УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ФАКТОРИЗАЦИИ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Для решения задач, разрешаемых методом факторизации [1], в последние годы предложены различные приближенные методы: приближенной факторизации [1], вариационные и проекционные методы [2], и наконец, метод ортогональных многочленов [3]. Цель данной работы — указать (оставаясь в рамках точного решения) простой прием преобразования формул, дающих решение проблемы факторизации, к более удобному для расчетов виду и на основании этого приема указать точные решения интегральных уравнений Винера — Хопфа — Фока второго и первого рода в форме, более удобной для проведения вычислений. Вычислительная эффективность предлагаемого приема проиллюстрирована в работе [4].

1. Согласно терминологии работы [5], под факторизацией будем всюду иметь в виду каноническую факторизацию, т. е. представление функции $G(x)$, заданной на сомкнутой прямой $(-\infty, \infty)$ и не обращающейся там в нуль, в виде

$$G(x) = G_+(x)\, G_-(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

где $G_+(x)$ и $G_-(x)$ — функции, регулярные и отличные от нуля в верхней и нижней полуплоскостях и непрерывные, включая границу.

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$G(\pm\infty) = 1, \qquad G_\pm(\infty) = 1 \tag{1.2}$$

Кроме того, будем полагать, что логарифмическая производная функции $G(x)$ интегрируема на вещественной оси.

Решение проблемы факторизации дается формулой [5]

$$\ln G_\pm(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(x)\,dx}{x-z} \qquad \begin{pmatrix}\operatorname{Im} z > 0\\ \operatorname{Im} z < 0\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Займемся преобразованием этой формулы. Все операции будем совершать только над формулой для $G_+(z)$, так как для $G_-(z)$ они полностью аналогичны; кроме того, для наиболее часто встречающегося случая четной функции $G(x)$ имеет место [5] соотношение $G_-(z) = G_+(-z)$.

Отобразив верхнюю полуплоскость переменного z в формуле (1.3) на единичный круг переменного ζ, а вещественную ось $(-\infty < x < \infty)$ — в единичную окружность γ, вместо (1.3) имеем

$$\ln G_+\left(-i\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln G\left(-i\,\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln G\left(-i\,\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-1} \tag{1.4}$$

Применяя к первому интегралу прием, описанный в работе [6], получим

$$h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\zeta^n \tag{1.5}$$

$$h_0 = -\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\ln G(-\operatorname{ctg} {}^1\!/_2\varphi)\,d\varphi}{e^{{}^1\!/_2\varphi}\sin {}^1\!/_2\,\varphi} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\frac{\ln G(-\operatorname{ctg}\varphi)\,d\varphi}{e^{-i\varphi}\sin\varphi}$$

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln G(-\operatorname{ctg} {}^1\!/_2\,\varphi)\,d\varphi}{e^{in\varphi}} = \frac{1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi}\frac{d\,[\ln G(-\operatorname{ctg}\varphi)]}{e^{in\varphi}}$$

Таким образом, коэффициенты ряда Маклорена функции с точностью до постоянных представляют собой коэффициенты Фурье заданной функции, и для их вычисления в общем случае можно воспользоваться известными формулами тригонометрической интерполяции [7].

В частных случаях может оказаться полезной формула [4]

$$h_n = \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n d\,[\ln G(x)] \tag{1.6}$$

получаемая из второй формулы для h_n из (1.5) путем перехода к интегрированию по единичной окружности и затем отображения последней на вещественную ось. В важном частном случае, когда $G(x)$ — четная функция, формулы (1.5) упрощаются

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \ln G\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right) d\theta, \quad h_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin n\theta\, d\left[\ln G\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)\right] \tag{1.7}$$

Для получения этих формул следует в первых интегралах, определяющих h_0 и h_n в (1.5), сделать замену $\varphi = \pi + \theta$ и учесть четность $G(x)$.

Итак, искомая функция $G_+(z)$, входящая в факторизацию функции $G(x)$, будет определяться формулой

$$G_+\left(-i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = \exp\left(\sum_{h=0}^{\infty} h_n \zeta^n\right) = g(\zeta) \qquad (|\zeta| \leqslant 1) \tag{1.8}$$

Такое представление не совсем удобно, если функцию приходится интегрировать вдоль вещественной оси. В этом случае представляет интерес получить формулы для коэффициентов ряда Маклорена функции

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \zeta^n \tag{1.9}$$

Очевидно, что $g_0 = e^{h_0}$.

