УДК 532.526

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Т. Д. Джураев (Ташкент)

Рассматривается система уравнений температурного пограничного слоя для плоского, установившегося, вынужденного конвективного течения несжимаемой жидкости и, в основном, изучается уравнение для температуры. Доказывается однозначная разрешимость основной краевой задачи для этого уравнения.

Вопрос об однозначной разрешимости основных задач теории динамического пограничного слоя для установившегося течения несжимаемой жидкости изучен в работах [1–5]. В случае, когда для динамической системы уравнений решается задача о продолжении пограничного слоя [1,5], уравнение для температуры изучено в работе [6].

1. Рассмотрим систему уравнений температурного пограничного слоя для вынужденного конвективного течения несжимаемой жидкости (см. [7], стр. 281)

$$\nu u_{yy} - uu_x - vu_y = -UU_x, \quad u_x + v_y = 0 \tag{1.1}$$

$$aT_{yy} - uT_x - vT_y = f(x, y) = -\nu/c\,(u_y)^2 \tag{1.2}$$

Здесь ν, a, c — известные положительные постоянные, $U(x)$ — заданная продольная компонента скорости внешнего течения.

Сначала можно определить функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ из динамических уравнений (1.1) и соответствующих им граничных условий и полученный результат использовать для определения температуры $T(x, y)$ в пограничном слое из уравнений (1.2) и краевых условий, которые будут указаны ниже.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — решение в области $Q\,\{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ уравнений (1.1) со следующими граничными условиями:

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = U(x) \tag{1.3}$$

Здесь $v_0(x)$, $U(x)$ — заданные гладкие функции, $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ при $x > 0$, $U'(0) > 0$.

Теоремы существования и единственности решения задачи (1.1), (1.3) установлены в работах [3,4]. Не приводя этих теорем, отметим лишь те свойства функций u, v, которые будут использованы при изучении уравнения (1.2) в полосе Q; назовем их, для краткости, условиями A: в любом компакте, лежащем в полосе Q, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $u_y(x, y)$ удовлетворяют условию Гельдера; $u(x, y) > 0$ при x, $y > 0$; $u(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 0$; $u(x, y) \leqslant U(x)$ всюду в Q, где функция $U(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и

$$\int_0^X \frac{dt}{U(t)} = +\infty \tag{1.4}$$

функция $v(x, y)$ ограничена при ограниченных y; $u_y(x, y) \to 0$ при $y \to \infty$. Видно, что уравнение (1.2) в области Q является параболическим, вырождающимся при $x = 0$ и $y = 0$.

Прежде чем сформулировать корректную краевую задачу в Q для уравнения (1.2), сделаем следующее замечание.

Замечание 1. Как известно (см., например, [8,9]), в силу условий (1.3) и (1.4) краевое условие для $T(x, y)$ при $x = 0$ задавать нельзя. Покажем, что ограниченное решение уравнения вида (1.2) с граничным условием

$$T|_{y=0} = T_0(x) \tag{1.5}$$

где $T_0(x)$ — заданная в $0 \leqslant x \leqslant X$ непрерывная функция, может оказаться неединственным. В самом деле, уравнению (1.2) при $a = 1$, $u = x^k$, $v = \alpha y$, $f = 0$ ($k \geqslant 1$, $\alpha = \mathrm{const} < 0$) и однородному граничному условию $T|_{y=0} = 0$ удовлетворяет ограниченная и отличная от нуля в полосе Q функция

$$T(y)=\int_0^y \exp\left\{\frac{\alpha}{2}t^2\right\}dt$$

Отсюда следует, что решение задачи (1.2), (1.5) в рассмотренных условиях неединственно. Следовательно, кроме условия (1.5), должно быть задано некоторое дополнительное условие. В теории пограничного слоя таким условием служит $\lim\limits_{y\to\infty} T(x, y) = T_\infty$, где T_∞ — заданная константа.

