УДК 532.5

О СРАВНЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО И КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Горбанёв

(Томск)

Рассматривается в консервативном поле внешних сил нестационарный поток идеальной жидкости, линии тока которого стационарны (квазистационарный поток). Движение жидкости предполагается баротропным. Находятся условия, при которых поле единичных векторов может служить одновременно полем направлений скорости баротропного квазистационарного потенциального и вихревого движения идеальной жидкости. Проводится сравнение с соответствующими результатами для стационарного движения [1], дается сравнение модулей скоростей стационарного и квазистационарного потоков с общими линиями тока для некоторых классов движений. Проводится сравнение с соответствующими результатами для квазистационарного потока идеальной несжимаемой жидкости в [2]. Найдена широта рассматриваемых классов единичных векторных полей, а также произвол, с которым определяются модуль скорости, потенциал ускорения и плотность при заданном поле направлений скорости. При этом предполагается, что произвол решений определяется в классе аналитических функций, а векторные поля являются аналитическими.

1. Обозначим единичный вектор направления скорости через **e**, а вектор кривизны линий тока через **k**. Векторное поле называется голономным [1], если существует семейство поверхностей, ортогональных полю. Величина $H = \operatorname{div} \mathbf{e}$ называется средней кривизной поля **e** [3]. Предполагается, что векторные линии поля не являются прямыми.

Известно, что любое голономное поле **e** может служить полем направлений скорости потенциального стационарного потока идеальной жидкости [4]. Для потенциального квазистационарного потока идеальной жидкости имеет место утверждение, сформулированное для идеальной несжимаемой жидкости в теореме 2 из [2]. Геометрия полей направлений скорости этих потоков для идеальной несжимаемой жидкости при этом будет различной, так как условие несжимаемости жидкости приводит к дополнительному условию на поле направлений скорости (условие 2 в теореме 1 из [2]). Для квази стационарного потока идеальной жидкости имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Модули скоростей W и V стационарного и квазистационарного потенциальных потоков с общими линиями тока связаны соотношением $V = \psi W$, где ψ — функция, удовлетворяющая условию $\mathbf{e} \times \operatorname{grad} \psi = 0$ в каждый момент времени.

Для идеальной несжимаемой жидкости ψ зависит лишь от времени (замечание к теореме 2 из [2]), а потому будет иным и произвол, с которым определяется модуль скорости при заданном поле направлений скорости.▌

Теорема 2. Голономное поле, поле векторов кривизны которого неголономно, может служить полем направлений скорости лишь потенциального квазистационарного потока. Если же поля **e** и **k** голономны, то существует и вихревой квазистационарный поток с полем направлений скорости **e**, причем $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ параллелен $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$. Широта класса голономных единичных векторных полей, поле векторов кривизны которых голономно,— три функции двух аргументов. Модуль скорости при заданном поле **e** определяется с произволом в две функции двух аргументов.

Из этих теорем и [1] вытекает, что условия, которым удовлетворяют поля направлений скоростей потенциального и вихревого квазистационарных потоков с общими линиями тока, совпадают с аналогичными условиями для стационарного потока. Класс полей направлений скорости, общих для потенциального и вихревого квазистационарных потоков, для несжимаемой жидкости будет более узким (добавляются второе и четвертое условия теоремы 3 из [2]).

Рассмотрим класс движений идеальной жидкости, у которых производная модуля скорости по направлению скорости равна нулю. Такие движения характеризуются тем, что в любой момент времени модуль скорости всех частиц жидкости на одной и той же произвольной линии тока одинаков, а для стационарного движения — постоянный. Для краткости назовем такие движения движениями класса I.

Теорема 3. Поле единичных векторов $\mathbf{e}$ может служить общим полем направлений скорости стационарного и квазистационарного потоков класса I тогда и только тогда, когда оно голономно, а поле его векторов кривизны потенциально. Если U и W — модули скоростей стационарного и потенциального стационарного потоков класса I с общими линиями тока, то функция $V = \psi(t)\, W + U$, где $\psi(t)$ — произвольная функция времени, может служить модулем скорости квазистационарного потока класса I с теми же линиями тока; обратно, модуль скорости V любого квазистационарного потока класса I можно представить в виде $V = \psi(t)\, W + U$, где $\psi(t)$ — некоторая функция времени, а U и W — модули скоростей некоторых стационарного и потенциального стационарного потоков класса I с теми же линиями тока. Широта класса голономных единичных векторных полей, поле векторов кривизны которых потенциально,— две функции двух аргументов.

