

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО СЛОЯ С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ОБЕИХ ГРАНЯХ

В. Н. Закорко

(Комсомольск-на-Амуре)

Рассматривается задача о вдавливании в верхнюю грань однородного упругого слоя круглого в плане штампа. Слой покоится на жестком основании, ослабленном круглым отверстием, соосным со штампом и одного с ним радиуса. Поверхность подошвы штампа обладает осевой симметрией. Части граней слоя, находящиеся за пределами контактов, свободны от напряжений; трение или сцепление между слоем и штампом, а также между слоем и основанием отсутствует.

При помощи преобразований Ханкеля получена система двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями, решающими задачу. Эту систему удается свести к уравнениям Фредгольма второго рода. Для плоского штампа методом малого параметра получены приближенные решения уравнений.

Подобные задачи о слое, но только с иными граничными условиями, поставлены и решены, например, в [1-4]. Но, насколько известно автору, во всех таких задачах граничные условия предполагались различными лишь на одной грани слоя, и методом интегральных преобразований задача сводилась к одному интегральному уравнению. Здесь же граничные условия являются «смешанными» как на верхней, так и на нижней гранях, поэтому получается система двух уравнений.

1. Пусть λ, μ — упругие характеристики слоя $0 \leq z \leq h$, $0 \leq x^2 + y^2 < \infty$; u_r, u_z — компоненты перемещения, а σ_r, σ_z и τ_{rz} — компоненты напряжения в цилиндрической системе координат (см. фиг.) в осесимметричном случае. Радиус штампа предполагается равным единице.

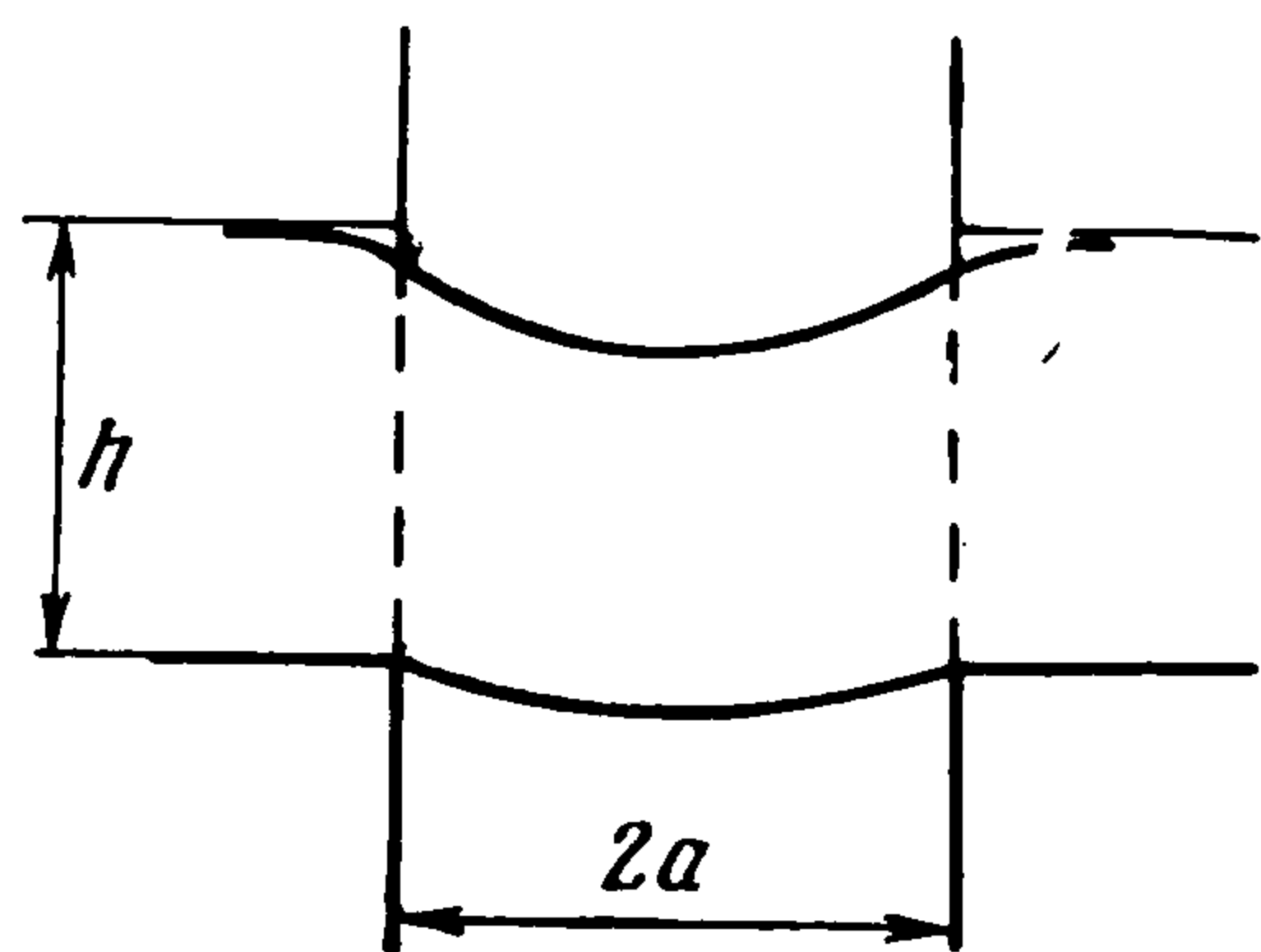
Тогда граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} u_z &= f(r), \quad \text{если } z = h \text{ и } r \leq 1 \\ \sigma_z &= 0, \quad \text{если } z = h \text{ и } r > 1 \\ u_z &= 0, \quad \text{если } z = 0 \text{ и } r \geq 1 \\ \sigma_z &= 0, \quad \text{если } z = 0 \text{ и } r < 1 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $f(r)$ — функция, определяющая подошву штампа.

