

## ВЛИЯНИЕ СТРИНГЕРА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЯ

Г. Т. Жоржолани, А. И. Каландия

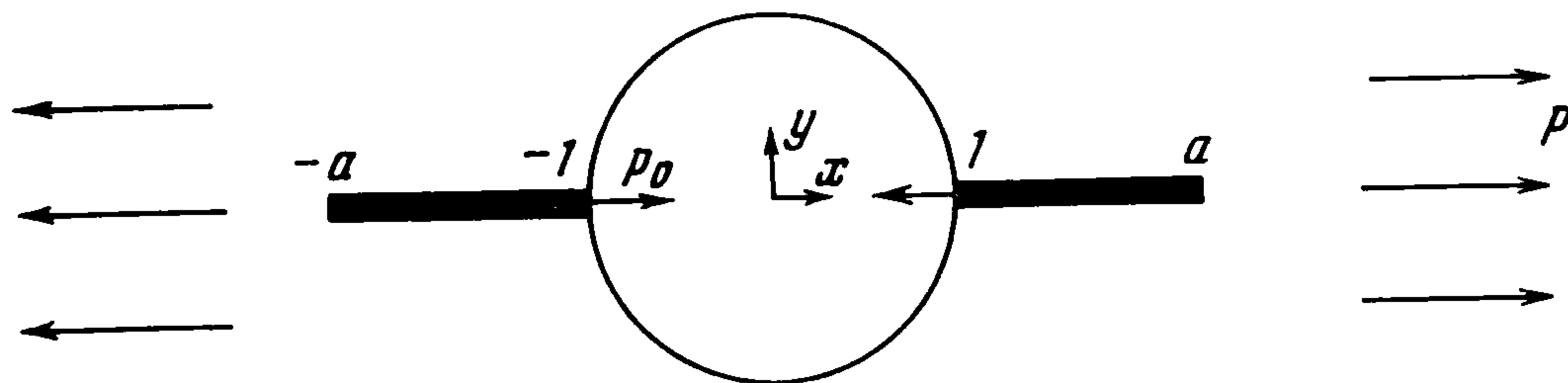
(Тбилиси)

Изучается влияние симметричных стрингеров, усиливающих пластинку в зоне кругового отверстия, на распределение поля напряжений около отверстия. Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению первого рода, допускающему приближенное рассмотрение.

Вопросу о передаче упругому телу усилий через стрингер посвящена обширная литература. Обзор результатов, полученных до 1968 года, содержится в работе [1], где можно найти соответствующие библиографические указания. К числу последних работ, посвященных теоретическому исследованию вопроса, относятся работы [2-7].

Отметим, что авторы работы [7], видимо, не были знакомы с работами [5,6].

**1. Постановка задачи и обозначения.** Упругое тело представляет собой бесконечную пластинку с круговым отверстием. К пластинке в радиальном направлении прикреплены (приварены) два одинаковых упругих стержня постоянных поперечных сечений, расположенных на одной прямой и выходящих концами на обвод отверстия. Отверстие предполагается свободным от внешних усилий. К основаниям стержней, что у отверстия, приложены равные по величине и обратные друг другу осевые нагрузки и пластинка подвержена на бесконечности односторон-



нему растяжению в направлении оси стержней. Предполагается, что упругая среда деформируется в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, а усиливающие стержни, называемые ниже стрингерами, представляют собой идеализированные одномерные континуумы, лишенные изгибной жесткости. Ставится задача об определении влияния стрингеров на распределение напряжений в пластинке около отверстия.

Радиус отверстия примем, ради простоты, равным единице. Отнесем поверхность пластинки к плоскости переменной  $z = x + iy$ , поместим центр отверстия в начале координат и расположим оси стрингеров на отрезках  $[-a, -1]$  и  $[1, a]$  вещественной оси (фигура). Алгебраическое значение осевой нагрузки, приложенной к основанию левого стержня, обозначим через  $p_0$ , а растягивающее усилие на бесконечности — через  $P$ .

