Сходимость разложения (3.3) можно было бы установить и непосредственной проверкой тождества

$$v_k(r) = \frac{1}{k!} \frac{d^k v(r, \alpha)}{d\alpha^k}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$v(r, \alpha) = \frac{\alpha}{\exp \alpha - (\alpha + 1)} \{\exp [\alpha (1 - r^2)] - 1\}$$

Здесь $v(r, \alpha)$ — точное решение уравнения (3.2).

Поступила 13 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА


1. *Джакупов К. Б.* К расчету двумерных течений гидродинамики и теплообмена вязкой жидкости. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1972, вып. 1, № 3.
2. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
4. *Гребер Г., Эрк С., Григулль У.* Основы учения о теплообмене. М., Иад-во иностр. лит., 1958.


---

УДК 532.526

# ОБ ОТРЫВЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВДУВЕ

А. И. Суслов

(Москва)

Получено интегральное неравенство для скорости вдува жидкости с обтекаемой поверхности в пограничный слой; при выполнении этого неравенства происходит отрыв, если градиент давления неотрицателен. В частности, отрыв имеет место, когда положительная скорость вдува постоянна, независимо от величины этой постоянной. Тем самым уточняется один результат работы [1], где было показано, что отрыв происходит при достаточно большой скорости вдува.

1. Рассматривается система

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

в области $D_a\ \{0 < x < a,\ 0 < y < \infty\}$ с условиями

$$u|_{y=0} = 0, \qquad v|_{y=0} = v_0(x), \qquad u|_{x=0} = u_0(y) \tag{1.2}$$

$u(x, y) \to U(x)$ при $y \to \infty$ равномерно по $x$

$$U^2(x) + 2p(x) = \text{const}.$$

Будем предполагать, что $u_0(y) > 0$ при $y > 0$, $u_0(0) = 0$, $u_0'(0) > 0$, $u_0(y) \to U(0)$ при $y \to \infty$; $dp / dx$ и $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, a]$; $u_0(y)$, $u_0'(y)$, $u_0''(y)$ ограничены при $0 \leqslant y < \infty$ и удовлетворяют условию Гельдера. Предполагаем также, что при малых $y$ выполнено условие согласования в точке $(0, 0)$

$$\nu\frac{d^2u_0(y)}{dy^2} - \frac{dp(0)}{dx} - v_0(0)\frac{du_0(y)}{dy} = O(y^2)$$

В [1] было доказано, что при некоторых $a > 0$ в $D_a$ существует решение $(u, v)$ задачи (1.1), (1.2) такое, что $\partial u / \partial y|_{y=0} > 0$. Пусть $A$ — верхняя грань таких $a$.

Если $A < \infty$, то будем говорить, что происходит отрыв пограничного слоя, а точку $x_s = A$ будем называть точкой отрыва. Если же $A = \infty$, то имеет место безотрывное течение.

Замена независимых переменных в системе (1.1)

$$x = x, \qquad \psi = \psi(x, y) \tag{1.3}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \psi(x, 0) = -\int\limits_0^x v_0(t)\,dt$$

приводит систему (1.1) к форме Мизеса

$$u\left(\nu \frac{\partial^2 u^2}{\partial \psi^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{dp}{dx} \tag{1.4}$$

В случае $dp\,/\,dx \equiv 0$ получаем известное уравнение фильтрации

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial \psi^2} \tag{1.5}$$

Введем следующее обозначение:

$$V(0, x) = \int\limits_0^x v_0(t)\,dt$$

Область $D_a$ при замене (1.3) переходит в $G_a\{0 < x < a, - V(0\ x) < \psi < \infty\}$ а граничные условия (1.2) — в условия

$$u\,|_{\psi = -V(0,\,x)} = 0, \qquad u\,|_{x=0} = u_*(\psi), \qquad u(x, \psi) \to U(x) \quad \text{при} \quad \psi \to \infty \tag{1.6}$$

где

$$u_*\left(\int\limits_0^y u_0(\tau)\,d\tau\right) \equiv u_0(y)$$

*Определение.* Обобщенным решением задачи (1.5), (1.6) называется непрерывная, неотрицательная, ограниченная в $G_a$ функция $u(x, \psi)$, удовлетворяющая условиям (1.6), и такая, что

