Теоремы существования и единственности решения W задачи (3.1), (3.2) доказаны в работе [3]. Изучение уравнения (3.3) на основании свойств решения W задачи (3.1), (3.2) приводят к тем же результатам, что и выше, в силу обратимости (доказанной [3]) замены Крокко.

В заключение заметим, что если интеграл (1.6), в котором

$$\beta(y) = \min_{0 \leqslant x \leqslant X} v(x, y)$$

расходится, а коэффициенты и правая часть уравнения (1.2) по-прежнему удовлетворяют условиям A, то уравнение (1.2) имеет в Q единственное ограниченное решение, удовлетворяющее лишь условию (1.5).

Автор благодарит О. А. Олейник за обсуждение результатов.

Поступила 15 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. *Олейник О. А.* Математические задачи теории пограничного слоя. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 3.
3. *Олейник О. А.* Асимптотическое разложение решения системы уравнений пограничного слоя для стационарного плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости в окрестности точки остановки. Тр. ин-та прикл. матем. Тбилисск. ун-та, 1969, № 2.
4. *Введенская Н. Д.* О решении уравнений пограничного слоя в окрестности критической точки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
5. *Джураев Т. Д.* О системе уравнений теории пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 11.
6. *Джураев Т. Д.* О системе уравнений температурного пограничного слоя для несжимаемой жидкости. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук, 1971, № 3.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
8. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В кн.: Итоги науки, вып. «Математический анализ», 1969. М., ВИНИТИ, 1971.
9. *Смирнова Г. Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ПОЛУПЛОСКОСТЬ С КРУГОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ю. А. Амензаде (Баку)

Решается задача о вдавливании штампа в полуплоскость с круговыми отверстиями, в которые с заданными натягами вставлены круговые включения из другого материала.

1. В работе [1] дан метод решения задачи о вдавливании штампа с плоским основанием в полуплоскость с включениями. С целью реализации метода [1] приведем решение задачи о вдавливании штампа в полуплоскость с круговыми отверстиями (область S_0), в которые с заданными натягами δr_k вставлены круговые включения радиусов r_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) из другого материала (области S_k) (фиг. 1).

В работе [1] контактная задача, не учитывающая сил трения под штампом, когда прямая вне штампа свободна от сил и имеет место полный контакт штампа с границей полуплоскости, сведена к задаче Римана с индексом —1, общее решение которой представляет собою регулярную на разрезанной вдоль линии L ((0, ∞), ($-\infty$, 0)) плоскости z и принимающую на бесконечности нулевое значение функцию

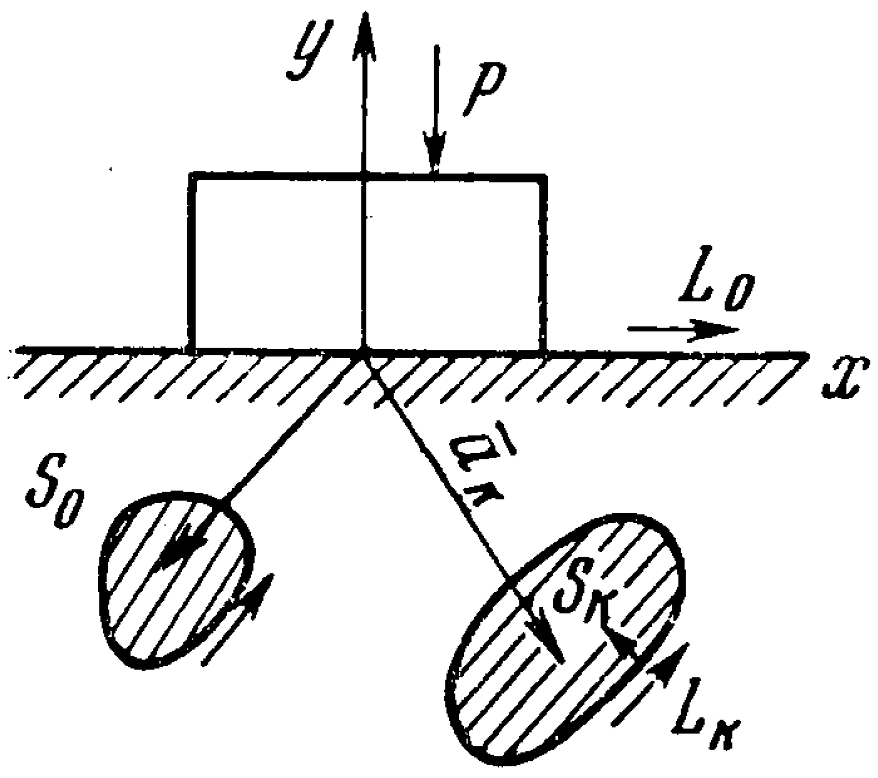
$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{iP}{2\pi} X_0(z) \tag{1.1}$$

