Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

О ЛОКАЛЬНОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЖАТИИ УПРУГОГО СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО КОЛЬЦЕВОЙ ИЛИ КРУГОВОЙ ЩЕЛЬЮ

В. С. Никишин, Г. С. Шапиро

(Москва)

Рассматриваются две родственные задачи о сжатии упругого слоя локальной нагрузкой, симметрично приложенной на его поверхностях.

В одном случае слой имеет на срединной плоскости кольцевую щель с внутренним радиусом a и с внешним радиусом b. Величины a и b $(0 < a < b)$ выбираются из условия, чтобы под действием нагрузки кольцевая щель раскрылась и на окружных контурах $r = a$ и $r = b$ возникла концентрация растягивающих нормальных напряжений.

В другом случае слой имеет на срединной плоскости круговую щель радиуса b. Под действием нагрузки в круговой области радиуса a $(a < b)$ берега щели смыкаются, а в кольцевой области $a < r < b$ отходят одно от другого. Величина a неизвестна и подлежит определению из условия равенства нулю контактного давления на окружном контуре $r = a$; величина b выбирается из условия, чтобы на контуре $r = b$ возникла концентрация растягивающих нормальных напряжений.

Берега щели в том и другом случае принимаются гладкими. В ненагруженном слое щель имеет форму математического разреза.

В общем случае слой сжимается под действием произвольной локальной нагрузки, приложенной на его верхней и нижней граничных плоскостях симметрично относительно оси и срединной плоскости. В качестве примера рассмотрен частный случай сжатия слоя двумя нормальными сосредоточенными силами, направленными по оси симметрии задачи (фиг. 1).

Задачи о кольцевой и круговой щелях в бесконечном слое в иной постановке рассмотрены в работах [1–5]. В них предполагалось, что слой растягивается под действием нагрузки, приложенной непосредственно на берегах щели.

1. Построение общего решения задачи теории упругости для слоя. Рассматриваемая осесимметричная задача решается в безразмерных переменных $\rho = r / b$ и $t = z / H$ ($2H$ — толщина слоя). Начало отсчета системы координат ρ, t принято в центре кольцевой или круговой щели на срединной плоскости.

Общее решение задачи теории упругости строится с помощью функции напряжений Лява и представляется через интеграл Ханкеля [6]. Нормальное перемещение представляется формулой

$$\frac{E}{(1+\nu)\,b}\,w(\rho, t) = \int_0^\infty \Delta_w(t, \beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.1}$$

где $\Delta_w(t, \beta)$ выражается через четыре произвольные функции $A(\beta)$, $B(\beta)$, $C(\beta)$, $D(\beta)$. Аналогично представляются напряжения σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz} и радиальное перемещение u.

Пусть на верхней и нижней граничных плоскостях слоя $t = \pm 1$ касательные напряжения равны нулю

$$\tau_{rz}(\rho, t)_{t=\pm 1} = 0, \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.2}$$

а нормальные напряжения представляются в форме

$$\sigma_z(\rho, t)|_{t=\pm 1} = p_1(\rho) + p_1^*(\rho), \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.3}$$

Здесь $p_1(\rho)$ — произвольно заданная функция интенсивности нормальной нагрузки, а $p_1^*(\rho)$ — некоторая функция интенсивности малой дополнительной нагрузки, необходимость введения которой будет выяснена ниже. При симметричной внешней нагрузке (1.2), (1.3) касательные напряжения на срединной плоскости слоя, имеющей кольцевую или круговую щель с гладкими берегами, равны нулю

$$\tau_{rz}(\rho, t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.4}$$

а нормальные напряжения представляются через некоторую пока неизвестную функцию $p_0(\rho)$

$$\sigma_z(\rho, t)|_{t=0} = p_0(\rho), \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.5}$$