Известно [5], что при наличии осевой симметрии компоненты деформации и напряжения выражаются через одну бигармоническую функцию Φ

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_r &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, & u_z &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \nabla^2 \Phi - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ \sigma_r &= \lambda \nabla^2 \Phi - 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \\ \sigma_z &= (3\lambda + 4\mu) \nabla^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \\ \tau_{rz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi - 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^2 \partial r} \end{aligned}$$



Общее решение бигармонического уравнения берем в форме трансформанты Ханкеля

$$(1.2) \quad \Phi(r, z) = \int_0^{\infty} P(\gamma, z) J_0(\gamma z) \gamma d\gamma$$

$$P(\gamma, z) = (A + Bz) e^{-\gamma z} + (C + Dz) e^{\gamma z}$$

Граничное условие $\tau_{rz} = 0$ при $z = 0$ и при $z = h$ позволяет исключить две из четырех функций

$$A = A(\gamma), \dots, D = D(\gamma)$$

После элементарных выкладок, используя последнее равенство (1.1) и (1.2), получим

$$(1.3) \quad P(\gamma, z) = A [(1 + az) \operatorname{ch} \gamma z - (1 - \gamma kz) \operatorname{sh} \gamma z] +$$

$$+ C [(1 + bz) \operatorname{ch} \gamma z + (1 - \gamma kz) \operatorname{sh} \gamma z]$$

$$k = 1 + \mu/\lambda, \quad a = \frac{k\gamma}{\Delta} (1 + \gamma kz) \operatorname{sh} \gamma h$$

$$b = \frac{k\gamma}{\Delta} (\gamma kz - 1) \operatorname{sh} \gamma h, \quad \Delta = \gamma kz \operatorname{ch} \gamma h + \operatorname{sh} \gamma h$$

Подставим теперь в правые части второго и четвертого равенств (1.1) вместо $\Phi(r, z)$ её представление (1.2), (1.3). Имеем

$$(1.4) \quad u_z(r, z) = \int_0^{\infty} \{A [-k(3 + az) \operatorname{ch} \gamma z + (2a + k\gamma + k^2\gamma^2 z) \operatorname{sh} \gamma z] +$$

$$+ C [-k(3 + bz) \operatorname{ch} \gamma z + (2b - k\gamma + k^2\gamma^2 z) \operatorname{sh} \gamma z]\} J_0(\gamma r) \gamma^2 d\gamma$$

$$\sigma_z(r, z) = 2\lambda \int_0^{\infty} \{A [k\gamma + (k - 1)a + k^2\gamma^2 z) \operatorname{ch} \gamma z - k\gamma(k - az) \operatorname{sh} \gamma z] +$$

$$+ C [(-k\gamma + (k - 1)b + k^2\gamma^2 z) \operatorname{ch} \gamma z - k\gamma(k + bz) \operatorname{sh} \gamma z]\} J_0(\gamma r) \gamma^3 d\gamma$$

Имея в виду равенство [6]

$$(1.5) \quad \int_0^{\infty} \sin(\gamma t) J_0(\gamma r) d\gamma = \begin{cases} 0, & r > t \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \end{cases}$$

представим $u_z(r, 0)$ в виде интеграла, содержащего новую неизвестную функцию $\varphi(t)$

$$(1.6) \quad u_z(r, 0) = \int_0^1 \varphi(t) dt \int_0^{\infty} \sin(\gamma t) J_0(\gamma r) d\gamma$$

В этом случае в силу (1.5) граничное условие $u_z(r, 0) = 0$ при $r > 1$ автоматически выполнено.