Для элементов упругих полей и характеристик пластинки и стрингера примем следующие обозначения:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжения в плоском поле,  $u, v$  — компоненты смещения,  $N(x)$  — нормальное усилие в сечении стрингера,  $\varepsilon^0$  — относительное удлинение оси стрингера,  $E, \nu$  — упругие постоянные материала пластинки,  $E_0$  — модуль упругости стрингера,  $S_0$  — площадь его поперечного сечения,  $h$  — толщина пластинки. Введем еще длину, толщину, и ширину стрингера, обозначаемые ниже через,  $l, h_0$  и  $b$  соответственно,  $l = a - 1$ . На оси стрингера будем различать левый и правый берега (по отношению к положительному направлению оси  $x$ ) и приписывать величинам  $\sigma_x$  и т. д., к ним относящимся, знаки плюс и минус соответственно.

При решении задачи будем следовать приему, указанному в [8] применительно к несимметричному случаю.

**2. Граничные условия.** Прежде всего выразим условия совместного деформирования пластинки и стрингера. Условие равновесия любого бесконечно малого куска стрингера, скрепленного с пластинкой, дает два равенства

$$(2.1) \quad \begin{aligned} h (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) + N'(x) &= 0 \\ \sigma_y^+ - \sigma_y^- &= 0, \quad 1 < |x| < a \end{aligned}$$

Первое равенство выражает условие равенства нулю проекции на ось  $x$  совокупности всех усилий, приложенных к поверхности элементарного объема стрингера, заключенного между двумя его поперечными сечениями с координатами  $x$  и  $x + dx$ . Второе равенство, полученное проектированием всех сил на ось  $y$ , выведено с учетом того, что стрингер не сопротивляется изгибу. Первое равенство (2.1) после интегрирования дает

$$(2.2) \quad h \int_{x_0}^x (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) dt + N(x) - p_0 = 0, \quad x_0 = \begin{cases} 1, & 1 < x < a \\ -1, & -a < x < -1 \end{cases}$$

Из-за симметрии задачи имеют место следующие физически очевидные соотношения:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tau_0(-x) &= -\tau_0(x), \quad N(-x) = N(x); \quad 1 < x < a \\ (\tau_0 &= \tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) \end{aligned}$$

Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться одним равенством (2.2), в котором  $x_0 = 1$ .

Воспользуемся теперь условием непрерывности упругих смещений при переходе через ось стрингера и равенством между собой на той же оси деформаций удлинения. Имеем

$$(2.4) \quad u^+ + iv^+ = u^- + iv^-$$

$$(2.5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- = \varepsilon^0, \quad 1 < |x| < a$$

На основании (2.5), если еще воспользоваться формулой

$$N(x) = E_0 S_0 \varepsilon^0(x)$$

хорошо известной из теории малых деформаций криволинейных стержней, условия равновесия (2.2) и второе равенство (2.1) могут быть представлены в виде одного комплексного равенства следующим образом:

$$(2.6) \quad h \int_1^x [(\tau_{xy}^+ + i\sigma_y^+) - (\tau_{xy}^- + i\sigma_y^-)] dt + E_0 S_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - p_0 = 0, \quad 1 < x < a$$

Введем функции Мусхелишвили  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  и напомним известную формулу (см. [9], § 33), справедливую вдоль любого профиля  $AB$  в плоском напряженном поле (точка  $A$  — фиксированная,  $B$  — переменная).

$$(2.7) \quad \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int_{AB} (X_n + iY_n) ds + \text{const}$$

Положительное направление обхода на  $AB$  ведет от  $A$  к  $B$ , а положительная нормаль  $n$  к профилю направлена вправо;  $X_n ds$ ,  $Y_n ds$  означают компоненты вектора напряжения, действующего на элемент  $ds$  со стороны положительной нормали. Функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в данном случае кусочно-голоморфны в плоскости вне отверстия и имеют в качестве линии скачков отрезки  $[-a, -1]$  и  $[1, a]$ .