Представим функции $p_i(\rho)$ $(i = 0, 1)$ через интеграл Ханкеля

$$p_i(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{p}_i(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.6}$$

$$\bar{p}_i(\beta) = \int_0^\infty \rho p_i(\rho) J_0(\rho\beta)\, d\rho \qquad (i = 0, 1) \tag{1.7}$$

Функция $p_1^*(\rho)$ представляется интегралом Ханкеля специального вида

$$p_1^*(\rho) = \int_0^\infty \beta f(\beta) \Delta_w(1, \beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.8}$$

где $\Delta_w(1, \beta)$ — подынтегральная функция в представлении нормальных перемещений (1.1) при $t = 1$, а $f(\beta)$ — некоторая произвольная непрерывная функция, которая будет указана ниже.

Из условий (1.2) — (1.5) для верхней половины слоя с учетом формул (1.6) — (1.8) неизвестные функции $A(\beta)$, $B(\beta)$, $C(\beta)$, $D(\beta)$, входящие в общее решение вида (1.1), выражаются через $f(\beta)$ и трансформанты $\bar{p}_i(\beta)$ $(i = 0, 1)$.

Выпишем выражения функции $\Delta_w(t, \beta)$ при $t = 1$ и $t = 0$

$$\begin{aligned} &\Delta_w(1, \beta) = 2(1-\nu)[\Delta_{11}(\beta)\bar{p}_1(\beta) - \Delta_{10}(\beta)\bar{p}_0(\beta)] \\ &\Delta_w(0, \beta) = 2(1-\nu)[\Delta_{01}(\beta)\bar{p}_1(\beta) - \Delta_{00}(\beta)\bar{p}_0(\beta)] \\ &\Delta(\beta)\Delta_{11}(\beta) = 1 - e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda} \\ &\Delta(\beta)\Delta_{10}(\beta) = \Delta(\beta)\Delta_{01}(\beta) = 2e^{-\beta\lambda}[1 - e^{-2\beta\lambda} + \beta\lambda(1 + e^{-2\beta\lambda})] \\ &\Delta(\beta)\Delta_{00}(\beta) = \Delta(\beta)\Delta_{11}(\beta) - 2(1-\nu)f(\beta)(1 - e^{-2\beta\lambda})^2 \\ &\Delta(\beta) = (1 - e^{-2\beta\lambda})^2 - 4(\beta\lambda)^2 e^{-2\beta\lambda} - \\ &\quad - 2(1-\nu)f(\beta)(1 - e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Далее потребуются формулы для нормальных напряжений и перемещений на срединной плоскости слоя

$$(1.10)\qquad \sigma_z(\rho, t)|_{t=0} = \int_0^\infty \beta \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta$$

$$(1.11)\qquad \frac{E}{2(1-\nu^2)b} w(\rho, t)|_{t=0} = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta) \bar{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta - \int_0^\infty \Delta_{00}(\beta) \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta$$

В (1.11) требуется сходимость каждого интеграла в отдельности при произвольных $p_i(\rho)$ $(i = 0, 1)$, представимых интегралами Ханкеля. При $f(\beta) = 0$ и, следовательно, при $p_1^*(\rho) = 0$ оба интеграла (1.11) расходятся в нижнем пределе, так как при $\beta \to 0$ имеем $\Delta_{ij}(\beta) \backsim 6(\beta\lambda)^{-3}$ $(i, j = 0, 1)$ и $\bar{p}_i(0) = F / 2\pi$ $(i = 0, 1)$, где F — результирующее усилие нормальных напряжений на плоскости $t = 0$ и $t = 1$. Сходимость обоих интегралов (1.11) в нижнем пределе обеспечивает функция $f(\beta)$, введенная единственно с этой целью через дополнительную нагрузку $p_1^*(\rho)$ (1.8). Для сходимости интегралов (1.11) достаточно потребовать, чтобы $f(0) \neq 0$. Кроме того, от $f(\beta)$ требуется, чтобы функция $\Delta(\beta)$ (последнее соотношение (1.9)) не обращалась в нуль на всей полуоси $0 \leqslant \beta < \infty$, а интенсивность дополнительной нагрузки $p_1^*(\rho)$ при всяком $\rho \in [0, \infty)$ и ее результирующее усилие F^* были достаточно малыми по абсолютной величине. Всем этим требованиям удовлетворяет, например, функция (ε, k, n — положительные константы)