Для вычисления остальных коэффициентов поступаем так. На основании (1.8) имеем $h(\zeta) = \ln g(\zeta)$, поэтому $g'(\zeta) = h'(\zeta)\, g(\zeta)$.

Подставляя сюда разложения

$$g'(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, g_{m+1} \zeta^m, \qquad h'(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, h_{m+1} \zeta^m$$

а также разложения (1.9) и приравнивая коэффициенты, получим следующую рекуррентную формулу:

$$g_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n-m+1}{n+1} h_{n-m+1} g_m \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.10}$$

Ниже дается иллюстрация и развитие предлагаемого приема применительно к к интегральным уравнениям Винера — Хопфа — Фока второго и первого рода.

2. Вначале рассмотрим уравнение второго рода со специальной правой частью

$$\chi_p(x) - \int\limits_0^{\infty} k(x-y)\, \chi_p(y)\, dy = e^{ipx} \qquad (\operatorname{Im} p > 0;\ K(x) = K(-x)) \tag{2.1}$$

считая, ради простоты, ядерную функцию четной.

Решение уравнения (2.1) имеет вид [5]

$$\chi_p(x) = -\frac{G_+(p)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G_+(s)\, e^{-isx}\, ds}{s+p} \tag{2.2}$$

Функция $G_+(z)$ в рассматриваемом случае факторизует функцию

(2.3) $$G(x) = [1 - K(x)]^{-1} = G_+(x)\,G_-(x),\quad K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(s)\,e^{isx}\,ds$$

На основании (1.8), (1.9) имеем разложение

(2.4) $$G_+(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{s-i}{s+i}\right)^n$$

подставив которое в (2.2), получим

$$\chi_p(x) = [1 - K(p)]^{-1} e^{ipx} + G_+(p) \sum_{n=0}^{\infty} g_n \operatorname{Res}\left[\left(\frac{s-i}{s+i}\right)^n \frac{e^{-isx}}{s+p}\right]$$

Можно поступить иначе. Представим функцию (2.2) в виде разложения по многочленам Лагерра

(2.5) $$\chi_p(x) = 2e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(p)\, L_j(2x)$$

Тогда

(2.6) $$\chi_j(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_j(2x)\, \chi_p(x)\, dx = \frac{G_+(p)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_+(s)\,(s+i)^j\, ds}{(s+p)\,(s-i)^{j+1}}$$

Для вычисления последнего интеграла отобразим верхнюю полуплоскость переменного s на единичный круг переменного t, т. е. сделаем замену $s = -i(t+1)\cdot(t-1)^{-1}$. Получающийся при этом интеграл по единичной окружности вычисляется на основании теоремы о вычетах с использованием разложения (1.8), (1.9). В итоге получаем формулу

(2.7) $$\chi_j(p) = i\,\frac{G_+(p)}{p+i} \sum_{r=0}^{j} g_r \left(\frac{p-i}{p+i}\right)^{j-r}$$

Пусть теперь интегральное уравнение (2.1) имеет вид

(2.8) $$\chi(x) - \int_0^{\infty} k(x-y)\,\chi(y)\,dy = f(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

Тогда, если

(2.9) $$F(u) = \int_0^{\infty} e^{ixu} f(x)\, dx$$

то решение будет иметь вид

(2.10) $$\chi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-p)\, \chi_p(x)\, dp$$

или на основании (2.5) и (2.7)

(2.11) $$\chi(x) = 2e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} F_j L_j(2x), \qquad F_j = -\sum_{r=0}^{j} g_r I_{j-r}$$

(2.12) $$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-p)\,G+(p)}{p+i} \left(\frac{p-i}{p+1}\right)^m dp$$

Для некоторых частных случаев правых частей в (2.8) этот интеграл легко вычисляется при помощи теории вычетов. В общем случае поступаем так. Пользуясь разложением (2.4), записываем

$$(2.13)\qquad I_k=\sum_{n=0}^{\infty} g_n f_{n+k}, \qquad f_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(-p)}{p+i}\left(\frac{p-i}{p+i}\right)^m dp$$

Замена $p=\operatorname{ctg} {}^1/{}_2\,\varphi$ приводит к формуле

$$(2.14)\qquad f_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}F^*\left(-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi\right)d\varphi$$

$$2iF^*(x)=(x-i)\,F(-x)$$

т. е. коэффициенты f_m тоже представляют собой коэффициенты Фурье.