Формула (2.7) позволяет выразить граничные условия задачи в функциях  $\varphi$  и  $\psi$ . Рассуждениями, вполне аналогичными приведенным для случая одного стрингера (см. [8], § 31, 33), убеждаемся, что условия (2.4) и (2.6) вдоль линии сопряжения равносильны следующим двум вещественным равенствам:

$$(2.8) \quad \text{Re} \{ \varphi^-(t) - \varphi^+(t) \} = 0 \quad \text{на } L^+ + L^-$$

$$(2.9) \quad \int_1^x (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) dt + K_0 \text{Re} \frac{d}{dx} [\kappa \varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}] - \frac{p_0}{h} = 0$$

на  $L^+$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad K_0 = \frac{E_0 S_0}{2\mu h}$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига материала пластинки, а  $L^+$  и  $L^-$  — соответственно интервалы  $(1, a)$  и  $(-a, -1)$ ; под выражением  $\kappa \varphi(t) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}$ , когда точка  $t$  лежит на  $L^+ + L^-$ , понимаются равные между собой предельные значения в соответствующей точке комплексного смещения  $2\mu(u + iv)$  слева и справа. Запись условия в форме (2.9) предполагает, разумеется, наличие соотношений (2.3).

Наконец, условие на обводе отверстия записывается в обычном виде

$$(2.10) \quad \varphi(\sigma) + \overline{\sigma\varphi^1(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \quad \text{на } \gamma (\sigma = l^{i\theta})$$

где  $\gamma$  — окружность  $|z| = 1$ , а  $\sigma$  — точка на ней.

Равенства (2.8) — (2.10) исчерпывают все условия задачи.

3. Построение комплексных потенциалов. В любой точке  $x$  из отрезков  $L^+$  и  $L^-$ , где стрингер сопряжен с пластинкой, возникнет усилие  $q(x)$ , направленное по оси стрингера и равное

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q(x) &= -\tau_{xy}^+(x, 0) + \tau_{xy}^-(x, 0) \\ q(-x) &= -q(x) \end{aligned}$$

Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующие сосредоточенной в точке  $t$  ( $1 < |t| < a$ ) силе  $(q, 0)$  и растягивающему на бесконечности усилию интенсивности  $P$ , имеют вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varphi(z, t) &= -p(t) \ln \frac{z-t}{z+t} + \frac{\Gamma}{2} z + \varphi_0(z, t) \\ \psi(z, t) &= p(t) \left[ \kappa \ln \frac{z-t}{z+t} + \frac{2zt}{z^2-t^2} \right] - \Gamma z + \psi_0(z, t) \end{aligned}$$

Здесь

$$p(x) = \frac{q(x)}{2\pi(1+\kappa)}, \quad \Gamma = \frac{P}{2}$$

а  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  — функции от  $z$ , голоморфные всюду вне отверстия, включая бесконечно удаленную точку. Эти последние, так же как и функции  $\varphi$  и  $\psi$ , зависят от действительного параметра  $t$ , меняющегося в интервалах  $L^+$  и  $L^-$ .

Функции  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  будем определять из граничного условия (2.10), которое на основании (3.2) дает

$$\begin{aligned} \varphi_0(\sigma, t) + \overline{\sigma \varphi_0'(\sigma, t)} + \overline{\psi_0(\sigma, t)} &= f_0(\sigma, t) \\ f_0(\sigma, t) &= p(t) \left[ \ln \frac{\sigma-t}{\sigma+t} - \kappa \ln \frac{1-\sigma t}{1+\sigma t} + \frac{\sigma(\sigma-t)}{1-\sigma t} - \frac{\sigma(\sigma+t)}{1+\sigma t} \right] - \\ &- \Gamma \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

Решение этой задачи представляется в виде (см. [9], § 82)

$$\begin{aligned} \varphi_0(z, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_0(\sigma, t) d\sigma}{\sigma-z} \\ \psi_0(z, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}_0 d\sigma}{\sigma-z} - \frac{\varphi_0'(z, t)}{z} \end{aligned}$$

Преыдущие интегралы легко вычислить на основании интегральной формулы Коши и обобщенной теоремы о вычетах. Прделав необходимые вычисления и подставив найденные функции  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  в правые части формул (3.2), для функций влияния  $\varphi$  и  $\psi$  найдем