$$(1.12)\qquad f(\beta) = -\varepsilon (k^2 + \beta^2)^{-3/2} e^{-n\beta}$$

Все подынтегральные функции общего решения вида (1.1), выраженные описанным выше методом через $f(\beta)$ и $\bar{p}_i(\beta)$ $(i = 0, 1)$, непрерывны и ограничены на всей полуоси $0 \leqslant \beta < \infty$. Пусть модуль $\Delta_w(1, \beta)$ ограничен сверху числом $M > 0$, тогда из интегрального представления (1.8) и его обращения с учетом (1.12) находим оценки

$$|p_1^*(\rho)| < \varepsilon n^{-2} k^{-3} M \quad (0 \leqslant \rho < \infty), \qquad |F^*| < 2\pi\varepsilon k^{-3} M$$

При достаточно малом ε и больших k, n, модуль $p_1^*(\rho)$ при всех $\rho \in [0, \infty]$ и модуль F^* могут быть сделаны пренебрежимо малыми.

2. Задачи о кольцевой и круговой щели. Пусть на срединной плоскости слоя имеется разомкнутая кольцевая щель $\rho^* < \rho < 1$ $(\rho^* = a / b)$ или круговая щель $0 \leqslant \rho < 1$, разомкнутая в кольце $\rho^* < \rho < 1$. В обоих случаях краевые условия на срединной плоскости слоя $t = 0$ записываются в виде

$$(2.1)\qquad \tau_{rz}(\rho, t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty$$

$$(2.2)\qquad w(\rho, t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \rho^*, \quad 1 < \rho < \infty$$

$$(2.3)\qquad \sigma_z(\rho, t)|_{t=0} = 0, \qquad \rho^* < \rho < 1$$

Краевое условие (2.1) было учтено при построении общего решения задачи в п. 1. Подставляя формулы (1.10) и (1.11) в краевые условия (2.2) и (2.3), получим парные интегральные уравнения для неизвестной трансформанты $\bar{p}_0(\beta)$

$$\int_0^\infty \Delta_{00}(\beta)\bar{p}_0(\beta)J_0(\rho\beta)\,d\beta = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\bar{p}_1(\beta)J_0(\rho\beta)\,d\beta \qquad 0 \leqslant \rho < \rho^*, \quad \rho > 1 \tag{2.4}$$

$$\int_0^\infty \beta\bar{p}_0(\beta)J_0(\rho\beta)\,d\beta = 0, \qquad \rho^* < \rho < 1$$

Представим $\Delta_{00}(\beta)$ в форме $\Delta_{00}(\beta) = 1 + \Delta_0(\beta)$ и дадим главные члены асимптотических формул для функций $\Delta_0(\beta)$ и $\Delta_{01}(\beta)$:

при $\beta \to 0$

$$\Delta_0(\beta) \backsim -1 + k^3[2(1-\nu)\varepsilon]^{-1}, \qquad \Delta_{01}(\beta) \backsim k^3[2(1-\nu)\varepsilon]^{-1}$$

при $\beta \to \infty$

$$\Delta_0(\beta) \backsim 4(\beta\lambda)^3 e^{-2\beta\lambda}, \quad \Delta_{01}(\beta) \backsim 2\beta\lambda e^{-\beta\lambda}.$$