3. В задачах теории упругости чаще встречаются интегральные уравнения первого рода

$$(3.1)\qquad \int_0^{\infty} k(x-y)\,\chi(y)\,dy=f(x) \qquad (x\geqslant 0,\ k(x)=k(-x))$$

Будем считать, что преобразование Фурье ядерной функции дифференцируемо на вещественной оси, отлично там от нуля, а на бесконечности имеет асимптотику

$$(3.2)\qquad K(u)=\gamma u^{2\mu+1}\,[1+O(u^{-1})] \qquad (u\to\infty,\ |\mu|<{}^1/{}_2)$$

Без ограничения общности всюду ниже будем считать $\gamma=1$. Для интегрального уравнения со специальной правой частью

$$(3.3)\qquad \int_0^{\infty} k(x-y)\,\chi_p(y)\,dy=e^{ipx} \qquad (x,\ \operatorname{Im} p\geqslant 0)$$

по-прежнему имеет место [5, 8] формула

$$(3.4)\qquad \chi_p(x)=-\frac{K_+(p)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_+(s)\,e^{-isx}\,ds}{s+p}$$

где $K_+(z)$ — функция, регулярная (кроме точки ∞) и отличная от нуля в верхней полуплоскости и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$(3.5)\qquad K^{-1}(z)=K_+(z)\,K_-(z) \qquad (-\infty<z<\infty)$$

Учитывая асимптотику (3.2), представим $K(z)$ в виде

$$(3.6)\qquad K^{-1}(z)=(z^2+1)^{{}^1/{}_2-\mu}\,G(z), \qquad G^{-1}(z)=(z^2+1)^{{}^1/{}_2-\mu}\,K(z)$$

Функцию $G(z)$ можно профакторизовать, пользуясь формулой (1.3), и тем самым решение уравнения (3.5) получить в виде

$$(3.7)\qquad K_+(z)=(1-iz)^{{}^1/{}_2-\mu}\,G_+(z)$$

При этом для $G_+(z)$ следует использовать формулу (2.4).

Для некоторых частных случаев ядерных функций интеграл в (3.4) методами контурного интегрирования [8] можно привести к виду, удобному для вычислений. В общем случае полезен такой прием. Учитывая характер особенности решения уравнения (3.3) в нуле, вытекающей [3] из асимптотики (3.2), представляем его в виде следующего ряда по многочленам Чебышева — Лагерра:

$$(3.8)\qquad \chi_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2e^{-x}\chi_m(p)\,L_m^{\mu-{}^1/{}_2}(2x)}{x^{{}^1/{}_2-\mu}\,\mu_m}, \qquad \mu_m=\frac{\Gamma({}^1/{}_2+\mu+m)}{m!}$$

При этом

$$\chi_m(p) = -\frac{2^{\mu-1/2}K_+(p)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_+(s)\,I_m^-(s)\,ds}{s+p} \tag{3.9}$$

$$I_m^-(s) = \int\limits_0^{\infty}\frac{L_m^{\mu-1/2}(2x)\,dx}{e^{x(1+is)}} = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\mu-1/2)_{m-k}(s+i)^k}{(m-k)!\,(s-i)^{k+1}} \tag{3.10}$$

Далее, в формуле (3.7) делаем замену $z = -i(\zeta+1)(\zeta-1)^{-1}$, после чего левую часть разлагаем в ряд Маклорена по ζ, используя (1.8) и (1.9). В результате имеем

$$K_+\left(-i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} g_j^*\zeta^j \tag{3.11}$$

$$g_j^* = 2^{1/2-\mu}\sum_{r=0}^{j}\frac{(1/2-\mu)_r g_{j-r}}{r!}$$

Подставим теперь (3.10) и (3.11) в (3.9), и получающийся при этом интеграл вычислим тем же приемом, что и интеграл в (2.6). В результате получим

$$\chi_m(p) = \frac{i2^{\mu-1/2}K_+(p)}{p+i}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\mu-1/2)_{m-k}}{(m-k)!}\sum_{n=0}^{k}g_n^*\left(\frac{p-i}{p+i}\right)^{k-n}. \tag{3.12}$$

Наконец, подставив сюда выражение для g_n^* из (3.11) и воспользовавшись соотношением

$$C_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{(\mu-1/2)_{n-j}(1/2-\mu)_j}{(n-j)!\,j!} = \begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n=1,2\ldots\end{cases} \tag{3.13}$$

получим окончательно

$$\chi_m(p) = \frac{iK_+(p)}{p+i}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{p-i}{p+i}\right)^j g_{m-j} \tag{3.14}$$

Справедливость соотношения (3.13) можно усмотреть, если учесть, что C_n — коэффициент ряда Маклорена функции $(1-x)^{\mu-1/2}(1-x)^{1/2-\mu}$, полученного путем перемножения рядов Маклорена для каждого множителя.