Если же $r < 1$, то

$$u_z(r, 0) = \int_r^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt$$

Чтобы осадка под штампом была ограниченной, придется предположить $\varphi(0) = 0$ и удовлетворить этому условию в дальнейшем.

Если еще предположить, что $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то

$$(1.7) \quad u_z(r, 0) = \varphi(1) \ln(1 + \sqrt{1 - r^2}) - \int_r^1 \varphi'(t) \ln(t + \sqrt{t^2 - r^2}) dt$$

Изменяя в интеграле (1.6) порядок интегрирования и полагая в первом равенстве (1.4) $z = 0$, придем к уравнению

$$(1.8) \quad -3k\gamma^3(A + C) = \int_0^1 \varphi(t) \sin(\gamma t) dt$$

Точно так же, чтобы удовлетворить граничному условию $\sigma_z(r, h) = 0$ при $r > 1$, положим

$$(1.9) \quad \frac{1}{2\lambda} \sigma_z(r, h) = \int_0^1 \psi(t) dt \int_0^\infty \cos(\gamma t) \gamma J_0(\gamma r) d\gamma$$

где $\psi(t)$ — новая неизвестная функция, причем будем предполагать, что и она непрерывно дифференцируема. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda} \sigma_z(r, h) &= \int_0^\infty J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \int_0^1 \psi(t) \cos(\gamma t) dt = \\ &= \psi(1) \int_0^\infty J_0(\gamma r) \sin t dt - \int_0^1 \psi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\gamma r) \sin(\gamma t) d\gamma \end{aligned}$$

В силу (1.5) граничное условие $\sigma_z(r, h) = 0$ при $r > 1$ автоматически выполнено

Если же $r < 1$, то

$$(1.10) \quad \frac{1}{2\lambda} \sigma_z(r, h) = \frac{\psi(1)}{\sqrt{1 - r^2}} - \int_r^1 \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt$$

Положим во второй формуле (1.4) $z = h$, а в правые части равенства (1.8) изменим порядок интегрирования. Тогда получим

$$(1.11) \quad \begin{aligned} &\gamma^3 \{[(k - 1)a + k\gamma + \gamma^2 k^2 h] \operatorname{ch}(\gamma h) - \gamma h(k + ah) \operatorname{sh}(\gamma h)\} A + \\ &+ \gamma^3 \{[(k - 1)b - k\gamma + \gamma^2 k^2 h] \operatorname{ch}(\gamma h) - \gamma h(k + bh) \operatorname{sh}(\gamma h)\} C = \\ &= \int_0^1 \psi(t) \sin(\gamma t) dt \end{aligned}$$

Разрешим теперь систему (1.8), (1.11) относительно A и C , найденные значения подставим в правые части равенств (1.4), положим в них соответственно $z = h$ и $z = 0$ и потребуем выполнения граничных условий: $\sigma_z(0, r) = 0$, $u_z(h, r) = f(r)$ при $r < 1$.

Получим тогда систему интегральных уравнений относительно неизвестных $\varphi(t)$ и $\psi(t)$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} [\delta_{11}(\gamma) \Phi(\gamma) + \delta_{12}(\gamma) \Psi(\gamma)] J_0(\gamma r) d\gamma &= 0 \\ \int_0^{\infty} [\delta_{21}(\gamma) \Phi(\gamma) + \delta_{22}(\gamma) \Psi(\gamma)] J_0(\gamma r) d\gamma &= f(r) \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Phi(\gamma) &= \int_0^1 \varphi(t) \sin(\gamma t) dt = -\varphi(1) \frac{\cos \gamma}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \varphi'(t) \cos(\gamma t) dt \\ \Psi(\gamma) &= \int_0^1 \psi(t) \cos(\gamma t) dt = \psi(1) \frac{\sin \gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \psi'(t) \sin(\gamma t) dt \\ \delta_{11}(\gamma) &= -\frac{k\gamma}{3\Delta_0} (\text{sh}^2 \gamma h - \gamma^2 h^2), \quad \delta_{12}(\gamma) = \frac{\gamma}{\Delta_0} (\gamma h \text{ch} \gamma h + \text{sh} \gamma h) \\ \delta_{21}(\gamma) &= \frac{1}{\Delta_0} (\gamma h \text{ch} \gamma h + \text{sh} \gamma h), \quad \delta_{22}(\gamma) = -\frac{1}{k\Delta_0} \text{sh}^2 \gamma h \\ \Delta_0 &= \text{sh}(\gamma h) \text{ch}(\gamma h) + \gamma h, \quad k = 1 + \mu/\lambda \end{aligned}$$