Парные интегральные уравнения (2.4) методом Нобла [7] и Кука [8] сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\rho^*} K_1(x,t)\varphi(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty K_2(x,t)\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\Phi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \rho^*, \quad x \geqslant 1$$

$$K_1(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\cos(t\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant \rho^* \\ \displaystyle\frac{x}{x^2-t^2} + \int_0^\infty \Delta_0(\beta)\sin(x\beta)\cos(t\beta)\,d\beta, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$K_2(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\frac{t}{t^2-x^2} + \int_0^\infty \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant \rho^* \\ \displaystyle\int_0^\infty \Delta_0(\beta)\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\bar{p}_1(\beta)\cos(x\beta)\,d\beta, & 0 \leqslant x \leqslant \rho^* \\ \displaystyle\int_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\bar{p}_1(\beta)\sin(x\beta)\,d\beta, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Основная неизвестная функция интенсивности нормальных напряжений на срединной плоскости слоя $p_0(\rho)$ и ее трансформанта Ханкеля $\bar{p}_0(\beta)$

выражаются через $\varphi(x)$ по формулам

$$
\dot p_0(\rho,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\rho^*,\lambda)}{\sqrt{\rho^{*2}-\rho^2}}-\displaystyle\int_\rho^{\rho^*}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\lambda)\frac{dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}}, & 0\leqslant\rho<\rho^*\\ 0, \quad \rho^*<\rho<1 & \\ \dfrac{\varphi(1,\lambda)}{\sqrt{\rho^2-1}}+\displaystyle\int_1^{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\lambda)\frac{dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}, & \rho>1\end{cases} \tag{2.5}
$$

$$
\bar p_0(\beta,\lambda)=\int_0^{\rho^*}\varphi(x,\lambda)\cos(x\beta)\,dx+\int_1^{\infty}\varphi(x,\lambda)\sin(x\beta)\,dx
$$

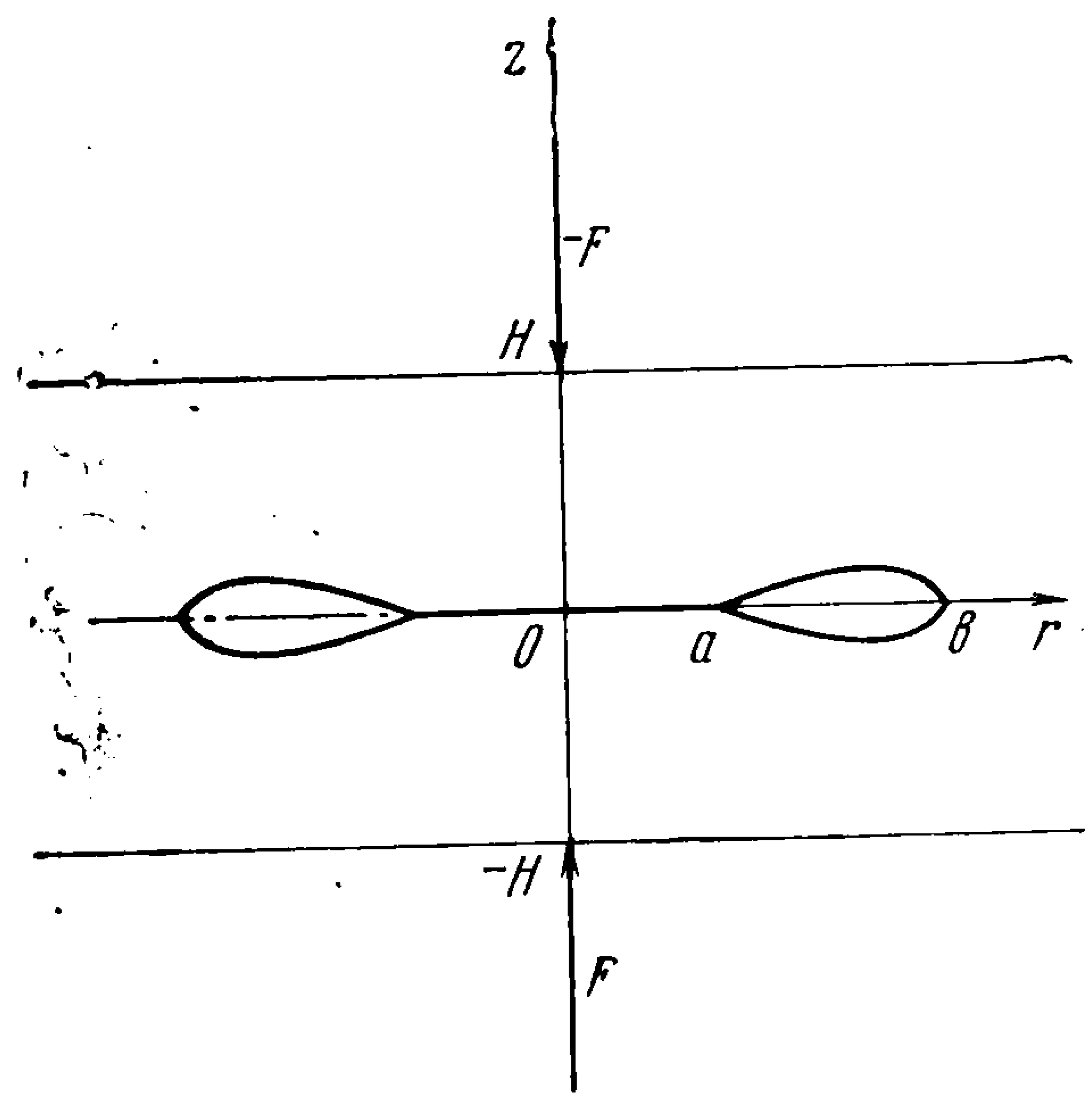
где подчеркнута очевидная зависимость этих функций от параметра $\lambda = H / b$. Все интегралы в формулах (2.5) представляют непрерывные функции.