Для решения интегрального уравнения (3.1), как и в случае уравнения второго рода, справедлива формула (2.10), которую с учетом (3.8) и (3.14) можно привести к виду

$$\chi(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2F_m L_m^{\mu-1/2}(2x)}{e^x x^{1/2-\mu}\mu_m}, \qquad F_n = -\sum_{r=0}^{n} g_r I_{m-r} \tag{3.15}$$

Для интеграла I_m справедлива формула (2.12) с заменой $G_+(p)$ на $K_+(p)$. При этом для последней можно помимо (3.7) использовать разложение

$$K_+(p) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^*\left(\frac{p-i}{p+i}\right)^m \tag{3.16}$$

вытекающее из (3.11.) Его использование приводит к формулам (2.13), (2.14) и (2.16) с заменой g_n на g_n^*.

Поступила 18 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. G.* Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1954, Bd. 57, Nr 5.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., «Наука», 1971.
3. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. *Паскаленко А. А., Попов Г. Я.* Плоская задача об изгибе полубесконечной балки на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
8. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.

УДК 539.376

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОЙ СФЕРЫ ПРИ РАЗНОПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

(Днепропетровск)

Рассматривается полярно-симметричная деформация вязко-упругой толстостенной полой сферы, материал которой обладает свойством разносопротивляемости при растяжении и сжатии. Сосуд находится под действием внутреннего давления p и наружного растяжения p, которые распределены равномерно по поверхностям $r = a$ и $r = b$ $(a < b)$. В силу сказанного сосуд разделяется на две части сферической поверхностью радиуса $r = \rho$, который при решении соответствующей упругой задачи [1] не зависит от величины p даже в том случае, когда последняя изменяется с течением времени t.

При решении вязко-упругой задачи будем исходить из операторных физических уравнений в сферических координатах:

для первой части сосуда $(\sigma_r > 0,\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi > 0)$

$$E_t^+\varepsilon_r = \sigma_r - 2\nu_t^+\sigma_\theta, \qquad E_t^+\varepsilon_\theta = (1-\nu_t^+)\sigma_\theta - \nu_t^+\sigma_r \tag{1}$$

для второй части $(\sigma_r < 0,\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi > 0)$

$$E_t^-\varepsilon_r = \sigma_r - 2\nu_t^-\sigma_\theta, \qquad E_t^+\varepsilon_\theta = (1-\nu_t^+)\sigma_\theta - \nu_t^+\sigma_r \tag{2}$$

Здесь σ_r, $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = u / r$, $\varepsilon_r = \partial u / \partial r$ — напряжения и деформации, E_t^+, ν_t^+ и E_t^-, ν_t^- — операторные модули и операторные коэффициенты Пуассона при растяжении (индекс плюс) и сжатии (индекс минус) $u = u_1$ и $u = u_2$ — нормальные перемещения в первой и второй части сферы соответственно, операторы

$$E_t^+ = E_0^+(1-R_1^*), \qquad E_t^- = E_0^-(1-R_2^*) \tag{3}$$

$$\nu_t^+ = \nu_0^+(1-g_0^+R_1^*), \qquad \nu_t^- = \nu_0^-(1+g_0^-R_2^*) \tag{4}$$

$$g_0^\pm = \frac{1-2\nu_0^\pm}{2\nu_0^\pm}, \qquad R_i^*\{\cdot\} = \int_0^t R_i(t,\tau)\{\cdot\}\,d\tau \qquad (i = 1, 2)$$

где R_i^* — интегральные операторы с ядрами релаксации $R_1(t,\tau)$ и $R_2(t,\tau)$ при растяжении и сжатии соответственно, E_0^+, ν_0^+ и E_0^-, ν_0^- — упруго-мгновенные константы, характеризующие разномодульность материала.