Если $a_{33} + a_2 a_3 = 0$, то поток стационарный. Обратно, если поток стационарный, то $a_1 - c_3 = 0$, $a_{33} + a_2 a_3 = 0$ (см. [1]). При $a_{33} + a_2 a_3 \neq 0$ условия (2.10) можно представить в виде равенства (1.1) и $\mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{k} = 0$. В этом случае

$$V = -2a_3 (a_{33} + a_2 a_3)^{-1} (t + N)^{-1}$$

где N — любая функция, удовлетворяющая условию $dN = N_2 \omega^2$. Широта класса полей, удовлетворяющих условиям (2.10),— четыре функции двух аргументов, в чем можно убедиться построением регулярной цепи решений системы, определяющей этот класс полей. Теорема 4 доказана.

Поступила 2 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слухаев В. В.* К геометрической теории стационарного движения жидкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 3.
2. *Горбанёв Н. Н.* О некоторых классах квазистационарных потоков идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Бюшгенс С. С.* Геометрия векторного поля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10, № 1.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М., Гостехиздат, 1948.

УДК 532.516

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. И. Найденов

(Москва)

Рассматриваются двумерные установившиеся течения вязкой несжимаемой жидкости с учетом экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. В отличие от численных методов решения этой задачи [1] нелинейная система уравнений, описывающая течение, путем разложения по малому параметру, входящему в показатель экспоненты, сводится к бесконечной последовательности линейных уравнений эллиптического типа. Строится некоторое мажорирующее уравнение, существование положительных решений которого обеспечивает равномерную сходимость итераций в окрестности нулевого значения параметра. В качестве иллюстрации рассматривается течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе при наличии теплового источника.

1. Рассмотрим установившееся плоское течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса

$$\mu/\mu_0 = e^{-\alpha T}$$

Система дифференциальных уравнений движения, неразрывности и энергии без учета инерционных и диссипативных членов после введения функции тока имеет вид [2]

$$\Delta\Delta\psi = 2\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi\right) - \left[\alpha^2\left(\frac{\partial T^2}{\partial y} - \frac{\partial T^2}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\right]\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - 4\left(\alpha^2\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \tag{1.1}$$
$$\Delta T = P\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad \alpha = \beta\delta T, \quad P = \frac{VL}{a}$$

Геометрические и физические параметры течения предполагаются безразмерными, отнесенными к некоторым характерным масштабам: длине L, разности температур δT и скорости течения V, β — параметр, зависящий от рода жидкости и интервала температур, a — постоянный коэффициент температуропроводности. Пусть область протекания процесса — связное открытое множество Ω евклидова пространства с кусочно-гладкой границей Γ. Тогда краевые условия можно задать в следующем виде:

$$\psi|_\Gamma = c, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \qquad T|_\Gamma = T(\Gamma) \tag{1.2}$$

Здесь $\partial\psi / \partial n$ — нормальная производная функция тока, c — произвольная постоянная, $T(\Gamma)$ — функция точки на границе области. Для неограниченных областей необходимо подчинить функцию тока и температуру определенным условиям [3].

Предположим, что функции $\psi(x, y, \alpha)$, $T(x, y, \alpha)$ представимы формальными выражениями

$$\psi(x, y, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, y)\,\alpha^k, \qquad T(x, y, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x, y)\,\alpha^k \tag{1.3}$$

Подставляя соотношения (1.3) в систему уравнений (1.1), придем к бесконечной системе уравнений эллиптического типа

$$\begin{gathered}\Delta\Delta\,\psi_k = F_k(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, T_0, T_1 \ldots T_{k-1}) \\ \Delta T_k = P\left\{\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial T_k}{\partial x} - \frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial T_k}{\partial y}\right) + V_k(\psi_1, \ldots \psi_k, T_0, \ldots, T_{k-1})\right\}\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} F_k = &-\sum_{m=0}^{k-2}\ \sum_{n=0,\ m+n+l=k-2}^{k-2} 4\frac{\partial T_m}{\partial x}\frac{\partial T_n}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_l}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial T_m}{\partial y}\frac{\partial T_n}{\partial y} - \frac{\partial T_m}{\partial x}\frac{\partial T_n}{\partial x}\right)\times \\ &\times\left(\frac{\partial^2\psi_l}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_l}{\partial x^2}\right) + \sum_{m=0,\ m+l=k-1}^{k-1} 2\left(\frac{\partial T_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi_l + \frac{\partial T_m}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi_l\right) + \\ &+\left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_l}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_l}{\partial x^2}\right) + 4\frac{\partial^2 T_m}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\psi_l}{\partial x\partial y} \\ V_k = &\sum_{m=0,\ l\geqslant 1,\ m+l=k}^{k-1}\left(\frac{\partial T_m}{\partial x}\frac{\partial\psi_l}{\partial y} - \frac{\partial T_m}{\partial y}\frac{\partial\psi_l}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь F_k, V_k — известные функции при отыскании k-приближения.