Из первой формулы (2.5) следует, что при фиксированном $\rho^*\in(0,1)$ задаче о кольцевой щели соответствуют только те значения λ, при которых выполняются неравенства

$$
\varphi(\rho^*,\lambda)>0,\quad \varphi(1,\lambda)>0 \tag{2.6}
$$

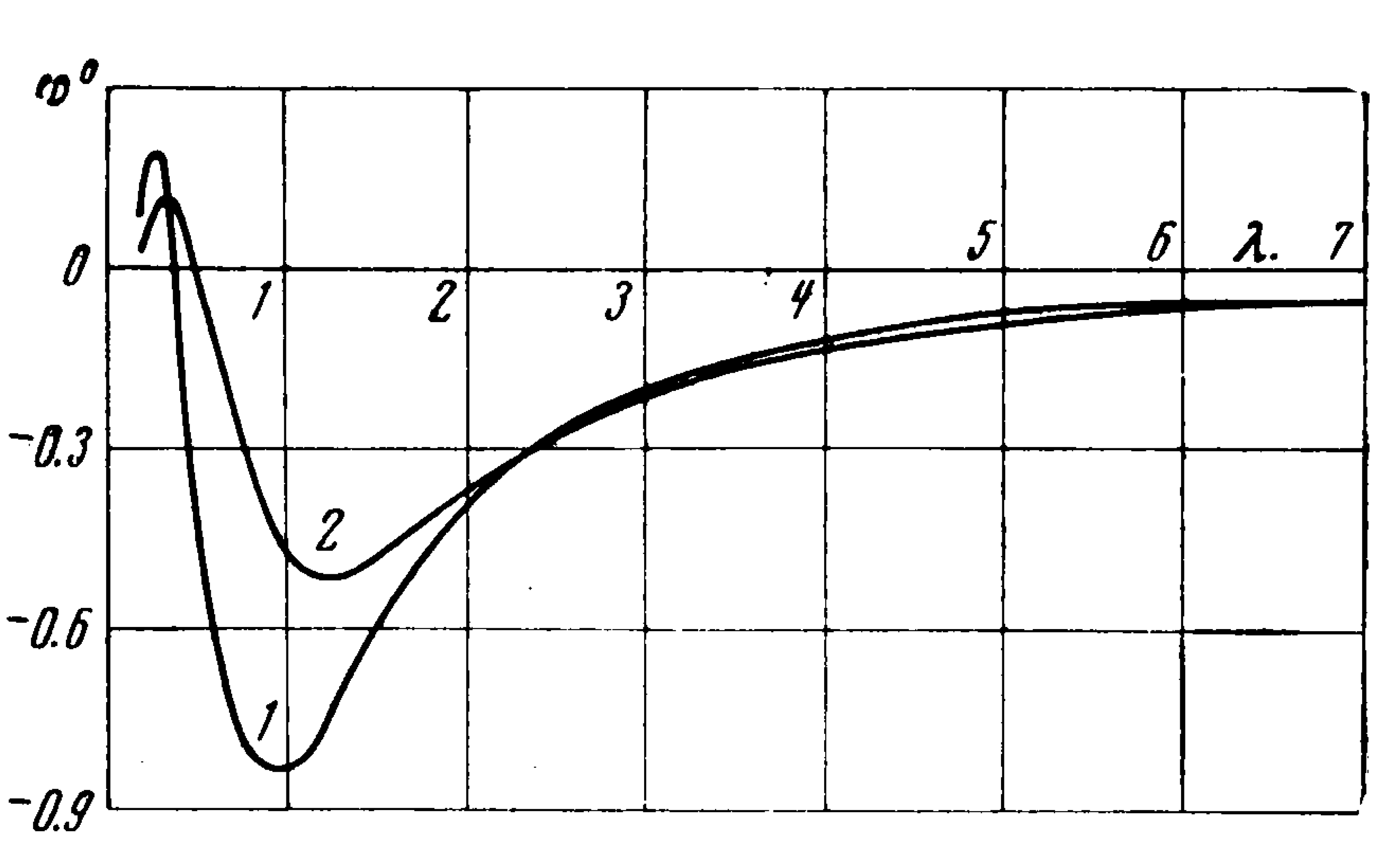
Задаче о круговой щели при фиксированном $\rho^*\in(0,1)$ соответствует единственное значение $\lambda=\lambda^*$, удовлетворяющее условиям