1) существует обобщенная производная $\partial u^2\,/\,\partial \psi$, интегрируемая с квадратом в любой конечной области и ограниченная в любой полуполосе вида $\{0 < x < a,\ \delta - V(0, x) < \psi < \infty\}$ для каждого $\delta$;

2) для каждой функции $f$ из $C^1(G_a)$ такой, что $f = 0$ при $\psi = -V(0, x)$, при $x = a$ и вне некоторой конечной области, выполняется равенство

$$\iint\limits_{G_a}\left[\frac{\partial f}{\partial x}u - \frac{\nu}{2}\frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial u^2}{\partial \psi}\right]dx\,d\psi + \int\limits_0^\infty f(0, \psi)\,u_*(\psi)\,d\psi = 0$$

В работе [2] доказано существование обобщенного решения первой краевой задачи для уравнения (1.5) в $\{0 < x < a,\ 0 < \psi < \infty\}$. В случае области $G_a$ доказательство проводится аналогично. Как и в [2], доказывается также, что там, где обобщенное решение $u(x, \psi)$ задачи (1.5), (1.6) положительно, $u(x, \psi)$ удовлетворяет (1.5) в обычном смысле.

Если обобщенное решение $u(x, \psi)$ задачи (1.5), (1.6) обращается в нуль внутри $G_a$, то в точке $x_s < a$ происходит отрыв пограничного слоя. Действительно, если в $D_a$ существует решение задачи (1.1), (1.2) такое, что $u > 0$ в $D_a$ и $\partial u\,/\,\partial y|_{y=0} > 0$, то в $G_a$ существует положительное решение $u(x, \psi)$ задачи (1.5), (1.6), удовлетворяющее уравнению (1.5) в обычном смысле.

2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения фильтрации (1.5) с начальным условием

$$u\,|_{x=0} = u_1(\psi) \tag{2.1}$$

*Определение.* Обобщенным решением задачи (1.5), (2.1) в полосе $H_a\,\{0 < x < a, -\infty < \psi < \infty\}$ называется непрерывная неотрицательная, ограниченная в $H_a$ функция $u\,(x, \psi)$, удовлетворяющая условию (2.1), и такая, что

1) существует обобщенная производная $\partial u^2 / \partial\psi$, интегрируемая с квадратом в любой конечной области и ограниченная в полосе $H_a$;

2) для каждой функции $f$ из $C^1\,(H_a)$, $f = 0$ при $x = a$ и вне некоторой конечной области выполняется равенство

$$\iint\limits_{H_a} \left[\frac{\partial f}{\partial x} u - \frac{\nu}{2}\frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial u^2}{\partial \psi}\right] dx d\psi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(0, \psi)\, u_1(\psi)\, d\psi = 0$$

Существование обобщенного решения $u\,(x, \psi)$ задачи (1.5), (2.1) доказано в [2] в предположении, что $u_1\,(\psi)$ непрерывна, $0 \leqslant u_1\,(\psi) \leqslant M_0$, функция $u_1^2\,(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица. Некоторые свойства функции $u\,(x, \psi)$ установлены в [3]. В частности, в лемме 1 из [3] показано, что если $u_1\,(\psi) = 0$ при $\psi_0 - l \leqslant \psi \leqslant \psi_0 + l$, $l > 0$, то $u\,(x, \psi_0) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, где $x_0 > 0$ определяется из соотношения

$$\frac{l^2}{6\nu x_0} = M_0 = \sup u_1(\psi) \tag{2.2}$$

В дальнейшем $u_1\,(\psi)$ имеет специальный вид

$$u_1(\psi) = \begin{cases} u_*(\psi), & \psi \geqslant 0, \\ 0, & \psi < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Определенная таким образом функция $u_1\,(\psi)$ непрерывна, ограничена, а $u_1^2\,(\psi)$ удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $u\,(x, \psi)$ — обобщенное решение задачи Коши (1.5), (2.3). По теореме 21 из [2] для каждого $x_0 > 0$ существует $\psi_*\,(x_0) \leqslant 0$ такое, что $u\,(x_0, \psi) = 0$ при $\psi \leqslant \psi_*\,(x_0)$. Как доказано в [2,3], кривая $\psi_*(x)$ делит полуплоскость $\{x \geqslant 0\}$ на две части: слева от кривой $u\,(x, \psi) = 0$, справа $u\,(x, \psi) > 0$. В [3] доказано также, что $\psi_*\,(x)$ — непрерывная, невозрастающая функция.

