Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА С ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ УЗКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Н. М. Бородачев, Л. А. Галин

(Киев, Москва)

Рассматривается задача о вдавливании в упругое изотропное полупространство штампа с основанием в виде узкого прямоугольника при действии вертикальной силы.

Эта задача изучалась в работах [1, 2]. В работе [1] установлены асимптотические свойства полученного интегрального уравнения, которое в пределе, при уменьшении ширины балки, превращается в сингулярный интеграл, что позволяет обосновать известную гипотезу Циммермана — Винклера. В работе [2] было дано приближенное решение интегрального уравнения, содержащегося в [1]. Краткий обзор работ, посвященных задаче о вдавливании прямоугольного в плане штампа, содержится в [2,3].

Ниже предлагается более совершенный метод решения данной проблемы.

1. Рассмотрим штамп, имеющий в плане форму узкого прямоугольника длиной $2a$ и шириной 2δ, причем $\varepsilon = \delta / a \ll 1$. Пусть этот штамп вдавливается под действием вертикальной силы P в упругое изотропное полупространство $z \geqslant 0$. Сила P проходит через центр тяжести штампа и направлена вдоль оси z.

Применяя к уравнениям равновесия Ламе в прямоугольных координатах xyz двумерное интегральное преобразование Фурье, находим

$$w(x, y, 0) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} \sigma_z^{**}(\alpha, \beta, 0)\, e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta \tag{1.1}$$

Здесь E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала упругого полупространства, w — проекция вектора перемещения на ось z, σ_z^{**} — двумерная трансформанта Фурье нормального напряжения σ_z. Формула (1.1) справедлива при условии, что касательные напряжения на границе полупространства (при $z = 0$) отсутствуют. Эта формула устанавливает связь вертикальных перемещений границы полупространства с нормальными напряжениями на границе.

Положим

$$p(x, y) = -\sigma_z(x, y, 0) \tag{1.2}$$

Вернемся к задаче о штампе. Положим, что трение между штампом и полупространством не возникает, а нагрузка на полупространство вне штампа отсутствует. Для упрощения задачи примем также, что основание штампа плоское.

В соответствии с предложением работы [1], полагаем ($p(x)$ — давление на единицу длины штампа)

$$p(x, y) = \frac{p(x)}{\pi\sqrt{\delta^2 - y^2}} \qquad (|x| < a,\ |y| < \delta) \tag{1.3}$$

Найдем двумерную трансформанту Фурье функции $p(x, y)$. Имеем

$$p^{**}(\alpha, \beta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, dx\, dy.$$

Подставляя сюда выражение для $p(x, y)$ из (1.3) и выполняя интегрирование, находим

$$p^{**}(\alpha, \beta)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} J_0(\delta\beta)\, p^*(\alpha). \tag{1.4}$$

где $J_n(x)$ — бесселева функция первого рода, $p^*(\alpha)$ — одномерная трансформанта Фурье функции $p(x)$. Используя (1.1), (1.2), (1.4), имеем

$$w(x)=\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} p^*(\alpha)\, A(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$A(\alpha)=\int_0^{\infty}(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2} J_0(\delta\beta)\, d\beta, \quad w(x)\equiv w(x, 0, 0)$$

Известно [4], что $A(\alpha)=I_0(^1/_2\delta|\alpha|)K_0(^1/_2\delta|\alpha|)$, где $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода.

В рассматриваемом случае $w(x)$ и $p(x)$ — четные функции. Поэтому получаем

$$p(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty} p^*(\alpha)\cos x\alpha\, d\alpha. \tag{1.5}$$

$$w(x)=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty} p^*(\alpha)\, I_0(^1/_2\delta\alpha)\, K_0(^1/_2\delta\alpha)\cos x\alpha\, d\alpha$$

2. Учитывая, что

$$w(x)=c \quad \text{при } |x|<a, \qquad p(x)=0 \quad \text{при } |x|>a$$

и используя соотношения (1.5), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^{\infty} F(\xi)\, I_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right) K_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right)\cos t\xi\, d\xi=b, \quad 0\leqslant t<1 \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\infty} F(\xi)\cos t\xi\, d\xi=0, \quad 1<t<\infty$$

$$F(\xi)=p^*\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad b=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\frac{Eac}{1-\nu^2}, \quad \varepsilon=\frac{\delta}{a}, \quad t=\frac{x}{a}, \quad \xi=a\alpha \tag{2.2}$$

Здесь c — величина, на которую штамп вдавливается в упругое полупространство под действием силы P.

Решение уравнений (2.1) ищем в виде

$$F(\xi)=b\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_{2n} J_{2n}(\xi) \tag{2.3}$$

Известно [4], что ($T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода)

$$(2.4)\qquad \int_0^\infty J_{2n}(\xi)\cos t\xi\, d\xi = (-1)^n \frac{T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \times \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t<\infty \end{cases}$$

Подставляя (2.3) во второе уравнение (2.1) и учитывая (2.4) убеждаемся, что второе уравнение (2.1) удовлетворяется. Подставляя затем (2.3) в первое уравнение (2.1), получаем

$$(2.5)\qquad \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_{2n} \int_0^\infty J_{2n}(\xi)\, I_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right) K_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right)\cos t\xi\, d\xi = 1, \quad 0\leqslant t<1$$

Далее имеем

$$(2.6)\qquad \cos t\xi = J_0(\xi) + 2\sum_{m=1}^\infty (-1)^m T_{2m}(t)\, J_{2m}(\xi), \quad 0<t<1$$