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varphi(z, t) &= \Omega_1(z, t) p(t) + g_1(z) \\ \psi(z, t) &= \Omega_2(z, t) p(t) + g_2(z) \\ \Omega_1(z, t) &= -\ln \frac{z-t}{z+t} - \kappa \ln \frac{zt-1}{zt+1} + \frac{2(1-t^2)z}{t(1-z^2)} \end{aligned}$$

$$\Omega_2(z, t) = \kappa \ln \frac{z-t}{z+t} + \frac{2zt}{z^2-t^2} + \ln \frac{zt-1}{zt+1} - \frac{2\kappa t}{z(1-z^2t^2)} - \frac{2(1-t^2)(1+z^2t^2)}{zt(1-z^2t^2)^2} - \frac{2}{zt}$$

$$g_1(z) = \frac{\Gamma}{2} \left( z + \frac{2}{z} \right), \quad g_2(z) = -\Gamma \left( z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \right)$$

На основании (3.3) искомые потенциалы задачи представим теперь в виде

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \Omega_1(z, t) \tau(t) dt + g_1(z) \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \Omega_2(z, t) \tau(t) dt + g_2(z), \quad \tau(x) = 2\pi p(x) \end{aligned}$$

Из самого построения функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  следует, что они удовлетворяют граничному условию (2.10) при любом вещественном  $\tau(x)$ . Можно также убедиться, что условие (2.8) удовлетворяется в точности. В случае, когда стрингер отсутствует, будем иметь:  $\tau(x) = 0$  на  $L^+$ ,  $\tau(-x) = -\tau(x)$ , и функции (3.4) дадут решение известной задачи Кирша.

4. Сведения к интегральному уравнению. Остается удовлетворить единственному условию, задаваемому равенством (2.9). С этой целью выразим на основании (3.4) комбинацию  $-\kappa\varphi(z) + z\varphi'(z) + \psi(z)$  в интегральной форме и вычислим ядро интегрального выражения при  $z = x$ . После элементарного вычисления для ядра  $\Omega(x, t)$  находим

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 2\pi\Omega(x, t) &= \\ &= \kappa [\ln(x-t) + \overline{\ln(x-t)}] - 2\kappa \ln(x+t) + (\kappa^2 + 1) \ln \frac{xt-1}{xt+1} + \\ &+ 2\kappa \left[ \frac{t^2-1}{t^2} + \frac{x^2-1}{x^2} \right] \frac{xt}{1-x^2t^2} + \frac{2(1-t^2)(x^2-1)}{xt} \frac{1+x^2t^2}{(1-x^2t^2)^2} - \frac{2}{xt} \end{aligned}$$

Правая часть предыдущего равенства, без первых двух ее слагаемых, представляет собой регулярную функцию от переменных  $x$  и  $t$  при  $1 < x, t \leq a$ . Поэтому при составлении производной

$$d/dx [\kappa\varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}]$$

можем с указанной оговоркой дифференцировать под знаком интеграла. При вычислении же производных от слагаемых, содержащих под интегралом функцию  $\ln(x-t)$  или ее сопряженную, следует воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi i} \int_{L^+} \ln(x-t) \tau(t) dt &= -\tau(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{L^+} \frac{\tau(t) dt}{x-t} \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi i} \int_{L^+} \overline{\ln(x-t)} \tau(t) dt &= \tau(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{L^+} \frac{\tau(t) dt}{x-t} \end{aligned}$$

справедливыми для любой функции  $\tau(x)$ , непрерывной на  $L^+$  в смысле Гельдера; интегралы в правых частях понимаются в смысле главного

значения по Коши. Прделав все необходимые выкладки и заменив еще под интегралом в (2.9) разность  $\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-$  ее значением из равенства

$$\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^- = -(1 + \kappa) \tau(x) \quad \text{на } L^+$$

приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно  $\tau(x)$

$$(4.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} \frac{\tau(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi} \int_{L^+} k_0(x, t) \tau(t) dt = f_0(x)$$