Установим еще одно свойство кривой $\psi_*\,(x)$.

*Лемма.* Пусть $M_0 = \sup\, u_1\,(\psi)$. Тогда $\psi_*\,(x) \geqslant -\sqrt{6\nu M_0 x}$.

*Доказательство.* Для каждого $l > 0$ $u_1\,(\psi) = 0$ при $-2l \leqslant \psi \leqslant 0$. Поэтому, согласно лемме 1 из [3], $u\,(x, -l) = 0$ при $x \leqslant x_0$, где $x_0$ определяем из (2.2). Значит, $u\,(x, \psi) = 0$ при $\psi \leqslant -\sqrt{6\nu M_0 x}$ и, следовательно

$$\psi_*\,(x) \geqslant -\sqrt{6\nu M_0 x} \tag{2.4}$$

3. Пусть $u\,(x, \psi)$ — обобщенное решение задачи Коши (1.5), (2.3), а $u_b$ — обобщенное решение первой краевой задачи (1.5), (1.6). Так как $u\,(0, \psi) = u_b\,(0, \psi)$ при $\psi \geqslant 0$, $u\,(x, \psi) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, а $u_b|_{\psi=-V(0,x)} = 0$, то из принципа максимума следует, что $u\,(x, \psi) \geqslant u_b\,(x, \psi)$ в $G_a\,\{0 < x < a, -V\,(0, x) < \psi < \infty\}$ при всех $a > 0$. Следовательно, если $u\,(x_0, \psi_0) = 0$, где $(x_0, \psi_0)$ из $G_a$, то $u_b\,(x_0, \psi_0) = 0$ и, как указано выше, имеет место отрыв пограничного слоя.

*Теорема.* Пусть $dp / dx \geqslant 0$. Если существуют $x_1$ и $x_2$ такие, что $x_1 < x_2$ и

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} v_0\,(t)\, dt > \sqrt{6\nu M_0\,(x_2 - x_1)} \tag{3.1}$$

то в точке $x_s < x_2$ происходит отрыв пограничного слоя.

*Доказательство.* Сначала проведем доказательство для случая $dp / dx \equiv 0$. Предположим, что при всех $a > 0$ в $D_a$ существует решение задачи (1.1), (1.2) такое, что $u\,(x, y) > 0$ при $y > 0$ и $\partial u / \partial y|_{y=0} > 0$. Тогда в $G_a$ при $a = x_2$ существует положительное решение $u_b\,(x, \psi)$ задачи (1.5), (1.6). Очевидно, что $u_b\,(x, \psi)$ — решение уравнения (1.5) в области $H_1\,\{x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = a, -V\,(0, x) < \psi < \infty\}$ с граничными условиями

$$u\,|_{x=x_1} = u_b\,(x_1, \psi), \qquad u\,|_{\psi=-V\,(0,\,x)} = 0$$

Заметим, что по принципу максимума $\sup_\psi u_b(x, \psi) \leqslant M_0$.