При рассмотрении движений класса I для несжимаемой жидкости связь модулей скоростей будет такой же (теорема 4 из [2]), однако класс полей направлений сужается, так как условие несжимаемости приводит к дополнительному требованию — равенству нулю средней кривизны поля направлений скорости.

Рассмотрим еще такие движения идеальной жидкости, при которых полное ускорение ортогонально скорости. Для таких движений модуль скорости каждой частицы жидкости остается неизменным.

Теорема 4. Полем направлений скорости квазистационарного потока, у которого полное ускорение ортогонально скорости, может служить (кроме прямолинейного поля) лишь поле $\mathbf{e}$, удовлетворяющее условиям:

1) поле $\mathbf{k}$ векторов кривизны поля $\mathbf{e}$ голономно,

2) имеет место равенство

$$\mathbf{k} \times \{2 \operatorname{grad} \ln [(\mathbf{e} \times \mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{k})\, |\mathbf{k}|^{-2}] - (\mathbf{k} \times \operatorname{rot} \mathbf{k})\, |\mathbf{k}|^{-2}\} = 0 \tag{1.1}$$

Широта класса таких полей — четыре функции двух аргументов.

2. Изложенные выше результаты получены путем исследования совместности системы дифференциальных уравнений гидродинамики методом внешних форм Картана.

Пусть в некоторой трехмерной области трехмерного евклидова пространства задано непрямолинейное поле единичных векторов $\mathbf{e}$, что равносильно заданию конгруенции линий. Как и в [2], присоединим к каждой точке задания поля репер Френе векторной линии поля, проходящей через эту точку. Пусть $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ — единичные векторы касательной к линии, главной нормали и бинормали соответственно, а M — радиус-вектор точки. Дифференциальные формы ω_j^i и коэффициенты a_i, b_i, c_i означают то же самое, что и в [1,2]. Тогда $\mathbf{k} = a_3\mathbf{e}_2$.

Пусть $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_3$ — скорость потока идеальной жидкости. Тогда систему уравнений гидродинамики можно записать в виде следующей системы уравнений в полных дифференциалах:

$$d\rho = \rho_1\omega^1 + \rho_2\omega^2 + \rho_3\omega^3 - \{\rho_3 V + \rho V_3 + \rho V H\}\, dt \tag{2.1}$$

$$dV = V_1\omega^1 + V_2\omega^2 + V_3\omega^3 + V_t dt \tag{2.2}$$

$$d\varphi = V^2 a_3\omega^2 + (V_t + VV_3)\, \omega^3 + \varphi_t dt \tag{2.3}$$

Здесь первое уравнение — уравнение неразрывности, третье — уравнение Эйлера (φ — потенциал ускорения, ρ — плотность), второе равенство представляет разложение dV по базисным формам $\omega^i = d\mathrm{M}\cdot\mathbf{e}_i$ и dt.

При исследовании системы (2.1) — (2.3) на совместность достаточно исследовать на совместность ее подсистему (2.2), (2.3), так как при любом фиксированном решении системы (2.2), (2.3) уравнение (2.1) будет в инволюции относительно ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3. Решение его существует с произволом в одну функцию трех аргументов. Поэтому в дальнейшем исследуется система (2.2), (2.3).