Краевые условия (1.2) с учетом разложений (1.3) выглядят так:

$$\begin{gathered}\psi_0|_\Gamma = c, \qquad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \qquad T_0|_\Gamma = T(\Gamma) \\ \psi_k|_\Gamma = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi_k}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \qquad T_k|_\Gamma = 0, \qquad k\geqslant 1\end{gathered} \tag{1.6}$$

Таким образом, для решения задачи необходимо интегрировать неоднородные дифференциальные уравнения эллиптического типа с известными краевыми условиями (1.6).

2. Обратимся к выяснению вопроса о равномерной сходимости разложений (1.3) в некотором промежутке изменения параметра α. Если предположить ограниченность области течения и надлежащей гладкости функции $T(\Gamma)$, то функция тока и температура и их производные до третьего и второго порядка включительно при $\alpha = 0$ будут ограничены и непрерывны. Тогда в области $\Omega + \Gamma$ этим свойством будут обладать и все последующие k-приближения.

Пусть

$$\max|F_k(x, y)| \leqslant R_k, \quad \max|V_k(x, y)| \leqslant H_k \quad x, y \in \Omega + \Gamma \tag{2.1}$$

Очевидно, что можно построить последовательности положительных чисел h_k и d_k таких, что

$$\left|\frac{\partial^i \psi_k}{\partial x^m \partial y^{i-m}}\right| \leqslant R_k h_k, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{\partial^i T_k}{\partial x^m \partial y^{i-m}}\right| \leqslant H_k d_k, \quad i = 0, 1, 2, \quad m = 1, 2$$

Из теории эллиптических уравнений известно [3], что построенная последовательность положительных чисел h_k ограничена сверху. Будем также предполагать, что аналогичным свойством обладает и вторая введенная последовательность d_k. Отметим, что сделанное допущение не верно в общем случае (для вторых производных функций $T_k(x, y)$), однако существует ряд практически важных задач (течение в трубах, диффузорах), для которых ограниченность последовательности d_k удается доказать на основании анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Итак

$$h_k \leqslant h, \quad d_k \leqslant d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Неравенства (2.2) с учетом соотношений (2.3) можно усилить

$$\left|\frac{\partial^i \psi_k}{\partial x^m \partial y^{i-m}}\right| \leqslant R_k h = U_k, \quad \left|\frac{\partial^i T_k}{\partial x^m \partial y^{i-m}}\right| \leqslant H_k d = \theta_k \tag{2.4}$$

В качестве R_k и H_k в неравенствах (2.1) можно выбрать числа

$$R_k = 8S_1 + 16S_2, \quad H_k = 2PS_3 \tag{2.5}$$

$$S_1 = \sum_{m=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-2} \theta_m \theta_n U_l \quad (m + n + l = k - 2)$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{k-1} \theta_m U_l \quad (m + l = k - 1), \quad S_3 = \sum_{m=0}^{k-1} \theta_m U_l \quad (m + l = k, \ l \geqslant 1)$$

Образуем следующие ряды:

$$U(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k U_k, \quad \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \theta_k \tag{2.6}$$

Для общих членов этих рядов с учетом соотношений (2.4), (2.5) верны формулы

$$U_k = h(8S_1 + 16S_2), \quad \theta_k = 2dPS_3 \tag{2.7}$$

Заменяя в рядах (2.6) все члены, кроме нулевых, их выражением из (2.7), придем к соотношениям

$$U = U_0 + 16h\alpha U\theta + 8h\alpha^2 U\theta^2 \tag{2.8}$$

$$\theta = \theta_0 + 2dP\,(U - U_0)\,\theta$$

Выполнив несложные преобразования, получим уравнение

$$\Phi(\alpha, W) = \sum_{i=1}^{4} p_i(\alpha) W^{4-i}(\alpha) = 0 \quad (W = U\theta) \tag{2.9}$$

$$p_1(\alpha) = 32hd^2l^2P^2\alpha^2, \quad p_2(\alpha) = 32hdl^2\theta_0 P\alpha^2 + 32hdlP\alpha$$

$$p_3(\alpha) = 8hl^2\theta_0{}^2\alpha^2 + 16hl\theta_0\alpha + 2dlU_0P - 1$$

$$p_4(\alpha) = U_0\theta_0 l, \quad l = (1 + 2dU_0P)^{-1}$$

Уравнение 2.9) является мажорирующим для функций (1.3) и из существования положительных решений этого уравнения при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*$ вытекает равномерная сходимость функций $\psi(x, y, \alpha)$, $T(x, y, \alpha)$ и их производных в рассматриваемой области $\Omega + \Gamma$. В данном случае уравнение (2.9) будет алгебраическим относительно функции $W(\alpha)$ и, следовательно, радиус сходимости определяется после исключения W из системы уравнений

$$\Phi(\alpha^*, W) = 0, \quad \partial\Phi(\alpha^*, W) / \partial W = 0$$

При $\alpha \leqslant 1$, пренебрегая в уравнении (2.9) членами α^2 по сравнению с α, для радиуса сходимости рядов (2.6) имеем

$$\alpha^* = \frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{16h\theta_0}, \qquad m = 1 + 4dU_0P$$

