Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.4

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

О. И. Иванищева, В. А. Минаев

(Воронеж)

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния стохастически неоднородных упругих тел. В результате применения обобщенного метода статистической линеаризации получена замкнутая система уравнений, а для нормального закона распределения вероятностей — система интегро-дифференциальных уравнений относительно математических ожиданий.

Для изотропной среды, модули упругости которой — однородные изотропные случайные функции координат, получены выражения эффективных модулей упругости через математические ожидания и дисперсии случайных функций, описывающих свойства среды.

1. Пусть случайные функции связаны нелинейной зависимостью

$$Z = X_{ij} Y_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам происходит суммирование от единицы до трех. Функции, входящие в (1.1), представим в виде суммы математических ожиданий и отклонений от них

$$Z = \langle Z \rangle + Z', \qquad X_{ij} = \langle X_{ij} \rangle + X_{ij}', \; Y_{ij} = \langle Y_{ij} \rangle + Y'_{ij}$$

Аппроксимирующую функцию зависимости (1.1) примем в виде

$$V = a + a_{ij} Y_{ij}' + b_{ij} X_{ij}' \tag{1.2}$$

Неслучайные функции a, a_{ij}, b_{ij} будем определять из условия минимума математического ожидания квадрата разности истинной и аппроксимирующей функций [1]

$$\langle (Z - V)^2 \rangle = \min \tag{1.3}$$

Применяя условие экстремума выражения (1.3) по параметрам, получим линейную относительно неизвестных систему уравнений

$$\begin{aligned}
& a = \langle X_{ij} \rangle \langle Y_{ij} \rangle + \langle X_{mn}' Y_{mn}' \rangle \\
& a_{ij} \langle Y_{mn}' Y_{ij}' \rangle + b_{ij} \langle Y_{mn}' X_{ij}' \rangle = \langle X_{ij} \rangle \langle Y_{ij}' Y_{mn}' \rangle + \\
& + \langle Y_{ij} \rangle \langle X_{ij}' Y_{mn}' \rangle + \langle X_{ij}' Y_{ij}' Y_{mn}' \rangle \\
& a_{ij} \langle Y_{ij}' X_{mn}' \rangle + b_{ij} \langle X_{ij}' X_{mn}' \rangle = \langle X_{ij} \rangle \langle Y_{ij}' X_{mn}' \rangle + \\
& + \langle Y_{ij} \rangle \langle X_{ij}' X_{mn}' \rangle + \langle X_{ij}' Y_{ij}' X_{mn}' \rangle
\end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим неоднородное анизотропное упругое тело, в котором напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} связаны обобщенным законом Гука с тензором упругих модулей c_{ijmn}, определяющим случайное тензорное поле

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad \sigma_{ij,j} = 0, \qquad \varepsilon_{mn} = {}^1/_2 (u_{m,n} + u_{n,m}) \tag{2.1}$$

Проведя статистическую линеаризацию (1.2) — (1.4) системы (2.1), получим следующую систему уравнений:

$$(2.2)\qquad \langle\sigma_{ij}\rangle = \langle c_{ijmn}\rangle\langle\varepsilon_{mn}\rangle + \langle c'_{ijmn}\,\varepsilon'_{mn}\rangle$$

$$\langle\sigma_{ij,j}\rangle = 0,\qquad \langle\varepsilon_{mn}\rangle = {}^1/_2\,(\langle u_{m,n}\rangle + \langle u_{n,m}\rangle)$$

$$(2.3)\qquad \sigma_{ij}' = a_{ijmn}\,\varepsilon'_{mn} + b_{mn}\,c'_{ijmn}$$

$$\sigma'_{ij,j} = 0,\qquad \varepsilon'_{mn} = {}^1/_2\,(u'_{m,n} + u'_{n,m})$$

$$(2.4)\qquad a_{\alpha\beta ij}\,\langle\varepsilon_{ij}'c'_{\alpha\beta mn}\rangle + b_{ij}\,\langle c'_{\alpha\beta ij}\,c'_{\alpha\beta mn}\rangle =$$

$$= \langle c_{\alpha\beta ij}\rangle\,\langle\varepsilon_{ij}'c'_{\alpha\beta mn}\rangle + \langle\varepsilon_{ij}\rangle\,\langle c'_{\alpha\beta ij}\,c'_{\alpha\beta mn}\rangle + \langle c'_{\alpha\beta ij}c'_{\alpha\beta mn}\varepsilon_{ij}'\rangle$$