Теорема. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1.2) удовлетворяют условиям A и, кроме того

$$(1.6)\qquad \int_0^{+\infty} \exp\left\{\int_0^t \beta(\tau)\,d\tau\right\}dt<\infty, \qquad \beta(y) = \max_{0\leqslant x\leqslant X} v(x, y)$$

$$(1.7)\qquad |f(x, y)| \leqslant g(y)$$

где положительная функция $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$, причем так, что

$$(1.8)\qquad \int_0^{+\infty} g(\tau)\exp\left\{-\int_0^\tau \beta(s)\,ds\right\}d\tau < \infty$$

Тогда уравнение (1.2) имеет в Q единственное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям

$$(1.9)\qquad T|_{y=0} = T_w(x), \qquad \lim_{y\to\infty} T(x, y) = T_\infty$$

где $T_w(x)$ — заданная непрерывная функция (температура стенки обтекаемого тела), причем $T_w'(x)$ ограничена, T_∞ — заданное постоянное число (температура внешнего потока).

2. Для доказательства теоремы перейдем к новым независимым переменным

$$(2.1)\qquad x = x, \qquad \eta = 1-\frac{1}{1+y}$$

при которых полоса Q переходит в прямоугольник $D\ \{0 < x < X,\ 0 < \eta < 1\}$, а вместо уравнения (1.2), в котором без ограничения общности можно полагать $a = 1$, получим следующее уравнение в области D:

$$(2.2)\qquad L(T) \equiv (1-\eta)^4\, T_{\eta\eta} - u(x, \eta)\, T_x + b(x, \eta)\, T_\eta = f(x, \eta)$$

$$b(x, \eta) = -(1-\eta)^2\,[2(1-\eta) + v(x, \eta)]$$

Условия (1.9) перейдут в граничные условия

$$(2.3)\qquad T|_{\eta=0} = T_w(x), \qquad T|_{\eta=1} = T_\infty$$

Докажем существование решения задачи (2.2), (2.3). Для этого уравнение (2.2) рассмотрим в прямоугольнике

$$D_\delta\ \{\delta < x \leqslant X, \quad \delta < \eta < 1-\delta\}, \qquad 0<\delta<{}^1/_4$$

при следующих условиях на границе D_δ:

$$(2.4)\qquad T|_{\eta=\delta} = T_w(x), \qquad T|_{\eta=1-\delta} = T_\infty, \qquad T|_{x=\delta} = T_1^\delta(\eta)$$

где функция $T_1^\delta(\eta)$ выбирается так, чтобы выполнялись условия

$$T_1^\delta(\delta) \equiv T_w(\delta) \quad \text{при} \quad \eta \leqslant {}^1/_3, \qquad T_1^\delta(\eta) \equiv T_\infty \quad \text{при} \quad \eta \geqslant {}^2/_3$$

$$|T_1^\delta(\eta)| \leqslant \max\{|T_\infty|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant X} |T_w(x)|\} \equiv M$$

Решение $T^\delta(x, \eta)$ задачи (2.2), (2.4) существует и, согласно принципу максимума для невырожденных параболических уравнений (см., например, [10])

$$|T^\delta(x, \eta)| \leqslant M \tag{2.5}$$

где M не зависит от δ. В силу известных оценок типа Шаудера [10] в любом фиксированном прямоугольнике D_δ имеются равномерная по δ оценки гельдеровских норм решения T^δ и их производных T_η^δ, $T_{\eta\eta}^\delta$, T_x^δ.

На основании этих оценок при помощи диагонального процесса выделяем подпоследовательность T^{δ_m} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, сходящуюся при $m \to \infty$ $(\delta_m \to 0$ при $m \to \infty)$ равномерно вместе с производными, входящими в уравнение (2.2), в каждой замкнутой области, лежащей строго внутри D. Переходя к пределу в уравнении для T^{δ_m} при $m \to \infty$, получим, что предельная функция $T(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению (2.2) в прямоугольнике D.