$$
\varphi(\rho^*,\lambda^*)=0,\quad \varphi(1,\lambda^*)>0 \tag{2.7}
$$



Фиг. 1

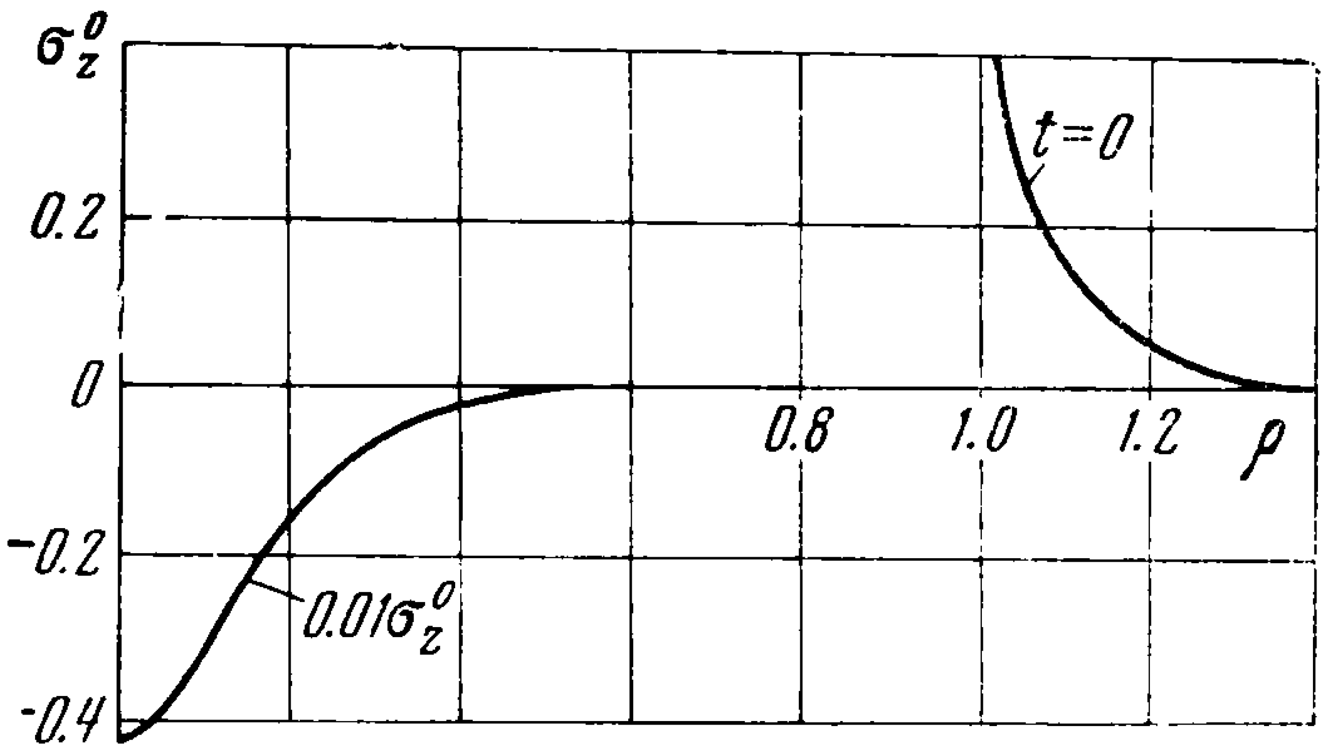
Приведем результаты численного решения задач о круговой и кольцевой щелях при сжатии слоя двумя сосредоточенными силами $-F$ и F