Обозначим через $u^1(x, \psi)$ решение задачи Коши для уравнения (1.5) в полуплоскости $x \geqslant x_1$ с условием

$$u^1(x, \psi)|_{x=x_1} = \begin{cases} u_b(x_1, \psi), & \psi \geqslant -V(0, x_1) \\ 0, & \psi \leqslant -V(0, x_1) \end{cases} \tag{3.2}$$

Решению $u^1(x, \psi)$, задачи (1.5), (3.2) соответствует кривая $\psi_*^1(x)$, выходящая из точки $(x_1, -V(0, x))$. Согласно определению кривой $\psi_*^1(x)$, имеем $u^1(x, \psi) = 0$ при $\psi \leqslant \psi_*^1(x)$. Как и в лемме, можно показать, что

$$\psi_*^1(x) + \int_0^{x_1} v_0(t)\,dt \geqslant -\sqrt{6\nu M_0(x - x_1)}$$

Отсюда, используя (3.1), получаем

$$\psi_*^1(x_2) \geqslant -\int_0^{x_1} v_0(t)\,dt - \sqrt{6\nu M_0(x_2 - x_1)} > -\int_0^{x_1} v_0(t)\,dt - \int_{x_1}^{x_2} v_0(t)\,dt = -\int_0^{x_2} v_0(t)\,dt$$

Это неравенство означает, что пересечение области $H_1$ с множеством точек $(x, \psi)$, в которых $u^1(x, \psi) = 0$, непусто. Так как $u^1(x, \psi) \geqslant u_b(x, \psi)$ в $H_1$, то $u_b(x, \psi) = 0$ в некоторой подобласти области $H_1$ и, следовательно, имеет место отрыв пограничного слоя.

Пусть теперь $dp / dx \geqslant 0$. Рассмотрим задачу (1.4), (1.6). Как показано в [1], положительное решение $u_p(x, \psi)$ задачи (1.4), (1.6) в области $G_a$ при некотором $a$ получается как предел решений $u_p^\varepsilon(x, \psi)$ первой краевой задачи для уравнения (1.4) с граничными условиями

$$u|_{\psi=-V(0,x)} = f_\varepsilon(x, \psi), \quad u|_{x=0} = g_\varepsilon(\psi), \quad u(x, \psi) \underset{\psi\to\infty}{\longrightarrow} U(x) \tag{3.3}$$

Здесь $f_\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon > 0$; $f_\varepsilon(x, \psi) \to 0$, $g_\varepsilon(\psi) \to u_*(\psi)$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, $f_\varepsilon$, $g_\varepsilon$ — гладкие функции и в точке $(0, 0)$ выполнено условие согласования.

Аналогично, положительное решение $u_b(x, \psi)$ задачи (1.5) (1.6) в $G_a$ при некотором $a$ получается как предел решений $u_b^\varepsilon(x, \psi)$ задачи (1.5), (3.3) при $\varepsilon \to 0$.

Функция $s = u_b^\varepsilon - u_p^\varepsilon$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial x} - 2\left(\frac{\partial u_b^\varepsilon}{\partial\psi} + \frac{\partial u_p^\varepsilon}{\partial\psi}\right)\frac{\partial s}{\partial\psi} = (u_b^\varepsilon + u_p^\varepsilon)\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2} - \left(\frac{\partial^2 u_b^\varepsilon}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 u_p^\varepsilon}{\partial\psi^2}\right)s + \frac{1}{u_p^\varepsilon}\frac{dp}{dx}$$

Так как $s = 0$ на границе области $G_a$, $dp / dx \geqslant 0$, $u_b^\varepsilon > 0$, $u_p^\varepsilon > 0$, вторые производные функций $u_b^\varepsilon$ и $u_p^\varepsilon$ по $\psi$ ограничены, то из принципа максимума следует, что $u_p^\varepsilon \leqslant u_b^\varepsilon$ в $G_a$. Предельным переходом получаем неравенство $u_p(x, \psi) \leqslant u_b(x, \psi)$ в $G_a$. Отсюда следует, что в случае $dp / dx \geqslant 0$ отрыв пограничного слоя произойдет в $D_a$ при $a = x_2$, если отрыв происходит в $D_a$ при $a = x_2$, когда $dp / dx \equiv 0$. Теорема доказана.

*Следствие.* Если $dp / dx \geqslant 0$ и $v_0(x) = m = \text{const} > 0$, то в $D_a$ при некотором $a$ происходит отрыв пограничного слоя.

В заключение автор благодарит О. А. Олейник за внимание к работе.

Поступила 15 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А.* О системе уравнений пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
3. *Калашников А. С.* О возникновении особенностей у решений уравнений нестационарной фильтрации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 2.