Для доказательства выполнения условия $T(x, 0) = T_w(x)$ оценим разность $T^\delta(x, \eta) - T_w(x) = S^\delta(x, \eta)$ при малых η. Уравнение

$$L(S^\delta) = f(x, \eta) + u(x, \eta)\ T_w'(x)$$

которому удовлетворяет функция $S^\delta(x, \eta)$, рассмотрим в области D_δ' $\{\delta \leqslant x \leqslant X,\ \delta < \eta < {}^1/_3\}$. Пусть $|f(x, \eta)| \leqslant M_1$, $u(x, \eta)\ |T_w'(x)| \leqslant M_2$ в области D_δ'.

Введем вспомогательную функцию $Y(\eta) = K(1 - e^{-N\eta})$. Постоянную $N > 0$ выберем из условия $N(1 - \eta)^4 \geqslant |b(x, \eta)| + 1$. Это возможно, так как коэффициент $v(x, y)$ ограничен при ограниченных y или, согласно замене (2.1), при $\eta \leqslant \eta_0 < 1$. Постоянную $K > 0$ выберем так, чтобы

$$K \geqslant \max\left\{\frac{2M}{1 - e^{-N/3}}\ \frac{M_1 + M_2}{Ne^{-N}}\right\} \tag{2.6}$$

где M — то же, что в неравенстве (2.5). Вычисляя $L(Y)$, имеем $L(Y) = -KNe^{-N\eta}\cdot$ $\cdot\,(N(1 - \eta)^4 - b(x, \eta)) \leqslant -KNe^{-N} < 0$ в силу выбора N. Рассмотрим функцию $Y \pm S^\delta(x, \eta)$. Имеем

$$L(Y \pm S^\delta) \leqslant -KNe^{-N} \pm f(x, \eta) \pm u(x, \eta)\ T_w'(x) \leqslant$$
$$\leqslant -KNe^{-N} + M_1 + M_2 \leqslant 0$$

в D_δ' в силу (2.6). Из (2.4) — (2.6) следует, что функция $Y \pm S^\delta \geqslant 0$ на границе области D_δ', лежащей на прямых $x = \delta$, $\eta = \delta$, $\eta = {}^1/_3$. По принципу максимума отсюда вытекает, что $Y \pm S^\delta \geqslant 0$ всюду в D_δ'. Следовательно, имеем оценку $|S^\delta(x, \eta)| \leqslant Y(\eta)$, равномерную по δ и x. Отсюда, переходя к пределу при $\delta \to 0$ и $\eta \to 0$, получим $T(x, 0) = T_w(x)$.

Докажем, что $T(x, \eta)$ удовлетворяет и второму из условий (2.3). Для этого оценим $F^\delta(x, \eta) = T^\delta(x, \eta) - T_\infty$ при малых $1 - \eta$. Уравнение $L(F^\delta) = f(x, \eta)$, которому удовлетворяет функция $F^\delta(x, \eta)$, рассмотрим в области D_δ'' $\{\delta < x \leqslant X,\ {}^2/_3 \leqslant \eta < 1 - \delta\}$.

Рассмотрим функцию

$$Z(\eta) = K_1 \int_\eta^1 G(t)\, G_1(t)\, dt \tag{2.7}$$

где

$$G(t) = \frac{1}{(1 - t)^2} \exp\left\{\int_0^t \frac{\beta(\tau)\, d\tau}{(1 - \tau)^2}\right\}, \quad G_1(t) = 1 + \int_0^t \frac{g(\tau)\, d\tau}{(1 - \tau)^4\, G(\tau)}$$

функции $\beta(\tau)$ и $g(\tau)$ — те же, что в теореме. Интеграл (2.7) существует в силу (1.6) и (1.8) и определяет положительную функцию при $\eta < 1$. Постоянную $K_1 \geqslant 1$ выберем из условия $Z(^2/_3) \geqslant 2M$, где M — постоянная из неравенства (2.5) Имеем

$$L(Z) = -K_1G_1(\eta)\left[(1-\eta)^4 G'(\eta) + b(x,\eta)\,G(\eta)\right] - K_1\, g(\eta) \tag{2.8}$$