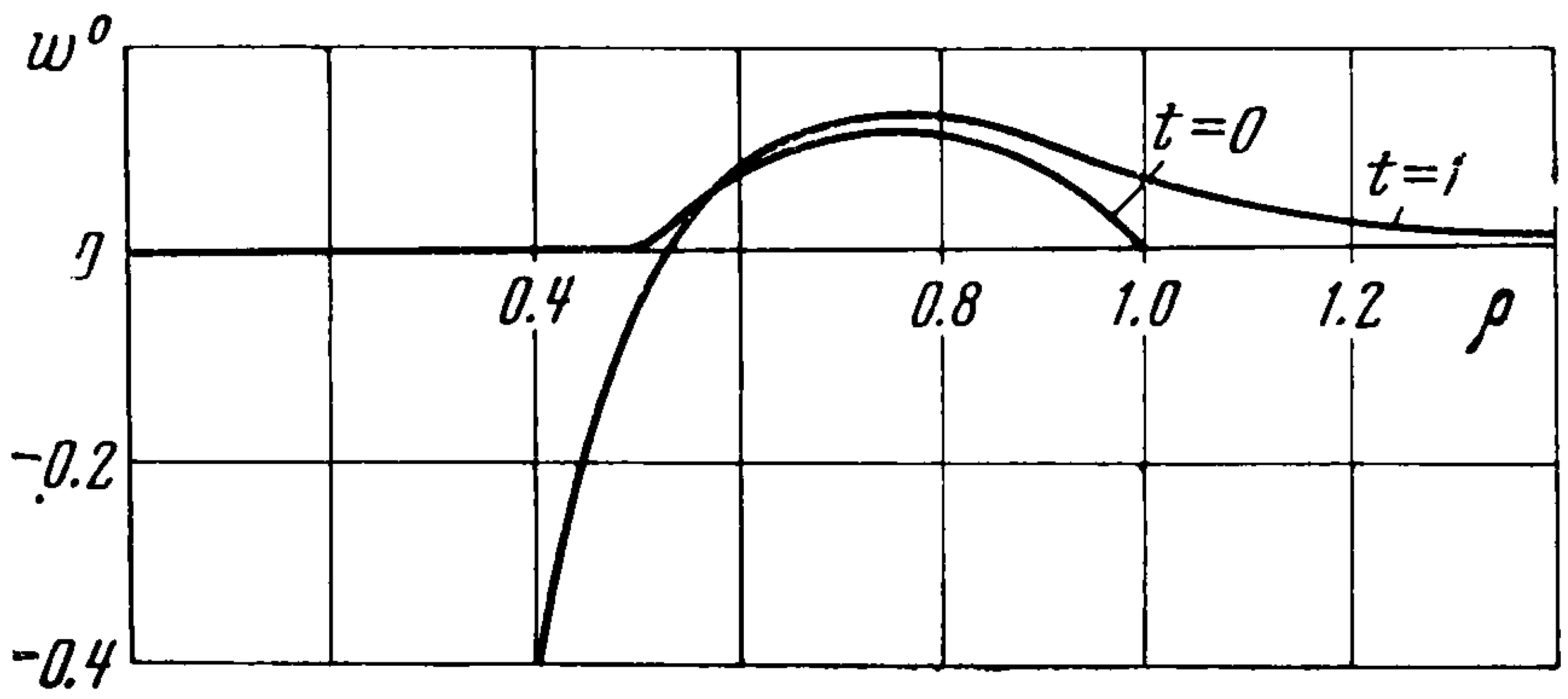
Фиг. 2

$(F>0)$ (фиг. 1). В этом случае $\bar p_1(\beta)=-F/2\pi$. Полагая $\bar p_1(\beta)=-1$, получим результаты с точностью до умножения на $F/2\pi$. Примем $\rho^*=0.5$. На фиг. 2 приведены графики функций $\varphi^\circ=(2\pi/F)\,\varphi(\rho^*,\lambda)$ и

$\varphi^\circ = (2\pi/F)\,\varphi(1, \lambda)$ (кривые *1* и *2* соответственно). Они показывают, что условия (2.6) и (2.7) выполняются при $\lambda \leqslant 0.37$. Следовательно, постановка рассматриваемых задач при $\rho^* = 0.5$ и $\lambda \leqslant 0.37$ правомерна. Корень $\lambda^* = 0.37$ функции $\varphi(\rho^*, \lambda)$ соответствует задаче о круговой щели с радиусом площадки контакта ее берегов $\rho^* = 0.5$. Для этой задачи на фиг. 3, 4 приведены графики нормальных напряжений $\sigma_z^\circ = (2\pi/F)\sigma_z$ и



Фиг. 3



Фиг. 4

перемещений $w^\circ = 2\pi E\,[(1+\nu)b\,F]^{-1}\,w$ на внешней граничной плоскости и на срединной плоскости. Модуль интенсивности дополнительной нагрузки $p_1^*(\rho)$ не превышает 0.0007.

Поступила 8 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губенко В. С.* Задачи о круговом штампе, сцепленном с полупространством, и о слое, ослабленном кольцевой щелью. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 55.
2. *Маркузон И. А.* Равновесные трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
3. *Александров В. М., Сметанин Б. И.* Равновесная трещина в слое малой толщины. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
4. *Пальцун Н. В.* Напряжения в упругом слое, ослабленном двумя круглыми щелями. Прикл. механ., 1967, т. 32, вып. 2.
5. *Кузьмин Ю. Н.* Осесимметрическая деформация упругого слоя, содержащего соосные круглые щели. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1970.
7. *Noble B.* Certain dual integral equations. J. Math. Phys., 1958, vol. 37, No. 2.
8. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 2.