Здесь

$$k_0(x, t) = -2\pi\lambda H(x-t) - \frac{1}{2x} K(x, t)$$

$$K(x, t) = \left( \frac{\kappa^2 + 1}{x} - \frac{2\kappa}{x^3} \right) \left[ \frac{1}{xt-1} + \frac{1}{xt+1} \right] + \frac{2}{x^2t} - \frac{2\kappa}{x+t} + \\ + \left[ \kappa t \left( \frac{t^2-1}{t^2} + \frac{x^2-1}{x^2} \right) - \frac{(t^2-1)(x^2+1)}{x^2t} \right] \left[ \frac{1}{(xt-1)^2} + \frac{1}{(xt+1)^2} \right] + \\ + \frac{2(t^2-1)(x^2-1)}{x} \left[ \frac{1}{(xt-1)^3} + \frac{1}{(xt+1)^3} \right]$$

$$f_0(x) = -\frac{\Gamma}{2\kappa} \left( \frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa+2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \right) + G\rho_0$$

$$\lambda = \frac{(\kappa+1)\mu h}{\kappa S_0 E_0}, \quad G = \frac{\mu}{\kappa S_0 E_0}, \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Введем вспомогательную комплексную переменную  $\zeta = \xi + i\eta$  соотношением

$$z = \alpha \zeta + \beta; \quad \alpha = l/2, \quad \beta = \alpha + 1$$

где  $l$  — длина стрингера. После такой замены ось (правого) стрингера перейдет в отрезок  $[-1, 1]$  вещественной оси  $\xi$ , а обвод отверстия в физической плоскости  $|z| = 1$  обратится в окружность радиуса  $2/l$  с центром в точке  $\zeta = 1 - 2/l$ . Уравнение (4.2) преобразуется при этом к виду

$$(4.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(\xi, \eta) v(\eta) d\eta = f(\xi)$$

$$k(\xi, \eta) = \alpha k_0(x, t), \quad v(\xi) = \tau(x), \quad f(\xi) = f_0(x)$$

$$x = \alpha \xi + \beta, \quad t = \alpha \eta + \beta$$

После нахождения решения  $\tau(x)$  уравнения (4.2) формулы (3.4) дадут решение нашей задачи.

**5. Схема вычисления.** Будем предполагать, что сингулярное уравнение (4.3) имеет решение  $v(\xi)$ , удовлетворяющее в любой закрытой части отрезка  $[-1, 1]$ , не содержащей концов  $\xi = \pm 1$ , условию Гельдера и допускающее на концах отрезка сингулярность порядка ниже единицы.

Схема приближенного решения уравнения вида (4.3) подробно изложена в ([8], § 13, 33).

Решение будем искать в виде

$$(5.1) \quad v(\xi) = (1 + \xi)^{1/2} (1 - \xi)^{-1/2} v^\circ(\xi)$$

где  $v^\circ(\xi)$  — непрерывная функция на отрезке без левого конца, аппроксимируемая полиномом Лангранжа, построенном по чебышевским узлам ( $n$  — натуральное число)

$$(5.2) \quad \xi_m = \cos \vartheta_m, \quad \vartheta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Аппроксимируемый полином, как известно, имеет вид

$$(5.3) \quad v^\circ(\xi) \cong \text{Ln}[v^\circ; \xi] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v^\circ(\xi_k) \frac{\cos n\vartheta \sin \vartheta_k}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_k} \quad (\xi = \cos \vartheta)$$

Представления (5.1) и (5.3) приводят к формуле квадратур для особого интеграла (см. [8], формула (13.13))

$$(5.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \frac{1 + \cos \vartheta}{n \sin \vartheta} \sum_{k=1}^n v^\circ(\xi_k) \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\vartheta_k \sin m\vartheta + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n v^\circ(\xi_k)$$

Для вычисления интегралов в обычном смысле, содержащихся в (4.3), будем пользоваться формулой типа Гаусса (например, [10], стр. 614)

$$(5.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n F(\cos \vartheta_k)$$

Квадратурные формулы (5.4) и (5.5) позволяют заменить уравнение (4.3) системой линейных уравнений относительно приближенных значений  $v^\circ(\xi)$  в узлах интерполяции

$$(5.6) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{mk} v_k^\circ = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Здесь

$$(5.7) \quad \alpha_{mk} = \frac{1}{2n} \left[ 1 + \text{ctg} \frac{\vartheta_m}{2} \text{ctg} \frac{\vartheta_m \mp \vartheta_k}{2} + (1 + \cos \vartheta_k) k (\cos \vartheta_m, \cos \vartheta_k) \right]$$

$$v_m^\circ = v^\circ(\cos \vartheta_m), \quad f_m = f(\cos \vartheta_m)$$

Верхний знак в (5.7) берется в случае, когда число  $|m - k|$  нечетно, а нижний — когда оно четно (нуль принимается за четное число). После того как система (5.6) будет решена, приближенное решение уравнения (4.3) определится по формулам (5.1) и (5.3).