$$a_{\alpha\beta ij}\langle\varepsilon_{ij}'\varepsilon'_{mn}\rangle + b_{ij}\,\langle c'_{\alpha\beta ij}\,\varepsilon'_{mn}\rangle =$$

$$= \langle c_{\alpha\beta ij}\rangle\,\langle\varepsilon_{ij}'\,\varepsilon'_{mn}\rangle + \langle\varepsilon_{ij}\rangle\,\langle c'_{\alpha\beta ij}\,\varepsilon'_{mn}\rangle + \langle c'_{\alpha\beta ij}\varepsilon_{ij}'\varepsilon'_{mn}\rangle$$

По повторяющимся греческим индексам суммирование не производится. Система уравнений (2.2) — (2.4) замкнута. Для ее решения проще всего воспользоваться методом последовательных приближений [2].

Задача определения напряженно-деформированного состояния существенно упрощается, если распределение вероятностей является нормальным, что часто реализуется в линейно-упругих системах [3]. В этом случае из уравнений (2.4) следует

$$(2.5)\qquad a_{ijmn} = \langle c_{ijmn}\rangle,\qquad b_{mn} = \langle\varepsilon_{mn}\rangle$$

С учетом (2.5) уравнения (2.3) принимают вид

$$(2.6)\qquad \langle c_{ijmn}\rangle u'_{m,nj} = -\,f_{ij,j},\quad f_{ij} = c'_{ijmn}\,\langle\varepsilon_{mn}\rangle$$

Для тела объема v с заданными на его поверхности детерминированными граничными условиями решение системы (2.6), выражаемое через функцию Грина, имеет вид [4]

$$(2.7)\qquad u_i' = \int_v G_{in}(x, x')\,\frac{\partial f_{nj}(x')}{\partial x_j'}\,dv'$$

Первые два соотношения системы (2.2) после подставновки в них выражения (2.7) и выполнения операции математического ожидания сводятся к следующим:

$$(2.8)\qquad \langle c_{ijmn}\rangle\langle\varepsilon_{mn,j}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\int_v F_{qmn}\,\frac{\partial}{\partial x_k'}\,(\langle\varepsilon_{st}(x')\rangle\,c_{nkst}^{ijqm})\,dv' = 0$$

$$c_{nkst}^{ijqm} = \langle c'_{nkst}(x)\,c'_{ijqm}(x')\rangle,\qquad F_{qmn} = \frac{\partial G_{qm}}{\partial x_n} + \frac{\partial G_{qn}}{\partial x_m}$$

Присоединив к (2.8) последнее соотношение из (2.2), получим замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно средних значений компонент перемещений.

3. Рассмотрим стохастически неоднородное изотропное упругое тело размеры которого много больше размеров неоднородностей. Предположим, что упругие модули являются однородными изотропными функциями координат, а тело находится в макроскопически однородном деформи-

рованном состоянии, т. е.

$$c_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \tag{3.1}$$
$$\langle\lambda\rangle = \text{const}, \quad \langle\mu\rangle = \text{const}, \quad \langle\varepsilon_{mn}\rangle = \text{const}$$

В этом случае уравнения, соответствующие системам (2.2) — (2.4), примут вид

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = 2\,(\langle\mu\rangle\,\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \langle\mu'\varepsilon_{ij}'\rangle) + \delta_{ij}\,(\langle\lambda\rangle\,\langle\varepsilon_{nn}\rangle + \langle\lambda'\varepsilon_{nn}'\rangle) \tag{3.2}$$
$$\langle\sigma_{ij,j}\rangle = 0, \quad \langle\varepsilon_{ij}\rangle = {}^1/_2\,(\langle u_{i,j}\rangle + \langle u_{j,i}\rangle)$$

$$\sigma_{ij}' = 2\,(a_1\varepsilon_{ij}' + b_{ij}\mu') + \delta_{ij}\,(a_1\varepsilon_{nn}' + b_2\lambda') \tag{3.3}$$
$$\sigma_{ij,j}' = 0, \quad \varepsilon_{ij}' = {}^1/_2\,(u_{i,j}' + u_{j,i}')$$