Здесь

$$X_0(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2}, \quad f(t) = 2\,[f_2^-(t) + \bar f_2^-(t)] + f_1^-(t) + \bar f_1^-(t) \tag{1.2}$$

$$f_2(z) = I_1'(z), \quad f_1(z) = zI_1''(z) + I_2'(z) \tag{1.3}$$

$$I_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\omega_k(t)}{t-z}\,dt, \quad I_2(z) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\overline{\omega_k(t)} + \bar t\,\omega_k'(t)}{t-z}\,dt \tag{1.4}$$



Фиг. 1

где $2a$ — ширина штампа, P — сила, с которой штамп вдавливается в полуплоскость.

2. Для решения задачи вспомогательную неизвестную функцию $\omega_k(t)$ берем в виде

$$\omega_k(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_{\nu k} \left(\frac{t-\bar a_k}{r_k}\right)^{\nu} \tag{2.1}$$

Здесь $a_k = d_k - ih_k$ — аффикс центра окружности L_k; $\alpha_{0k}, \alpha_{\nu k}, \alpha_{-\nu k}$ — неизвестные постоянные коэффициенты, вообще говоря, комплексные.

Подставив функцию $\omega_k(t)$ в (1.4), получим

$$I_1'(z)\,|_{z\in S_0} = I_{10}'(z), \quad I_{10}'(z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{r_k}\,\alpha_{-\nu+1,\,k}\left(\frac{r_k}{z-\bar a_k}\right)^{\nu} \tag{2.2}$$

$$I_1'(z)\,|_{z\in S_q} = I_{10}'(z) + \sum_{\substack{\nu=0\\(k\neq q)}}^{\infty} \frac{\nu+1}{r_q}\,\alpha_{\nu+1,\,q}\left(\frac{z-\bar a_q}{r_q}\right)^{\nu}$$

$$I_2'(z)\,|_{z\in S_0} = I_{20}'(z), \quad I_{20}'(z) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{r_k}\Big[\bar\alpha_{\nu-1,\,k} - \tag{2.3}$$

$$- \frac{a_k}{r_k}(\nu-2)\,\alpha_{-\nu+2,\,k} - (\nu-3)\,\alpha_{-\nu+3,\,k}\Big]\left(\frac{r_k}{z-\bar a_k}\right)^{\nu}$$

$$I_2'(z)\,|_{z\in S_q} = I_{20}'(z) - \sum_{\substack{\nu=1\\(k\neq q)}}^{\infty} \frac{\nu}{r_q}\Big[\bar\alpha_{-\nu,\,q} + \frac{a_q}{r_q}(\nu+1)\,\alpha_{\nu+1,\,q} +$$

$$+ (\nu+2)\,\alpha_{\nu+2,\,q}\Big]\left(\frac{z-\bar a_q}{r_q}\right)^{\nu-1}$$

На основании формул (1.3), (2.2), (2.3) из (1.2) определим на L_k

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big\{\frac{\nu-1}{r_k}(2\alpha_{-\nu+1,\,k} + l_{\nu k})\left(\frac{r_k}{t-\bar a_k}\right)^{\nu} + \tag{2.4}$$

$$+ \frac{\nu-1}{r_k}(2\bar\alpha_{-\nu+1,\,k} + \bar l_{\nu k})\left(\frac{r_k}{t-a_k}\right)^{\nu}$$

