатту, В. Б. Лидскому и В. С. Екельчику за полезные дискуссии.

Поступила 30 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964.
2. *Gelfand J. M.* Uber absolut convergente trigonometrische Reihen und Integrabe. Матем. сб., 1941, т. 9, № 1.
3. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и тауберовы теоремы типа Палея — Винера. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 5.
4. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и экспоненциальный рост решений систем интегральных уравнений типа Вольтерра. Матем. сб., 1964, т. 64, № 1.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М., Физматгиз, 1965.
6. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.
9. *Гольденгершель Э. И.* Об устойчивости по Эйлеру вязко-упругого стержня. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2.
10. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
11. *Distefano J. N.* Creep buckling of slender columns. J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1965, vol. 91, No. 3.

Технический редактор *Э. Ф. Бунєва*

Сдано в набор 23/XI-1973 г. Т-02031 Подписано к печати 23/I-1974 г. Тираж 2860 экз.
Зак. 3193 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10