Можно получить следующие асимптотические формулы для $\delta_{ij}(\gamma)$ ($i, j = 1, 2$) при $\gamma h \rightarrow +\infty$:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \delta_{11}(\gamma) &\sim -\frac{k}{3} \gamma - \frac{4k}{3} \gamma^3 h^2 e^{-2\gamma h}, \quad \delta_{12}(\gamma) \sim 2\gamma^2 e^{-\gamma h} \\ \delta_{21}(\gamma) &\sim 2\gamma h e^{-\gamma h}, \quad \delta_{22}(\gamma) \sim \frac{-1}{k} + \frac{4\gamma h}{k} e^{-2\gamma h} \end{aligned}$$

С учетом этих формул можно показать, что интегралы в левых частях системы (1.12) сходятся для любого $r > 0$

Очевидно, задача сводится к решению системы (1.12). В частности, если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ найдены, напряжение на контакте штампа определяем по формуле (1.10), а перемещение слоя над отверстием — по формуле (1.7).

Напряжения и перемещения внутри слоя определяются равенствами (1.4), в которых функции $A(\gamma)$ и $C(\gamma)$ нетрудно выразить через φ и ψ . Конечно, получение численных результатов может оказаться делом трудоемким.

2. Обратимся к системе (1.2). Если в (1.12) вместо $\Phi(\gamma)$ и $\Psi(\gamma)$ подставить их интегральные представления (1.13) и изменить порядок интегрирования (законность этой операции можно обосновать), то эту систему можно представить в следующей форме:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{k}{3} \int_0^r \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt &= \varphi(1) K_{11}(r, 1) + \psi(1) K_{12}(r, 1) - \\ &- \int_0^1 [\varphi'(t) K_{11}(r, t) + \psi'(t) K_{12}(r, t)] dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k} \int_0^r \frac{t \psi'(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \varphi(1) K_{21}(r, 1) + \psi(1) K_{22}(r, 1) -$$

$$- \int_0^1 [\varphi'(t) K_{21}(r, t) + \psi'(t) K_{22}(r, t)] dt = f'(r)$$

Здесь

$$K_{11}(r, t) = \int_0^\infty P_{11}(\gamma) \cos(\gamma t) J_0(\gamma r) d\gamma, \quad P_{11}(\gamma) = -\frac{\delta_{11}}{\gamma} - \frac{k}{3}$$

$$K_{12}(r, t) = \int_0^\infty P_{12}(\gamma) \sin(\gamma t) J_0(\gamma r) d\gamma, \quad P_{12}(\gamma) = \frac{\delta_{12}}{\gamma}$$

$$K_{21}(r, t) = \int_0^\infty P_{21}(\gamma) \cos(\gamma t) J_1(\gamma r) d\gamma, \quad P_{21}(\gamma) = \delta_{21}$$

$$K_{22}(r, t) = \int_0^\infty P_{22}(\gamma) \sin(\gamma t) J_1(\gamma r) d\gamma, \quad P_{22}(\gamma) = -\delta_{22} - \frac{1}{k}$$

В процессе преобразований второе уравнение системы (1.12) было продифференцировано по r , поэтому в правой части равенства в системе (2.1) появилась функция $f'(r)$.

Особенности, которые несли в себе ядра уравнений в системе (1.12), здесь уже явно выделены, и они находятся в левых частях уравнений (2.1). В правых же частях ядра $K_{ij}(r, t)$ ($i, j = 1, 2$) — непрерывные функции в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Действительно, из (1.14) следует, что $P_{ij}(\gamma)$ при $\gamma h \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю, по крайней мере, как $\gamma h e^{-\gamma h}$, а отсюда можно вывести заключение о непрерывности ядер.