$$2\,(a_1\langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + b_{\alpha\beta}\,\langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\mu'\rangle) + \delta_{\alpha\beta}\,(a_2\langle\varepsilon_{nn}'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + b_2\,\langle\lambda'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle) = \tag{3.4}$$
$$= 2\,\langle\mu\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\mu'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\mu'\rangle) +$$
$$+ \delta_{\alpha\beta}\,(\langle\lambda\rangle\,\langle\varepsilon_{\alpha\beta}'\,\varepsilon_{nn}'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}'\rangle\langle\lambda'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}'\,\lambda'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle)$$

$$2\,(a_1\,\langle\mu'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + b_{\alpha\beta}\,\langle\mu'\mu'\rangle) + \delta_{\alpha\beta}\,(a_2\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\mu'\rangle + b_2\langle\mu'\lambda'\rangle) =$$
$$= 2\,(\langle\mu\rangle\langle\mu'\varepsilon_{\alpha\beta}'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle\langle\mu'\mu'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\beta}\mu'\lambda'\rangle) +$$
$$+ \delta_{\alpha\beta}\,(\langle\lambda\rangle\langle\varepsilon_{nn}'\,\mu'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}\rangle\langle\lambda'\mu'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}\mu'\lambda'\rangle)$$

$$2\,(a_1\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\varepsilon_{\alpha\alpha}'\rangle + b_{\alpha\alpha}\,\langle\mu'\varepsilon_{nn}'\rangle) + a_2\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\varepsilon_{mm}'\rangle + b_2\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\lambda'\rangle =$$
$$= 2\,\langle\mu\rangle\,\langle\varepsilon_{nn}'\varepsilon_{\alpha\alpha}'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\alpha}\rangle\,\langle\mu'\varepsilon_{nn}'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\alpha}'\,\mu'\varepsilon_{nn}'\rangle) +$$
$$+ \langle\lambda\rangle\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\varepsilon_{ii}'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}\rangle\,\langle\lambda'\varepsilon_{kk}'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}'\,\varepsilon_{ii}'\,\lambda'\rangle$$

$$2\,(a_1\,\langle\lambda'\varepsilon'_{\alpha\alpha}\rangle + b_{\alpha\alpha}\,\langle\mu'\lambda'\rangle) + a_2\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\lambda'\rangle + b_2\,\langle\lambda'\lambda'\rangle =$$
$$= 2\,(\langle\mu\rangle\,\langle\lambda'\varepsilon'_{\alpha\alpha}\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\alpha}\rangle\,\langle\lambda'\mu'\rangle + \langle\varepsilon_{\alpha\alpha}\,\mu'\lambda'\rangle) +$$
$$+ \langle\lambda\rangle\,\langle\varepsilon_{nn}'\,\lambda'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}\rangle\,\langle\lambda'\lambda'\rangle + \langle\varepsilon_{nn}'\,\lambda'\lambda'\rangle$$

В предположении, что распределение вероятностей является нормальным, решение системы уравнений (3.4) будет

$$a_1 = \langle\mu\rangle, \quad b_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle, \quad a_2 = \langle\lambda\rangle, \quad b_2 = \langle\varepsilon_{nn}\rangle \tag{3.5}$$

Пренебрегая влиянием пограничного слоя [3], решение системы уравнений (3.3) — (3.5) будем искать с помощью преобразования Фурье [5]. Параметры преобразования по переменным x_i обозначим через ξ_i. Решение системы уравнений (3.3) при условиях (3.5) имеет вид

$$\langle\mu\rangle\,\varepsilon_{ij}' = \int \frac{1}{m^2}\left[\left(4c\,\langle\varepsilon_{mn}\rangle\,\frac{\xi_m\xi_n\xi_i\xi_j}{m^2} - 2\,\langle\varepsilon_{ik}\rangle\,\xi_k\xi_j - \right.\right. \tag{3.6}$$
$$\left.\left. - 2\,\langle\varepsilon_{jk}\rangle\,\xi_k\xi_i\right) f_1 + 2\,\langle\varepsilon_{nn}\rangle\,(c-1)\,\xi_i\xi_j f_2\right] e^{i\xi_n x_n}\,d\xi$$
$$c = (\langle\mu\rangle + \langle\lambda\rangle)\,(2\,\langle\mu\rangle + \langle\lambda\rangle)^{-1}, \qquad m^2 = \xi_i\xi_i$$