Так как

$$(1-\eta)^4G'(\eta) + b(x,\eta)\,G(\eta) = \exp\left\{\int\limits_0^\eta \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^2}\right\}[\beta(\eta) - v(x,\eta)] \geqslant 0$$

по определению функции $\beta(\eta)$, то из (2.8) получим

$$L(Z) \leqslant -K_1\, g(\eta)$$

Легко видеть, что функция $Z(\eta) \pm F^\delta(x,\eta) \geqslant 0$ на границе D_δ'', лежащей на прямых $x=\delta$, $\eta = ^2/_3$, $\eta = 1-\delta$. Внутри D_δ'' имеем $L(Z \pm F^\delta) \leqslant -K_1\, g(\eta) \pm \pm f(x,\eta) \leqslant -K_1 g(\eta) + g(\eta) \leqslant 0$ в силу выбора $K_1 \geqslant 1$. Отсюда согласно принципу максимума имеем, что $Z \pm F^\delta \geqslant 0$ всюду в области D_δ'', или $|F^\delta(x,\eta)| \leqslant \leqslant Z(\eta)$ в этой области. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в последнем неравенстве получим, что $T(x,\eta) \to T_\infty$ при $\eta \to 1$ равномерно по x, что и требовалось доказать.

Очевидно, что если в уравнении (1.2) $f \equiv 0$ (что имеет место при пренебрежении теплом, возникающим вследствие трения), то условие (1.7) теоремы отпадает и за функцию $Z(\eta)$ можно взять

$$K_1 \int\limits_\eta^1 G(t)\,dt$$

Перейдем к доказательству единственности решения задачи (2.2), (2.3). Предполагая, что существует два решения этой задачи, рассмотрим их разность

$$T(x),\eta) = T_1(x,\eta) - T_2(x,\eta)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что при $\eta = 1-\delta(\varepsilon)$ будем иметь $|T(x,\eta)| \leqslant \varepsilon$. Функция $V = T(x,\eta) - \varepsilon$ удовлетворяет уравнению $L(V) = 0$, кроме того, $V \leqslant 0$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1-\delta(\varepsilon)$. Покажем, что $V \leqslant 0$ всюду в прямоугольнике $D_\varepsilon\{0 < x \leqslant X,\ 0 < \eta < 1-\delta(\varepsilon)\}$. В уравнении $L(V) = 0$ сделаем замену

$$V(x,\eta) = H(\eta)\,R(x,\eta),\quad H(\eta) > 0$$

Тогда для функции $R(x,\eta)$ в D_ε получим уравнение

$$L(R) \equiv (1-\eta)^4 R_{\eta\eta} - uR_x + BR_\eta + CR = 0 \tag{2.9}$$

$$B(x,\eta) = \frac{2(1-\eta)^4H' + bH}{H}, \qquad C(x,\eta) = \frac{(1-\eta)^4 H'' + bH'}{H}$$

Функцию $H(\eta) > 0$ выберем так, чтобы в уравнении (2.9) было $C(x,\eta) \leqslant c_0 = = \mathrm{const} < 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_x^X \frac{dt}{U(t)}$$

где $U(t)$ — та же функция, что и в (1.4). Имеем

$$L(\Phi) = C(x,\eta)\,\Phi(x) + \frac{u(x,\eta)}{U(x)} \leqslant c_0\,\Phi(x) + 1.$$

Так как $c_0 < 0$ и $\Phi(x) \to \infty$ при $x \to 0$, то найдется такое x_0, что при всех $x \leqslant x_0$ будем иметь $L(\Phi) \leqslant 0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ получим

$$L(\gamma\Phi(x) - R(x, \eta)) \leqslant 0, \quad \text{при} \quad x \leqslant x_0$$