Для операторов в левых частях системы (2.1) известны обратные: если считать правые части уравнений (2.1) временно известными и положить $t = r \sin \theta$, получим уравнения Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} F(r \sin \theta) d\theta = g(r)$$

непрерывные решения которого [1]

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[g(0) + x \int_0^{\pi/2} g'(x \sin \theta) d\theta \right]$$

Так как на самом деле правые части (2.1) неизвестны, эта формула порождает новые интегральные уравнения. Опуская хотя и громоздкие, но элементарные преобразования, приведем результаты (для случая плоского штампа: $f'(r) = 0$)

$$(2.2) \quad \varphi'(x) = A\Pi_{11}(1, x) + B\Pi_{12}(1, x) -$$

$$- \int_0^1 [\varphi'(t) \Pi_{11}(t, x) + \psi'(t) \Pi_{12}(t, x)] dt$$

$$\psi'(t) = A\Pi_{21}(1, x) + B\Pi_{22}(1, x) - \int_0^1 [\varphi'(t)\Pi_{21}(t, x) + \psi'(t)\Pi_{22}(t, x)] dt$$

Здесь

$$(2.3) \quad A = \varphi(1), \quad B = \psi(1)$$

$$(2.4) \quad \Pi_{11}(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{3}{k} P_{11}(\gamma) \cos(\gamma t) \cos(\gamma x) d\gamma$$

$$\Pi_{12}(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{3}{k} P_{12}(\gamma) \sin(\gamma t) \cos(\gamma x) d\gamma$$

$$\Pi_{21}(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k P_{21}(\gamma) \cos(\gamma t) \sin(\gamma x) d\gamma$$

$$\Pi_{22}(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k P_{22}(\gamma) \sin(\gamma t) \sin(\gamma x) d\gamma$$

Ядра $\Pi_{ij}(t, x)$, как и ядра K_{ij} , непрерывны в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, поэтому уравнения (2.2) фредгольмовы.

Две произвольные постоянные A и B , входящие в систему (2.2), определяются следующим образом. Решение системы (2.2) найдем в форме

$$\varphi'(t) = A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t), \quad \psi'(t) = A\psi_1(t) + B\psi_2(t)$$

Чтобы удовлетворить наложенному ранее условию $\varphi(0) = 0$, придется положить

$$\varphi(x) = A \int_0^x \varphi_1(t) dt + B \int_0^x \varphi_2(t) dt$$

(далее C — постоянная интегрирования)

$$\psi(x) = A \int_0^x \psi_1(t) dt + B \int_0^x \psi_2(t) dt + C$$

Условия (2.3) приводят к системе двух уравнений относительно A, B, C . Из этой системы определяем A и B с точностью до множителя C : $A = CA_0$, $B = CB_0$. Следовательно

$$\psi(x) = C \left[A_0 \int_0^x \psi_1(x) dx + B_0 \int_0^x \psi_2(x) dx \right] = C\psi_0(x)$$

Чтобы, наконец, определить C , вычислим силу давления на штамп и приравняем ее внешней силе P . Согласно (1.10) имеем

$$P = \iint_{(0 \leq x^2 + y^2 \leq 1)} \sigma_z dx dy = 4\pi\lambda \int_0^1 r \left[\frac{\psi(1)}{\sqrt{1-r^2}} - \int_r^1 \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t^2-r^2}} dt \right] dr =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi\lambda \left[\psi(1) - \int_0^1 \psi'(t) dt \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] = 4\pi\lambda \int_0^1 \psi(t) dt = \\
&= 4\pi\lambda C \int_0^1 \psi_0(t) dt
\end{aligned}$$

3. Уравнения (2.2) можно решать разными приближенными методами. Вероятно, самый простой из них — метод малого параметра. Если положить $\gamma h = u$ и затем $h^{-1} = p$ (таким образом, p — отношение радиуса штампа к толщине слоя), то ядра $\Pi_{ij}(x, t)$ нетрудно разложить в ряды по степеням p .