Рассмотрим потенциальный квазистационарный поток идеальной жидкости. Так как $\operatorname{rot} \mathbf{V} = (V_2 - a_3 V)\, \mathbf{e}_1 - V_1\mathbf{e}_2 + V(a_1 - b_2)\, \mathbf{e}_3$, то для потенциального потока система (2.2), (2.3) имеет вид

(2.4) $$dV = Va_3\omega^2 + V_3\omega^3 + V_t dt$$

(2.5) $$d\varphi = V^2 a_3\omega^2 + (V_t + VV_3)\,\omega^3 + \varphi_t dt$$

$$V_1 = 0, \quad V_2 = Va_3, \quad a_1 - b_2 = 0 \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0)$$

Условие $a_1 - b_2 = 0$ означает, что поле направлений скорости потенциального квазистационарного потока голономно [1]. Обратно, пусть дано голономное поле единичных векторов $\mathbf{e}$. Дифференцируя внешним образом систему (2.4), (2.5), получим квадратичную систему в инволюции относительно V, V_3, V_t, φ_t. В этом можно убедиться построением регулярной цепи решений по способу Келера [5]. Решение системы (2.4), (2.5) существует с произволом в одну функцию двух аргументов. Модуль скорости V определяется с произволом в одну функцию двух аргументов уравнением (2.4), а φ при любом фиксированном из этих V определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

Таким образом, любое голономное поле $\mathbf{e}$ может служить полем направлений скорости потенциального квазистационарного потока идеальной жидкости. Известно, что оно же может служить полем направлений скорости для потенциального стационарного движения [4], причем модуль скорости V такого движения определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

Пусть дано голономное поле $\mathbf{e}$. Модули скоростей W и V стационарного и квазистационарного потоков с этим полем направлений скорости определяются уравнениями

(2.6) $$dW = Wa_3\omega^2 + W_3\omega^3$$

и (2.4) соответственно. Пусть $d\psi = \psi_3\omega^3 + \psi_t dt$, W — любое решение (2.6). Тогда $W\psi$ удовлетворяет уравнению (2.4). Обратно, если W и V — решения уравнений (2.6) и (2.4), то $(VW^{-1})_1 = (VW^{-1})_2 = 0$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим поток идеальной жидкости с голономным полем направлений скорости. Из уравнения (2.3) и условия голономности поля $a_1 - b_2 = 0$ следует, что $V_1 = 0$. Тогда rot $\mathbf{V}$ параллелен $\mathbf{e}_1$ и $V(a_1 - c_3)(V_2 - a_3V) = 0$. Отсюда при $a_1 - c_3 \neq 0$ вытекает, что $V_2 = Va_3$, т. е. поток потенциальный. Пусть теперь $a_1 - c_3 = 0$, т. е. поле $\mathbf{k}$ голономно. Тогда из системы (2.2), (2.3) следует, что

$$V_{t2} + VV_{23} + a_2VV_2 + V_2V_3 - a_3V_t - V^2(a_{33} + a_2a_3) - 2a_3VV_3 = 0$$

Продолжив уравнение (2.2) при $V_1 = 0$ с учетом этого соотношения, получим

(2.7) $$dV_2 = -c_2V_2\omega^1 + V_{22}\omega^2 + V_{23}\omega^3 + \{-VV_{23} - a_2VV_2 - V_2V_3 + a_3V_t + V^2(a_{33} + a_2a_3) + 2a_3VV_3\}\,dt$$

$$dV_3 = (V_{23} + a_2V_2 + a_3V_3)\,\omega^2 + V_{33}\omega^3 + V_{t3}dt$$

$$dV_t = \{-VV_{23} - a_2VV_2 - V_2V_3 + a_3V_t + V^2(a_{33} + a_2a_3) + 2a_3VV_3\}\,\omega^2 + V_{t3}\omega^3 + V_{tt}\,dt$$

Продифференцировав внешним образом, сделав замены переменных

$$dV_{22} = L^1,\ dV_{23} = L^2,\ dV_{33} = L^3,\ dV_{t3} + VdV_{33} = L^4$$

$$dV_{tt} + VdV_{t3} + V(dV_{t3} + VdV_{33}) = L^5,\ \omega^1 = \omega_0^1$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + dt,\ \omega^3 = \omega_0^3 + Vdt,\ dt = dt_0$$

получим систему в инволюции, произвол существования решения которой — две функции двух аргументов. С таким произволом определяется V системой (2.7), а функция φ при найденном V — с произволом в одну функцию одного аргумента.

