ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. G.* Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, Bd. 57, Nr 5.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., «Наука», 1971.
3. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. *Паскаленко А. А., Попов Г. Я.* Плоская задача об изгибе полубесконечной балки на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
8. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.

УДК 539.376

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОЙ СФЕРЫ ПРИ РАЗНОПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

(Днепропетровск)

Рассматривается полярно-симметричная деформация вязко-упругой толстостенной полой сферы, материал которой обладает свойством разносопротивляемости при растяжении и сжатии. Сосуд находится под действием внутреннего давления p и наружного растяжения p, которые распределены равномерно по поверхностям $r = a$ и $r = b$ $(a < b)$. В силу сказанного сосуд разделяется на две части сферической поверхностью радиуса $r = \rho$, который при решении соответствующей упругой задачи [1] не зависит от величины p даже в том случае, когда последняя изменяется с течением времени t.

При решении вязко-упругой задачи будем исходить из операторных физических уравнений в сферических координатах:

для первой части сосуда $(\sigma_r > 0,\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi > 0)$

(1) $$E_t^+\varepsilon_r = \sigma_r - 2\nu_t^+\sigma_\theta, \qquad E_t^+\varepsilon_\theta = (1-\nu_t^+)\sigma_\theta - \nu_t^+\sigma_r$$

для второй части $(\sigma_r < 0,\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi > 0)$

(2) $$E_t^-\varepsilon_r = \sigma_r - 2\nu_t^-\sigma_\theta, \qquad E_t^+\varepsilon_\theta = (1-\nu_t^+)\sigma_\theta - \nu_t^+\sigma_r$$

Здесь σ_r, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = u / r$, $\varepsilon_r = \partial u / \partial r$ — напряжения и деформации, E_t^+, ν_t^+ и E_t^-, ν_t^- — операторные модули и операторные коэффициенты Пуассона при растяжении (индекс плюс) и сжатии (индекс минус) $u = u_1$ и $u = u_2$ — нормальные перемещения в первой и второй части сферы соответственно, операторы

(3) $$E_t^+ = E_0^+(1-R_1^*), \qquad E_t^- = E_0^-(1-R_2^*)$$

(4) $$\nu_t^+ = \nu_0^+(1-g_0^+R_1^*), \qquad \nu_t^- = \nu_0^-(1+g_0^-R_2^*)$$

$$g_0^\pm = \frac{1-2\nu_0^\pm}{2\nu_0^\pm}, \qquad R_i^*\{\cdot\} = \int\limits_0^t R_i(t,\tau)\{\cdot\}\,d\tau \quad (i=1,2)$$

где R_i^* — интегральные операторы с ядрами релаксации $R_1(t, \tau)$ и $R_2(t, \tau)$ при растяжении и сжатии соответственно, E_0^+, ν_0^+ и E_0^-, ν_0^- — упруго-мгновенные константы, характеризующие разномодульность материала.

Как следствие операторных выражений (3), имеем

$$\frac{1}{E_t^+} = \frac{1}{E_0^+}(1 + P_1^*), \qquad \frac{1}{E_t^-} = \frac{1}{E_0^-}(1 + P_2^*)$$

где P_i^* — интегральные операторы с ядрами ползучести $P_i(t, \tau)$. При этом $P_i^* R_i^* = P_i^* - R_i^*$.

Выражения (4) отвечают случаю постоянства оператора дилатации [2] при растяжении и сжатии.

В соответствии с представлениями [1, 3] принимается, что

(5) $$\nu_t^+ / E_t^+ = \nu_t^- / E_t^-$$

Общность операторного метода никак не связана с условием (5). Последнее, равно как условие отсутствия последействия при дилатации, способствует лишь получению менее громоздких результатов, чем в общем случае, когда число ядер релаксации больше двух.

Из физических соображений следует, что $R_i^* \cdot 1$ и $P_i^* \cdot 1$ — положительные монотонно возрастающие функции времени t, причем $0 \leqslant R_i^* \cdot 1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant P_i^* \cdot 1 < \infty$ при $t \to \infty$.

Граничные условия и условия на поверхности $r = \rho$ следующие:

(6) $$\sigma_r(a, t) = -p, \ \sigma_r(b, t) = p, \ \sigma_r(\rho, t) = 0, \ u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t)$$

В общем величина ρ зависит от времени и подлежит определению.

Решая уравнение (2) относительно σ_r и σ_θ, с учетом (5), получим

(7) $$\Delta_t \sigma_r = 2\nu_t^+ \frac{u_2}{r} + (1 - \nu_t^+) \frac{\partial u_2}{\partial r}, \qquad \Delta_t \sigma_\theta = \delta_t \frac{u_2}{r} + \nu_t^+ \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

(8) $$\Delta_t = (1 - \nu_t^+ - 2\nu_t^+ \nu_t^-) / E_t^-, \qquad \delta_t = E_t^+ / E_t^-$$

Уравнения, отвечающие первой части сферы, получаются из (7) и (8), если в них принять $\nu_t^+ = \nu_t^-$, $E_t^+ = E_t^-$ и вместо u_2 подставить u_1.