Здесь f_1, f_2 — функции переменных ξ_i, определяющие спектральные разложения случайных функций μ', λ'

$$\mu' = \int f_1 e^{i\xi_n x_n}\,d\xi, \qquad \lambda' = \int f_2 e^{i\xi_n x_n}\,d\xi \tag{3.7}$$

Интегрирование производится по всему пространству переменных ξ_i. С учетом изотропии случайных функций из соотношений (3.6) и (3.7) следует [5]

$$(3.8)\qquad \langle\mu\rangle\langle\mu'\varepsilon_{ij}'\rangle = \int\frac{1}{m^2}\Bigg[\Big(4c\langle\varepsilon_{mn}\rangle\frac{\xi_m\xi_n\xi_i\xi_j}{m^2} - 2\langle\varepsilon_{ik}\rangle\xi_k\xi_j - 2\langle\varepsilon_{jk}\rangle\xi_k\xi_i\Big)\Phi_1(m) + 2\langle\varepsilon_{nn}\rangle(c-1)\xi_i\xi_j\Phi_2(m)\Bigg]d\xi$$

$$\langle\mu\rangle\langle\lambda'\varepsilon_{nn}'\rangle = 2\langle\varepsilon_{nn}\rangle(c-1)\left(\langle\lambda'\lambda'\rangle + {}^2/_3\langle\lambda'\mu'\rangle\right)$$

Здесь $\Phi_1(m)$ — спектральная плотность случайной функции μ', $\Phi_2(m)$ — взаимная спектральная плотность случайных функций λ' и μ', $\langle\lambda'\lambda'\rangle$ — дисперсия случайной функции λ'.

Поскольку $\Phi(m)$ — изотропная функция, то интегралы, входящие в первое соотношение (3.8), будут [6,7] изотропными, симметричными по всем индексам тензорами

$$(3.9)\qquad \int\frac{\xi_m\xi_n\xi_i\xi_j}{m^4}\Phi_1(m)\,d\xi = \frac{\langle\mu'\mu'\rangle}{15}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in})$$

$$\int\frac{\xi_i\xi_j}{m^2}\Phi_1(m)\,d\xi = \frac{\langle\mu'\mu'\rangle}{3}\delta_{ij},\qquad \int\frac{\xi_i\xi_j}{m^2}\Phi_2(m)\,d\xi = \frac{\langle\mu'\lambda'\rangle}{3}\delta_{ij}$$

Здесь $\langle\mu'\lambda'\rangle$ — корреляционный момент случайных функций μ' и λ', $\langle\mu'\mu'\rangle$ — дисперсия случайной функции μ'.

В результате подстановки выражений (3.8), (3.9) в первое соотношение из (3.2) получаем

$$(3.10)\qquad \langle\sigma_{ij}\rangle = 2\mu_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \delta_{ij}\lambda_1\langle\varepsilon_{nn}\rangle$$

$$(3.11)\qquad \mu_1 = \langle\mu\rangle - 2\frac{8\langle\mu\rangle + 3\langle\lambda\rangle}{15\langle\mu\rangle(2\langle\mu\rangle + \langle\lambda\rangle)}\langle\mu'\mu'\rangle$$

$$\lambda_1 = \langle\lambda\rangle - \frac{\langle\lambda'\lambda'\rangle - {}^4/_{15}(\langle\mu\rangle + \langle\lambda\rangle)\langle\mu'\mu'\rangle\langle\mu\rangle^{-1} + {}^8/_3\langle\mu'\lambda'\rangle}{2\langle\mu\rangle + \langle\lambda\rangle}$$

В предположении некоррелированности случайных функций λ' и μ' выражения (3.11) совпадают с результатами, приведенными в работе [8], где предполагалась малость флуктуаций случайных функций.

Итак, из выражений (3.10) следует, что поведение стохастически неоднородного изотропного упругого материала в среднем описывается законом Гука с эффективными модулями упругости, определяемыми соотношениями

$$\gamma = \mu_1,\qquad k = \lambda_1 + {}^2/_3\,\mu_1$$

где γ и k — соответственно сдвиговый и объемный модули.

Поступила 25 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1970.
2. *Казаков И. Е., Доступов Б. Г.* Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
3. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
4. *Ломакин В. А.* О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
5. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967.
6. *Новожилов В. В.* О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах. В сб.: Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
7. *Дудукаленко В. В., Минаев В. А.* К расчету предела пластичности композитных материалов. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
8. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Упругие модули текстуированных материалов. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.