Найдем широту класса голономных единичных векторных полей $\mathbf{e}$, поле векторов кривизны которых голономно. Так как $a_1 - b_2 = 0$ и $a_1 - c_3 = 0$, то

$$\omega_3^2 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3, \qquad \omega_3^1 = b_1\omega^1 + a_1\omega^2$$

$$\omega_1^2 = c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + a_1\omega^3$$

Внешнее дифференцирование приводит к системе в инволюции, произвол существования решения которой — три функции двух аргументов. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. По условию $V_3 = 0$. Известно [1], что поле направлений скорости $W\mathbf{e}_3$ стационарного потока с $W_3 = 0$ удовлетворяет условию $\operatorname{rot} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = 0$, т. е. $a_1 - c_3 = 0$, $a_{33} + a_2 a_3 = 0$. Может ли это же поле $\mathbf{e}$ служить полем направлений скорости квазистационарного потока с $V_3 = 0$? Пусть $a_1 - c_3 = 0$, $a_{33} + a_2 a_3 = 0$ и $V_3 = 0$. Система (2.2), (2.3) принимает вид

$$dV = V_1 \omega^1 + V_2 \omega^2 + V_t dt, \quad d\varphi = V^2 a_3 \omega^2 + V_t \omega^3 + \varphi_t dt \tag{2.8}$$

Рассмотрим случай неголономного поля $\mathbf{e}$, т. е. $a_1 - b_2 \neq 0$. Тогда из (2.8) после внешнего дифференцирования и разрешения по лемме Картана [5] вытекают соотношения

$$V_{t1} = V_{1t} = 0, \qquad V_{t2} = a_3 V_t, \qquad V_{t3} = 0$$
$$V_1 = -(2a_3)^{-1} \{(a_{31} + c_2 a_3) V + (a_1 - b_2) V^{-1} V_t\}$$
$$V_{tt} = V_t^2 V^{-1} - (a_{31} + c_2 a_3)(a_1 - b_2)^{-1} V V_t$$

Поэтому

$$dV_t = V_t a_3 \omega^2 + \{V_t^2 V^{-1} - (a_{31} + c_2 a_3)(a_1 - b_2)^{-1} V V_t\} dt$$

Отсюда следует $(a_{31} + c_2 a_3) V_t = 0$, т. е. $a_{31} + c_2 a_3 = 0$. В этом случае $dV_t = V_t a_3 \omega^2 + V_t^2 V^{-1} dt$, тогда внешнее дифференцирование этого уравнения и разрешение по лемме Картана приводит к соотношению $(a_1 - b_2) V_t = 0$, т. е. $V_t = 0$. Следовательно, с таким полем направлений скорости квазистационарный поток класса I невозможен.

Пусть теперь поле $\mathbf{e}$ удовлетворяет условиям

$$(a_1 - b_2) = 0, \quad a_1 - c_3 = 0, \quad a_{33} + a_2 a_3 = 0 \tag{2.9}$$

При продолжении системы (2.8) получим систему в инволюции, произвол существования ее решения — три функции одного аргумента, а V определяется с произволом в две функции одного аргумента. Таким образом, общим полем направлений скорости стационарного и квазистационарного потока класса I могут быть лишь поля, удовлетворяющие условиям (2.9), т. е. голономные поля $\mathbf{e}$, поле векторов кривизны которых потенциально. Связь модулей скоростей стационарного и квазистационарного потоков с общими линиями тока доказывается точно так же, как и в теореме 4 из [2]. Найдем широту класса голономных единичных векторных полей, поле векторов кривизны которых потенциально. Для этого класса полей имеем

$$da_1 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 - (2a_1 b_1 + c_2 a_3)\omega^3, \quad da_2 = (a_{12} - 2a_1 c_1 - a_2 c_2 +$$
$$+ b_1 c_2)\omega^1 + a_{22}\omega^2 + (a_{32} - a_2^2 - a_3^2 - 3a_1^2)\omega^3$$
$$da_3 = -c_2 a_3 \omega^1 + a_{32}\omega^2 - a_2 a_3 \omega^3, \quad db_1 = b_{11}\omega^1 + (a_{11} +$$
$$+ 2a_1 c_2 + b_1 c_1 - a_2 c_1)\omega^2 + (a_1^2 - b_1^2 - a_3 c_1)\omega^3, \quad dc_1 =$$
$$= c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2 + (a_{11} - b_1 c_1 + a_3 b_1)\omega^3, \quad dc_2 = (c_{12} + a_1^2 - c_1^2 - c_2^2 -$$
$$- b_1 a_2)\omega^1 + c_{22}\omega^2 + (a_{12} - 2a_1 c_1 - a_2 c_2)\omega^3$$

После внешнего дифференцирования получим квадратичную систему в инволюции. Построив регулярную цепь решений, находим, что широта этого класса полей — две функции двух аргументов. Все утверждения теоремы 3 доказаны.