3. В качестве примера рассмотрим течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе диаметром $2R$. Предположим, что в каждой точке области течения имеется постоянный тепловой источник мощностью Q; при этом стенки трубы поддерживаются при нулевой температуре. В этом случае течение жидкости параллельными струями не оказывает влияния на распределение температур, которое выражается формулой [4] (r — безразмерный радиус трубы, λ — коэффициент теплопроводности)

$$T = \frac{\alpha}{\beta}(1 - r^2), \qquad \alpha = \frac{\beta Q R^2}{4\lambda} \tag{3.1}$$

Уравнение движения в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d}{dr}\Delta v + 4\alpha^2 r^2 \frac{dv}{dr} + 4\alpha r \frac{d^2 v}{dr^2} + 4\alpha \frac{dv}{dr} = 0 \tag{3.2}$$

Предположим, что скорость жидкости представима в виде ряда по возрастающим степеням α

$$v(r, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r)\alpha^k \tag{3.3}$$

Подставляя соотношение (3.3) в (3.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях α, для определения k-го приближения получим уравнение с известной правой частью

$$\frac{d}{dr}\Delta v_k = F_k(v_1, v_2, \ldots v_{k-1}) \tag{3.4}$$

$$F_k(v_1, v_2, \ldots v_{k-1}) = -4r^2 \frac{dv_{k-2}}{dr} - 4r\frac{d^2 v_{k-1}}{dr^2} - 4\frac{dv_{k-1}}{dr}$$

Краевые условия зададим в обычном виде

$$v_k(1) = 0 \quad (k = 0, 1, 2\ldots), \qquad \int_0^1 r v_0(r)\, dr = \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 r v_k(r)\, dr = 0 \qquad (k \geqslant 1)$$

Для скорости течения на основании двух приближений имеем

$$v(r) = 2(1 - r^2) - \alpha/3\,(1 - r^2)(3r^2 - 1)$$

Конвективные члены в уравнении энергии тождественно равны нулю, поэтому мажорирующее уравнение принимает особенно простой вид

$$(\alpha^2 + 2\alpha - {}^9/_{80})W + {}^9/_{20} = 0 \tag{3.6}$$

Для существования положительных решений уравнения (3.6) необходимо считать $\alpha < \alpha^* = 0.055$. Значение $\alpha^* = 0.055$ определяет радиус сходимости построенных рядов для скорости и ее первых двух производных; очевидно, что за счет уточнения вводимых оценок α^* можно увеличить.

Сходимость разложения (3.3) можно было бы установить и непосредственной проверкой тождества

$$v_k(r) = \frac{1}{k!} \frac{d^k v(r, \alpha)}{d\alpha^k}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$v(r, \alpha) = \frac{\alpha}{\exp \alpha - (\alpha + 1)} \{\exp [\alpha (1 - r^2)] - 1\}$$

Здесь $v(r, \alpha)$ — точное решение уравнения (3.2).

Поступила 13 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джакупов К. Б.* К расчету двумерных течений гидродинамики и теплообмена вязкой жидкости. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1972, вып. 1, № 3.
2. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
4. *Гребер Г., Эрк С., Григулль У.* Основы учения о теплообмене. М., Иад-во иностр. лит., 1958.

УДК 532.526

ОБ ОТРЫВЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ВДУВЕ

А. И. Суслов

(Москва)

Получено интегральное неравенство для скорости вдува жидкости с обтекаемой поверхности в пограничный слой; при выполнении этого неравенства происходит отрыв, если градиент давления неотрицателен. В частности, отрыв имеет место, когда положительная скорость вдува постоянна, независимо от величины этой постоянной. Тем самым уточняется один результат работы [1], где было показано, что отрыв происходит при достаточно большой скорости вдува.

1. Рассматривается система

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

в области $D_a \{0 < x < a,\ 0 < y < \infty\}$ с условиями

$$u\,|_{y=0} = 0, \qquad v\,|_{y=0} = v_0(x), \qquad u\,|_{x=0} = u_0(y) \tag{1.2}$$

$u(x, y) \to U(x)$ при $y \to \infty$ равномерно по x

$$U^2(x) + 2p(x) = \text{const.}$$

Будем предполагать, что $u_0(y) > 0$ при $y > 0$, $u_0(0) = 0$, $u_0'(0) > 0$, $u_0(y) \to U(0)$ при $y \to \infty$; dp / dx и $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, a]$; $u_0(y)$, $u_0'(y)$, $u_0''(y)$ ограничены при $0 \leqslant y < \infty$ и удовлетворяют условию Гельдера. Предполагаем также, что при малых y выполнено условие согласования в точке $(0, 0)$

$$\nu\frac{d^2u_0(y)}{dy^2} - \frac{dp(0)}{dx} - v_0(0)\frac{du_0(y)}{dy} = O(y^2)$$

В [1] было доказано, что при некоторых $a > 0$ в D_a существует решение (u, v) задачи (1.1), (1.2) такое, что $\partial u / \partial y\,|_{y=0} > 0$. Пусть A — верхняя грань таких a.