Для фиксированного γ найдем такое $x_1(\gamma) > 0$, чтобы $\gamma\Phi(x_1) - R(x_1, \eta) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$. Кроме того, имеем также, что $\gamma\Phi(x) - R(x, \eta) \geqslant 0$ при $\eta = 0$ и при $\eta = 1 - \delta(\varepsilon)$, так как $R(x, 0) < 0$, $R(x, 1 - \delta(\varepsilon)) \leqslant 0$. Отсюда, согласно принципу максимума, получим $\gamma\Phi(x) - R(x, \eta) \geqslant 0$ всюду в прямоугольнике $\{x_1 \leqslant x \leqslant x_0, 0 \leqslant \eta \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)\}$. В силу произвольности γ из доказанного неравенства $R(x, \eta) \leqslant \gamma\Phi(x)$ следует, что $R \leqslant 0$ в прямоугольнике $\{0 \leqslant x \leqslant x_0, 0 \leqslant \eta \leqslant \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)\}$. Но тогда в силу принципа максимума также и в прямоугольнике $\{x_0 \leqslant x \leqslant X, \ 0 < \eta < 1 - \delta(\varepsilon)\}$, ибо и там $L(R) = 0$ и

$$R\mid_{x=x_0} \leqslant 0, \quad R\mid_{\eta=0} \leqslant 0, \quad R\mid_{\eta=1,\,\delta(\varepsilon)} \leqslant 0$$

Таким образом, доказано, что $R \leqslant 0$ всюду в D_ε. Отсюда следует, что $T(x, \eta) \leqslant \leqslant \varepsilon$ в D_ε. В силу симметрии T_1 и T_2 имеем $|T(x, \eta)| \leqslant \varepsilon$ в D_ε. Устремив ε к нулю, получаем $T_1 \equiv T_2$. Теорема доказана.

Замечание 2. Выше было указано, что решение задачи (1.1), (1.3), построенное в работах [3,4], удовлетворяет условиям A теоремы. Но в теореме, кроме условия A, требуется также выполнение условий (1.6), (1.7). Исходя из результатов работы [3], можно показать, что решение $u(x, y)$, $v(x, y)$ задачи (1.1), (1.3) удовлетворяет также условиям (1.6), (1.7).

Замечание 3. При постановке задачи (1.2), (1.9) предполагали, что $T_\infty = \text{const}$. Теперь покажем, что для ограниченного в полосе Q решения $T(x, y)$ уравнения (1.2) нельзя задавать на бесконечности значение, отличное от постоянного.

Предположим, что решение $T(x, y)$ задачи таково, что $\lim_{y\to\infty} T(x,y) = T_\infty(x)$. В силу (2.1) это равносильно условию $T(x, \eta)_{\eta=1} = T_\infty(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что $|T(x, 1 - \delta) - T_\infty(x)| < \varepsilon$. Положим $T^\delta(x, \eta) - T_\infty(\delta) = F^\delta(x, \eta)$. Уравнение (2.2), которому удовлетворяет функция $F^\delta(x, \eta)$, рассмотрим в области $D_\delta''\ \{\delta < x \leqslant X, \ ^2/_3 \leqslant \eta < 1 - \delta(\varepsilon)\}$. Далее, рассматривая функцию $Z(\eta) + \varepsilon \pm F^\delta(x, \eta)$, где $Z(\eta)$ определена равенством (2.7), и повторяя дословно весь ход рассуждений, проведенных при доказательстве выполнения второго условия из (1.9), получаем в области $\overline{D}_\delta''$ следующую оценку:

$$F^\delta(x, \eta) \mid \leqslant \varepsilon + Z(\eta)$$

равномерную относительно δ и x. Отсюда устремляя δ к нулю и замечая, что $Z(\eta) \to 0$ при $\eta \to 1$, имеем $|T(x, 1), - T_\infty(0)| \leqslant \varepsilon$. В силу произвольности ε получим $T(x, 1) \equiv T_\infty(0)$, т. е. $T_\infty(x) \equiv T_\infty(0) = \text{const}$, что и требовалось доказать.