Ниже доказываются следующие положения.

Теорема 1. Если ни один из операторов ν_t^+ и ν_t^- не вырождается в постоянную и давление p зависит от времени, то радиус кривизны $\rho(t)$ зависит от давления $p(t)$ и определяется из нелинейного интегрального уравнения.

Теорема 2. Если $E_t^+ \nu_0^- = E_t^- \nu_0^+$, то радиус кривизны ρ находится из алгебраического уравнения, отвечающего упругой задаче, не зависит от времени и давления $p(t) = p_0 f(t)$, где p_0 — начальное давление, $f(t)$ — заданная положительная ограниченная монотонная функция времени.

Перемещения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ изменяются пропорционально упругим перемещениям $u_1(0)$ и $u_2(0)$ с коэффициентом пропорциональности $D(t) = (1 + P^*_1) f(t)$ и при $t \to \infty$ стремятся к предельным значениям

$$u_i(\infty) = u_i(0) D(\infty) \quad \left(D(\infty) = f(\infty) + \int_0^\infty P_1(t, \tau) f(\tau) \, d\tau < \infty \right)$$

Для доказательства этих теорем достаточно найти принципиальное решение рассматриваемой вязко-упругой задачи.

Подставляя выражения σ_r и σ_θ из (7) с учетом (8) и (5) в уравнение равновесия $r(\partial \sigma_r / \partial r) + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$ получим интегро-дифференциальное уравнение

(9) $$r^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_2}{\partial r} - 2\mu_t u_2(r, t) = 0$$

$$2\mu_t = \frac{2E_t^+ (1 - \nu_t^+)}{E_t^- (1 - \nu_t^+)} = 2\mu_0 + K^*, \qquad \mu_0 = \frac{E_0^+ (1 - \nu_0^-)}{E_0^- (1 - \nu_0^+)}$$

$$K^* = 2\mu_0 (q_0^- P_2^* - H_1^* - q_0^- H_1^* P_2^*). \qquad q_0^\pm = 1/2(1 - \nu_0^\pm)$$

Ядро $H_1(t, \tau)$ оператора $H^*{}_1$ есть резольвента ядра $q_0{\pm}P_1(t, \tau)$ оператора $q_0{+}P^*{}_1$. Подстановкой

$$v(r, t) = r^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_2}{\partial r} - 2\mu_0 u_2$$

уравнение (9) приводится к интегральному уравнению

(10) $$v = f_1 + \frac{1}{2n} K^* Q^{**} v \left(Q^{**} v = \int\limits_a^r Q(r, \xi)\, v(\xi, \tau)\, d\xi\right.$$

Ядро координатного оператора Q^{**} и функция f_1 имеют вид ($C_1(t)$ и $C_2(t)$ — функции времени, подлежащие определению)

$$Q(r, \xi) = \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{r}{\xi}\right)^{-\alpha_1} - \left(\frac{r}{\xi}\right)^{-\alpha_2}\right]\xi, \qquad f_1 = K^*(C_1 r^{-\alpha_1} + C_2 r^{-\alpha_2})$$

$$\alpha_i = {}^1\!/_2 + (-1)^i n, \quad i = 1, 2, \quad n^2 = {}^1\!/_4 + 2\mu_0$$

Решая уравнение (10), получим $v = (1 + M) f_1$, где оператор M выражается рядом Неймана

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right)^m K^{*m} Q^{**m}$$

который, как известно [4], сходится равномерно, когда $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant t < \infty$. Здесь ядра операторов K^{*m} и Q^{**m} имеют смысл повторных ядер

$$K_{m+1}(t, \tau) = \int\limits_\tau^t K_1(t, s)\, K_m(s, \tau)\, ds$$

$$Q_{m+1}(r, \xi) = \int\limits_\xi^r Q_1(r, \eta)\, Q_m(\eta, r)\, d\eta$$

$$K(t, \tau) = K_1(t, \tau), \quad Q(r, \xi) = Q_1(r, \xi)$$

Возвращаясь к искомой функции $u_2(r, t)$, получим

(11) $$u_2(r, t) = \psi_1(r)\, C_1(t) + \psi_2(r)\, C_2(t)$$

$$\psi_i(r) = r^{-\alpha_i} + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{m+1}^{(i)}(r)\, K^{*m+1}$$

$$\varphi_{m+1}^{(i)}(r) = \frac{(-1)^m}{(2n)^{m+1}} \int\limits_a^r Q_{m+1}(r, \xi)\, \xi^{-\alpha_i}\, d\xi$$