где

$$l_{\nu k} = -\Big\{\nu\alpha_{-\nu+1,\,k} - 2(\nu-2)\,i\,\frac{h_k}{r_k}\,\alpha_{-\nu+2,\,k} + \bar\alpha_{\nu-1,\,k} - (\nu-3)\,\alpha_{-\nu+3,\,k}\Big\}$$

Подставим (2.4) в (1.1) и учтем, что $\sqrt{\bar a_k^2 - a^2} = -\sqrt{a_k^2 - a^2}$; тогда в силу теоремы о вычетах из (1.1) после ряда преобразований найдем

$$F(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{\Big[\bar P_q(k)\left(\frac{r_k}{z-\bar a_k}\right)^{q} + P_q(k)\left(\frac{r_k}{z-a_k}\right)^{q}\Big] + \tag{2.5}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\Big[\bar Q_q(k)\left(\frac{r_k}{z-\bar a_k}\right)^{q} - Q_q(k)\left(\frac{r_k}{z-a_k}\right)^{q}\Big]\Big\} - \frac{iP}{2\pi\sqrt{z^2-a^2}}$$

$$\overline{P}_q(k)=\frac{q-1}{r_k}(2\alpha_{-q+1,\,k}+l_{qk})$$

$$\overline{Q}_q=(-1)^q\left(\frac{\bar{a}_k+a}{r_k}\right)^q\frac{\sqrt{\bar{a}_k^{\,2}-a^2}}{r_k}\sum_{\nu=q}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)}{(\nu-1)!}\times$$
$$\times(2\alpha_{-\nu+1,\,k}+l_{\nu k})\left(\frac{r_k}{\bar{a}_k+a}\right)^\nu\bar{e}_{q-1}(\nu,k)$$

$$\bar{e}_s(\nu,k)=2^{s-\nu+1}\frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-s)!}\sum_{j=0}^{\nu-1-s}C^j_{\nu-1-s}(2j-3)!!\,(2\nu-2s-2j-5)!!\times$$
$$\times\left(\frac{\bar{a}_k+a}{\bar{a}_k-a}\right)^j\qquad((-1)!!=1,\quad(-3)!!=-1)$$

Учитывая соотношения (2.2), (2.3) в (1.3), а также формулу (2.5) и принимая во внимание разложения на L_q