3. При исследовании системы (1.1), (1.2) можно пользоваться преобразованием Крокко: $\xi = x$, $\eta = u(x, y)/U(x)$. При этом область Q переходит в область D, а вместо динамической системы уравнений (1.1) получим в D следующее уравнение для $W = = u_y / U(\xi)$:

$$\nu W^2 W_{\eta\eta} - \eta U(\xi) W_\xi + (\eta^2 - 1) U_\xi W_\eta - \eta U_\xi W = 0 \tag{3.1}$$

Условия (1.3) переходят в следующие условия для W:

$$W\mid_{\eta=1} = 0, \quad (\nu W W_\eta - v_0(\xi) W + U_\xi)\mid_{\eta=0} = 0 \tag{3.2}$$

При замене Крокко уравнение (1.2) для температуры имеет вид

$$\begin{aligned} &aW^2 T_{\eta\eta} - \eta U(\xi) T_\xi - [(\nu - a) W W_\eta + U_\xi (1 - \eta^2)] T_\eta = \\ &= -\nu C^{-1} U^2(\xi) W^2(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) в области D обладает теми же особенностями, что и уравнение (1.2) в Q; оно вырождается при $\eta = 1$, $\eta = 0$, $\xi = 0$, т. е. на всей основной границе области D.

Теоремы существования и единственности решения W задачи (3.1), (3.2) доказаны в работе [3]. Изучение уравнения (3.3) на основании свойств решения W задачи (3.1), (3.2) приводят к тем же результатам, что и выше, в силу обратимости (доказанной [3]) замены Крокко.

В заключение заметим, что если интеграл (1.6), в котором

$$\beta(y) = \min_{0 \leqslant x \leqslant X} v(x, y)$$

расходится, а коэффициенты и правая часть уравнения (1.2) по-прежнему удовлетворяют условиям A, то уравнение (1.2) имеет в Q единственное ограниченное решение, удовлетворяющее лишь условию (1.5).

Автор благодарит О. А. Олейник за обсуждение результатов.

Поступила 15 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. *Олейник О. А.* Математические задачи теории пограничного слоя. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 3.
3. *Олейник О. А.* Асимптотическое разложение решения системы уравнений пограничного слоя для стационарного плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости в окрестности точки остановки. Тр. ин-та прикл. матем. Тбилисск. ун-та, 1969, № 2.
4. *Введенская Н. Д.* О решении уравнений пограничного слоя в окрестности критической точки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 4.
5. *Джураев Т. Д.* О системе уравнений теории пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 11.
6. *Джураев Т. Д.* О системе уравнений температурного пограничного слоя для несжимаемой жидкости. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук, 1971, № 3.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
8. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В кн.: Итоги науки, вып. «Математический анализ», 1969. М., ВИНИТИ, 1971.
9. *Смирнова Г. Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ПОЛУПЛОСКОСТЬ С КРУГОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ю. А. Амензаде (Баку)

Решается задача о вдавливании штампа в полуплоскость с круговыми отверстиями, в которые с заданными натягами вставлены круговые включения из другого материала.

1. В работе [1] дан метод решения задачи о вдавливании штампа с плоским основанием в полуплоскость с включениями. С целью реализации метода [1] приведем решение задачи о вдавливании штампа в полуплоскость с круговыми отверстиями (область S_0), в которые с заданными натягами δr_k вставлены круговые включения радиусов r_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) из другого материала (области S_k) (фиг. 1).

В работе [1] контактная задача, не учитывающая сил трения под штампом, когда прямая вне штампа свободна от сил и имеет место полный контакт штампа с границей полуплоскости, сведена к задаче Римана с индексом —1, общее решение которой представляет собою регулярную на разрезанной вдоль линии L ((0, ∞), ($-\infty$, 0)) плоскости z и принимающую на бесконечности нулевое значение функцию

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{iP}{2\pi} X_0(z) \tag{1.1}$$