Пользуясь условиями $\sigma_r(a, t) = -p$, $\sigma_r(\rho, t) = 0$ и первым уравнением (7), а также выражением (11), получим систему линейных интегральных уравнений

(12) $$\lambda_1(a) C_1 + \lambda_2(a) C_2 + \Delta_t p = 0, \qquad \lambda_1(\rho) c_1 + \lambda_2(\rho) c_2 = 0$$

Здесь

$$\lambda_i(a) = a^{-\alpha_i - 1}(\delta_{1t} - \alpha_i \delta_{2t}), \quad \delta_{1t} = 2\nu_t{}^+, \quad \delta_{2t} = 1 - \nu_t{}^+$$

$$\lambda_i(\rho) = (\delta_{1t} - \alpha_i \delta_{2t})\, \rho^{-\alpha_i - 1} + \eta_i{}^*(\rho)$$

$$\eta_i{}^*(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} K^{*m+1}\left(\delta_{1t}\frac{1}{\rho} + \delta_{2t}\frac{\partial}{\partial \rho}\right) \varphi_{m+1}^{(i)}(\rho)$$

Из системы уравнений (12) следует

(13) $$L_t C_1 + \Lambda(\rho)\, \Delta_t\, p = 0, \qquad L_t C_2 = \Delta_t p$$

$$L_t = \lambda_1(a)\, \Lambda_t(\rho) - \lambda_2(a), \qquad \Lambda_t(\rho) = \lambda_2(\rho) / \lambda_1(\rho)$$

Общее решение дифференциального уравнения, определяющего перемещение $u_1(r, t)$, имеет вид

(14) $$u_1 = Ar^{-2} + Br$$

Заменяя в системе (12) величины C_1, C_2 и a соответственно на A, B и b и полагая

$$K^* \equiv 0, \ \alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = -1, \ \Delta_t = (1 - \nu_t^+ - 2\nu_t^{+2}) / E_t^+$$

получим систему интегральных уравнений, определяющих A и B. Как следствие ее решения и представления (14), имеем

(15) $$u_1(r, t) = {}^1/_2 b^3 (\rho^3 r^{-2} + 2rT_{2t})(b^3 - \rho^3)^{-1} T_{1t} p$$

$$T_{1t} = \frac{1 + \nu_t^+}{E_t^+}, \qquad T_{2t} = \frac{3}{1 + \nu_t^+} - 2$$

Привлекая условие $u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t)$, с учетом представлений (11), (13) и (15), получим нелинейное интегральное уравнение

(16) $$b^3 L_t \rho (1 + 2T_{2t}) \ (b^3 - \rho^3)^{-1} T_{1t} p = 2 \ [\psi_1(\rho) \Lambda_t(\rho) - \psi_2(\rho)] \ \Delta_t p$$

Все указанные здесь действия выполняются в соответствии с теорией, разработанной в [5], и посредством правил, установленных в [6, 7]. Уравнение (16) может быть решено методом последовательных приближений.

Структура уравнения (16), определяющего величину $\rho(t)$, подтверждает справедливость теоремы 1 и показывает, что принцип Вольтерра не может быть использован при решении рассматриваемой задачи в общем случае.

Когда же $\nu_t^+ = \nu_0^+$ и $\nu_t^- = \nu_0^-$, то в силу свойства (5) отношение операторов E_t^+ / E_t^- вырождается в постоянную ν_0^+ / ν_0^-. Поскольку при этом $\mu_t = \mu_0$, то интегро-дифференциальное уравнение (9) обращается в известное дифференциальное уравнение, а система интегральных уравнений вырождается в алгебраическую. При этом нелинейное интегральное уравнение (16) приводится к известному алгебраическому уравнению [1], которое не содержит давления p. Зависеть от времени будут только перемещения $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые получаются путем замены в формулах (7.13) и (7.15) из [1] величины $1 / E^+$ оператором

$$1/E_t^+ = (1 / E_0^+)(1 + P^*{}_1)$$

Последнее подтверждает справедливость теоремы 2 и показывает, что в данном частном случае принцип Вольтерра справедлив. Само же условие $\mu_t = \mu_0$ не является достаточным для применимости принципа Вольтерра, поскольку оно может реализоваться и при $\nu_t^+ \neq \nu_0^+$ и $\nu_t^- \neq \nu_0^-$. В этом случае происходит лишь упрощение решения задачи.

Поступила 19 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
2. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
3. *Амбарцумян С. А.* Об одной модели наследственно-упругого тела, разносопротивляющегося растяжения и сжатию. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. М.—Л., ОНТИ, 1934.
5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
6. *Розовский М. И.* Об одном классе функций и их приложениях. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, № 1.
7. *Даткаев А. М., Розовский М. И.* Об операторных и операторно-дифференциальных уравнениях наследственной теории ползучести. Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 1.