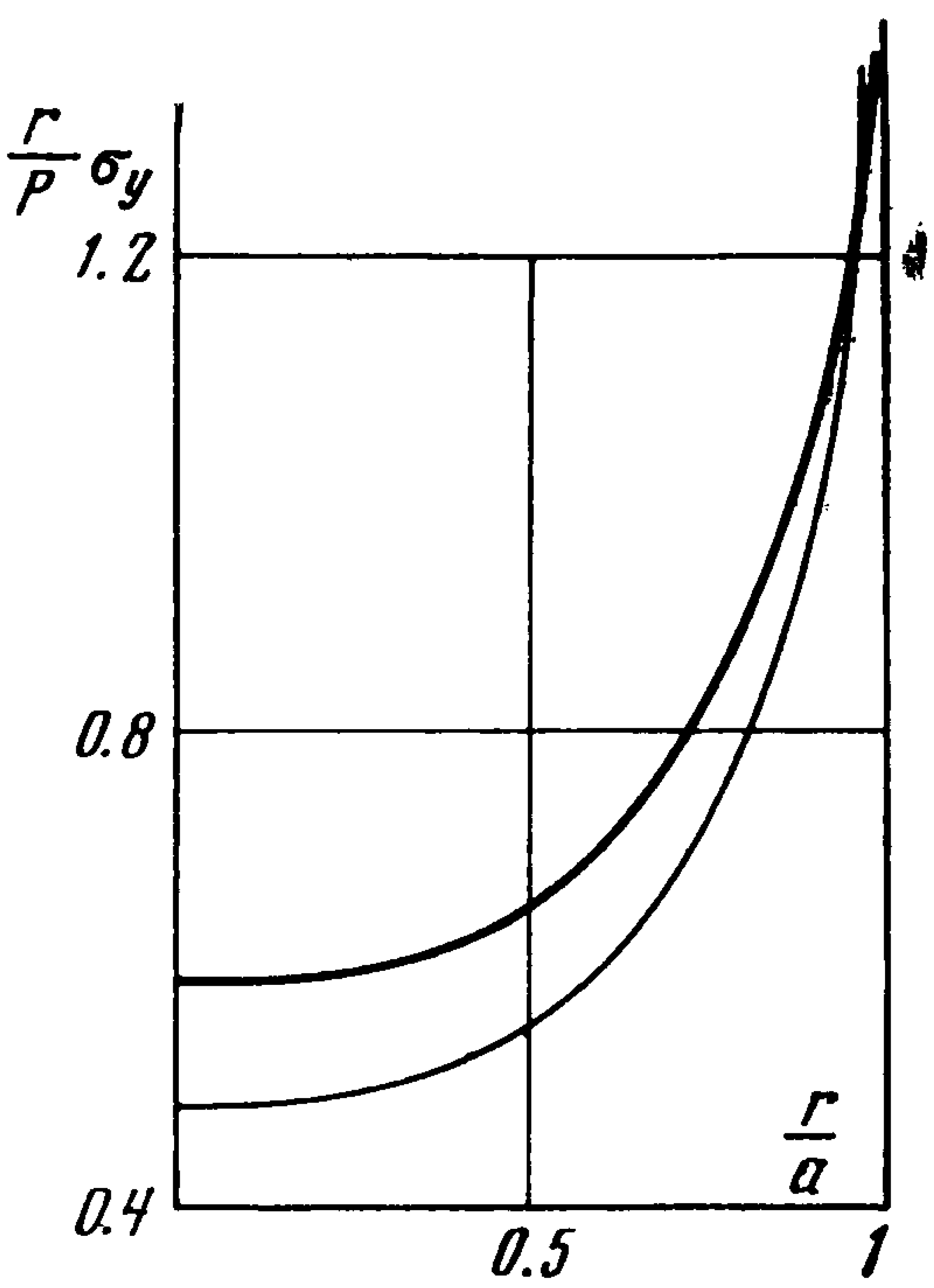
$$\left(\frac{r_k}{t-a_k}\right)^p=\left(\frac{-r_k}{a_k-\bar{a}_q}\right)^p\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu C^\nu_{-p}\left(\frac{r_q}{a_k-\bar{a}_q}\right)^\nu\left(\frac{t-\bar{a}_q}{r_q}\right)^\nu$$

$$\left(\frac{t-a_k}{r_k}\right)^p=(-1)^p\left(\frac{a_k-\bar{a}_q}{r_k}\right)^p\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu C^\nu_p\left(\frac{r_q}{a_k-\bar{a}_q}\right)^\nu\left(\frac{t-\bar{a}_q}{r_q}\right)^\nu$$

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_k^{\,2}-a^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_q}{\bar{a}_q+a}\right)^n\sum_{m=0}^{n}C^m_{-1/2}C^{n-m}_{-1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{\bar{a}_q+a}{\bar{a}_q-a}\right)^m\left(\frac{t-\bar{a}_q}{r_q}\right)^n$$

относительно коэффициентов Фурье α_{0q}, $\alpha_{\nu q}$, $\alpha_{-\nu q}$ получим $2m$ бесконечных систем линейных уравнений, которые не приводятся ввиду их громоздкости.

Приведем результаты числового расчета для $a/h=1/3$, $r/h=1/2$, $\bar{a}_1=-ih$, $\varkappa_0=\varkappa_1=2$, $\mu_0/\mu\ll 1$ ($\varkappa_0$, μ_0 и $\varkappa_k$, μ_k — соответственно упругие постоянные материалов, заполняющих области S_0, S_k) и $\delta r_1=0$. При этом из бесконечной системы уравнений удержаны первые три комплексных уравнения. Вычислено давление под штампом в точках $x/a=0, 0.25, 0.5, 0.75$ и 0.9 и построены эпюры давлений (фиг. 2). Для сравнения тонкой сплошной линией показана также эпюра давления, когда включение отсутствует.



Фиг. 2

Поступила 26 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде Ю. А.* Вдавливание штампа в полуплоскость с включениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.