Обратимся к вычислению физических величин. Наибольший интерес представляет, по-видимому, определение влияния стрингера на величину растягивающего напряжения  $\sigma_\vartheta$  вдоль обвода отверстия. Напомним известную формулу

$$(5.8) \quad \sigma_\vartheta + \sigma_r = 4\text{Re} \varphi'(z)$$

дающую сумму нормальных напряжений в любой точке области, занятой упругой средой. В рассматриваемом случае, когда к краю отверстия внешних сил не приложено, предельные значения правой части на  $\gamma$ , которые заведомо существуют всюду, за исключением точек  $z = \pm 1$ , и дадут напряжение  $\sigma_\Phi$  в соответствующей точке окружности.

Из первой формулы (3.4) и выражения для  $\Omega_1(z, t)$  из (3.3) находим дифференцированием

$$\varphi'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L^+} M(z, t) \tau(t) dt + \frac{\Gamma}{2} \left(1 - \frac{2}{z^2}\right)$$

$$M(z, t) = \frac{z}{t^2 - z^2} + \frac{\kappa t}{1 - z^2 t^2} + \frac{(1 - t^2)(1 + z^2 t^2)}{t(1 - z^2 t^2)^2}$$

Функция  $\varphi'(z)$ , очевидно, голоморфна всюду вне отверстия, за исключением точек линии  $L^+ + L^-$ .

Контурные напряжения  $\sigma_\Phi$  будут достигать максимума по абсолютному значению в точках  $z = \pm i$ . Можно убедиться, что функция  $\varphi'(z)$  имеет в этих точках одни и те же вещественные части, и их общее значение дается формулой

$$\operatorname{Re} \varphi'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L^+} m(t) \tau(t) dt + \frac{3}{2} \Gamma \quad \text{при } z = \pm i$$

$$m(t) = \frac{(\kappa + 1)t}{t^2 + 1} + \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2}$$

Предыдущий интеграл, ввиду непрерывности  $m(t)$ , вычисляется по формуле (5.5)

$$\frac{1}{\pi} \int_{L^+} m(t) \tau(t) dt = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 m_0(\xi) \nu(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^n (1 + \cos \vartheta_k) m_0(\cos \vartheta_k) \nu_k^\circ$$

$$m_0(\xi) = m(t) \quad (t = \alpha\xi + \beta)$$

Согласно указанной схеме, в случае простого растяжения на бесконечности:  $p_0 = 0$ ,  $P = 1$ , вычислялись максимальные контурные напряжения  $\sigma_\Phi$  в зависимости от отношения приведенных жесткостей  $m = E_0 h_0 / Eh$ . За другие параметры задачи принимались следующие значения ( $\nu$  — коэффициент Пуассона):  $\nu = 1/3$ ,  $b = 0.2$ ,  $l = 1$ .

Ниже приведены численные значения  $\sigma_0 = \max \sigma_\Phi$ , найденные по решению системы (5.6) при  $n = 40$ ,  $m = 1, 2, \dots, 9$

2.2200, 2.2649, 2.3007, 2.3292, 2.3522, 2.3710, 2.3866, 2.3998, 2.4109

Видно, что при уменьшении относительной жесткости  $m$ , максимальное напряжение  $\sigma_\Phi$  также уменьшается. Вычисления показывают, что при

дальнейшем уменьшении  $m$ , по достижении некоторого значения  $m_0$ , меньшего единицы, наступает обратная зависимость. Максимальное значение  $\sigma_0$  при  $m \rightarrow 0$  приближается к числу три.

Поступила 23 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Муки, Стернберг. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1968, М., «Мир», т. 35, № 4.
2. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
3. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
4. Arutunyan N. K., Mkhitaryan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermo-elasticity (W. Nowacki Anniversary Volume). Groningen, Wolters — Noordhoff, 1971, p. 1—20.
5. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 35, вып. 1.
7. Эрдоган, Гупта. Задача о полуплоскости с упругой накладкой. Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1971, М., «Мир», т. 37, № 4.
8. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
10. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1949.