Рассмотрим такие квазистационарные потоки, полное ускорение которых ортогонально скорости, т. е. $V_t + V V_3 = 0$. В этом случае из (2.2), (2.3) получаем

$$a_1 - c_3 = 0, \qquad V_1 = -(2a_3)^{-1}(a_{31} + c_2 a_3) V$$
$$V_3 = -(2a_3)^{-1}(a_{33} + a_2 a_3) V$$

Из соотношения

$$dV = -(2a_3)^{-1}(a_{31} + c_2 a_3) V \omega^1 + V_2 \omega^2 - (2a_3)^{-1}(a_{33} + a_2 a_3) V \omega^3 +$$
$$+ (2a_3)^{-1}(a_{33} + a_2 a_3) V^2 dt$$

следует, что поле направлений скорости такого потока должно удовлетворять соотношениям

$$\{a_3^{-1}(a_{33} + a_2 a_3)\}_1 = (2a_3^2)^{-1}(a_{31} + c_2 a_3)(a_{33} + a_2 a_3) \tag{2.10}$$
$$\{a_3^{-1}(a_{33} + a_2 a_3)\}_3 = (2a_3^2)^{-1}(a_{33} + a_2 a_3)^2, \quad a_1 - c_3 = 0$$

Если $a_{33} + a_2a_3 = 0$, то поток стационарный. Обратно, если поток стационарный, то $a_1 - c_3 = 0$, $a_{33} + a_2a_3 = 0$ (см. [1]). При $a_{33} + a_2a_3 \neq 0$ условия (2.10) можно представить в виде равенства (1.1) и $\mathbf{k}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{k} = 0$. В этом случае

$$V = -2a_3\,(a_{33} + a_2a_3)^{-1}\,(t + N)^{-1}$$

где N — любая функция, удовлетворяющая условию $dN = N_2\omega^2$. Широта класса полей, удовлетворяющих условиям (2.10),— четыре функции двух аргументов, в чем можно убедиться построением регулярной цепи решений системы, определяющей этот класс полей. Теорема 4 доказана.

Поступила 2 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слухаев В. В.* К геометрической теории стационарного движения жидкости. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 3.
2. *Горбанёв Н. Н.* О некоторых классах квазистационарных потоков идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
3. *Бюшгенс С. С.* Геометрия векторного поля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10, № 1.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М., Гостехиздат, 1948.

УДК 532.516

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. И. Найденов

(Москва)

Рассматриваются двумерные установившиеся течения вязкой несжимаемой жидкости с учетом экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. В отличие от численных методов решения этой задачи [1] нелинейная система уравнений, описывающая течение, путем разложения по малому параметру, входящему в показатель экспоненты, сводится к бесконечной последовательности линейных уравнений эллиптического типа. Строится некоторое мажорирующее уравнение, существование положительных решений которого обеспечивает равномерную сходимость итераций в окрестности нулевого значения параметра. В качестве иллюстрации рассматривается течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе при наличии теплового источника.

1. Рассмотрим установившееся плоское течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса

$$\mu/\mu_0 = e^{-\alpha T}$$

Система дифференциальных уравнений движения, неразрывности и энергии без учета инерционных и диссипативных членов после введения функции тока имеет вид [2]

$$\Delta\Delta\psi = 2\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi\right) - \left[\alpha^2\left(\frac{\partial T^2}{\partial y} - \frac{\partial T^2}{\partial x}\right) - \right. \tag{1.1}$$

$$\left. - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\right]\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - 4\left(\alpha^2\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$

$$\Delta T = P\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad \alpha = \beta\delta T, \quad P = \frac{VL}{a}$$