Например

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad \Pi_{11}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{3}{k} P_{11}(\gamma) p \cos(ptu) \cos(pxu) du = \\
&= \frac{3}{\pi k} \int_0^\infty P_{11}(\gamma) p [\cos p(x+t)u + \cos p(x-t)u] du = \\
&= pa_1 + p^3a_3 + p^5a_5 + \dots + p^{2n+1}a_{2n+1} + \dots \\
a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{6}{\pi k} M_{2n}(x, t) \int_0^\infty P_{11}(u) u^{2n} du \\
M_{2n}(x, t) &= \frac{1}{2} [(t+x)^{2n} + (t-x)^{2n}]
\end{aligned}$$

Если $|p| < 1$, сходимость ряда (3.1) можно доказать при помощи соотношений

$$\begin{aligned}
|P_{11}(u)| &< Mu^2 e^{-2u} \quad (M = \text{const}), \quad |M_{2n}(x, t)| < 2^{2n-1} + 1 \\
\int_0^\infty u^{2n+2} e^{-2u} du &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Аналогичное разложение в области $|p| < 1$ получается для ядра $\Pi_{22}(x, t)$.

Для ядер $\Pi_{12}(x, t)$ и $\Pi_{21}(x, t)$ подобные разложения справедливы лишь в области $|p| < 1/2$. Это связано с тем, что функции $P_{12}(\gamma)$ и $P_{21}(\gamma)$ имеют иную асимптотику, чем функции $P_{11}(\gamma)$ и $P_{22}(\gamma)$ при бесконечно большом $u = \gamma h$.

Вычисление интегралов

$$\int_0^\infty P_{ij} u^m du \equiv f_{ij}(m)$$

для первых трех значений показателя m осуществлялось на ЭКВМ «Искра-11». Область интегрирования была разбита на две части: $[0, 6]$ и $[6, \infty)$. Интеграл по конечной части вычислялся по формуле Симпсона с 48-ю узлами, на бесконечной части функции P_{ij} аппроксимировались более простыми функциями, первообразные которых элементарны. Аппроксима-

ция осуществлялась каждый раз так, чтобы интегралы были вычислены с точностью 0.001.

Результаты вычислений ($f_{21}(m) = f_{12}(m)$)

	$m = 0$	$m = 2$	$m = 4$
$f_{11}(m)$	1.944	4.247	29.219
$f_{22}(m)$	1.168	1.582	8.238
	$m = 0$	$m = 1$	$m = 3$
$f_{12}(m)$	2.892	5.169	58.344

В соответствии с этим имеем (для $\lambda = \mu$)

$$\Pi_{11}(t, x) = -1.237 p + 1.352 (x^2 + t^2)p^3 - 0.775 (x^4 + 6x^2t^2 + t^4) p^5 + \dots$$

$$\Pi_{12}(t, x) = 4.929 p^2 - 9.273 (t^3 - 3tx^2)p^4 + \dots$$

$$\Pi_{21}(t, x) = 6.572 p^2 - 12.364 (x^3 + 3x^2t) p^4 + \dots$$

$$\Pi_{22}(t, x) = -0.5032 xtp^3 + 0.218 (4t^2x + 4tx^2) p^5 - \dots$$

Для сходимости итерационного процесса, очевидно, достаточно, чтобы

$$\alpha \equiv \max (\| \Pi_{11} \| + \| \Pi_{21} \|, \| \Pi_{12} \| + \| \Pi_{22} \|) < 1$$

$$(\| \Pi_{ij} \| = \max | \Pi_{ij}(x, t) |)$$

$$(t, x) \in [0.1] \times [0.1]$$

Используя значения интегралов $f_{ij}(m)$, можно показать, что $\alpha < 1$, если $|p| < 0.3$. При этом условии последовательные приближения сходятся равномерно в области $|p| < 0.3$, а так как эти приближения в указанной области — аналитические функции p , то и решение в силу известной теоремы Вейерштрасса будет аналитическим относительно p . Поэтому в случае $|p| < 0.3$ решение задачи можно сразу искать в виде ряда по степеням p .

Таким образом получены несколько первых членов разложений искомых функций

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = & A [-1.238 p - 1.532 p^2 + (1.352 x^2 - 0.545) p^3 + \\ & + (1.674 x^2 - 10.343) p^4 - \dots] + \\ & + B [4.929 p^2 + 6.101 p^3 - (27.819 x^2 + 1.722) p^4 - \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'(x) = & A [4.929 p^2 + 6.101 p^3 - (27.819 x^2 + 1.722) p^4 - \dots] + \\ & + B [1.058 xp^2 - 32.392 xp^3 + (0.873 x^3 - 19.222 x) p^4 + \dots] \end{aligned}$$

Поступила 28 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
2. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Александров В. М., Бабешко В. А., Кучеров В. А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. И. Таблица интегралов, сумм, рядов и производений. М., Физматгиз, 1967.