Подставляя (2.6) в (2.5), приходим к соотношению

$$(2.7)\qquad \sum_{n=0}^\infty A_{2n}C_{0n} + 2\sum_{n=0}^\infty A_{2n} \sum_{m=1}^\infty (-1)^m C_{mn} T_{2m}(t) = 1, \quad 0<t<1$$

Здесь

$$(2.8)\qquad C_{mn} = (-1)^n \int_0^\infty J_{2m}(\xi)\, J_{2n}(\xi)\, I_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right) K_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon\xi\right) d\xi$$

$$m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Необходимо и правую часть в (2.7) разложить по полиномам Чебышева. Имеем

$$(2.9)\qquad 1 = b_0 T_0(t) + \sum_{m=1}^\infty b_2 T_{2m}(t)$$

$$b_0 = 1, \quad b_{2m} = 0 \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad T_0(t) = 1$$

Сравнивая в (2.7) и (2.9) коэффициенты разложения, получаем (δ_{mn} — символ Кронекера)

$$(2.10)\qquad \sum_{n=0}^\infty C_{mn}A_{2n} = \delta_{m0}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Система (2.10) является бесконечной системой линейных уравнений для коэффициентов разложения A_{2n}. В общем случае решение системы (2.10) можно выполнить лишь приближенно, обрывая ее на $m = n = N$ и вычисляя из полученной конечной системы первые $N + 1$ коэффициентов A_{2n}.

3. Теперь можно получить формулу для $p(x)$. На основании (1.5), (2.2) и (2.3) имеем

$$p(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{b}{a} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_{2n} \int_0^\infty J_{2n}(\xi)\cos\left(\frac{x\xi}{a}\right) d\xi$$

Учитывая (2.2) и (2.4), окончательно получаем

$$p(x)=\frac{\pi Ec}{2(1-\nu^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right)\times\begin{cases}1 & \text{при } |x|<a\\ 0 & \text{при } |x|>a\end{cases}\tag{3.1}$$

Сила, действующая на штамп

$$P=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\delta}^{\delta}p(x,y)\,dy$$

Подставляя сюда выражение для $p(x, y)$ из (1.3), учитывая (3.1) и выполняя интегрирование, находим

$$c=\gamma\,\frac{(1-\nu^2)P}{Ea},\qquad \gamma=\frac{2}{\pi^2A_0}\tag{3.2}$$

По формуле (3.2) можно определить глубину вдавливания штампа. На основании (3.1) и (3.2) имеем

$$p(x)=\frac{P}{\pi a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{2n}}{A_0}T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right),\quad |x|<a\tag{3.3}$$

Таким образом, величина c и функция $p(x)$ определяются формулами (3.2), (3.3). В эти формулы входят коэффициенты A_{2n} ($n=0, 1, \ldots$), которые можно найти из системы уравнений (2.10).

Система (2.10) может быть представлена и в таком виде:

$$A_{2m}=\delta_{m0}-\sum_{n=0}^{\infty}(C_{mn}-\delta_{mn})A_{2n}$$

Эту систему можно решить и методом итераций, полагая

$$A_{2m}^{(r+1)}=\delta_{m0}-\sum_{n=0}^{\infty}(C_{mn}-\delta_{mn})A_{2n}^{(r)}\tag{3.4}$$

где $A_{2m}^{(r)}$ — r-е приближение. Некоторая модификация формулы (3.4), которая имеет определенные преимущества, дается соотношением

$$A_{2m}^{(r+1)}=\frac{1}{C_{mm}}\left[\delta_{m0}-\sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta_{mn})C_{mn}A_{2n}^{(r)}\right]$$

4. Формулу (2.8) для коэффициентов C_{mn} приведем к виду, более удобному при выполнении вычислений. Известно [5], что

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)\,d\theta\tag{4.1}$$

$$J_m(z)J_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}J_{m+n}(2z\cos\theta)\cos[(m-n)\theta]\,d\theta,\quad \operatorname{Re}(m+n)>-1$$

Первую из формул (4.1) после некоторых преобразований можно записать так:

$$J_{2n}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos 2n\theta\cos(z\sin\theta)\,d\theta\tag{4.2}$$

Учитывая (4.1) и (4.2), находим

$$J_{2m}(\xi)\,J_{2n}(\xi)=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\left[2(m-n)\varphi\right]d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\left[2(m+n)\theta\right]\cos\left[2\xi\cos\varphi\sin\theta\right]d\theta$$

Подставляя это выражение в (2.8) и выполняя интегрирование по ξ, окончательно получаем ($\mathbf{K}\,(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода)

$$C_{mn}=\frac{4}{\pi^2}(-1)^n\int\limits_0^{\pi/2}\cos\left[2(m-n)\varphi\right]d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos\left[2(m+n)\theta\right]}{g(\varphi,\theta;\varepsilon)}\,\mathbf{K}\left[\frac{\varepsilon}{g(\varphi,\theta;\varepsilon)}\right]d\theta \tag{4.3}$$

$$g(\varphi,\theta;\varepsilon)=(4\cos^2\varphi\sin^2\theta+\varepsilon^2)^{1/2},\qquad m,n=0,1,2,\ldots$$

Коэффициенты C_{mn} теперь можно вычислить с помощью ЭВМ, заменяя интегралы, входящие в (4.3), по одной из квадратурных формул.

Бесконечную систему уравнений (2.10) приближенно заменяем конечной системой из 11 уравнений с 11 неизвестными. Эта конечная система решалась несколько раз применительно к разным значениям параметра ε. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

	ε				
	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20
A_0	0.13279	0.16117	0.19403	0.21982	0.24252
$A_2\cdot 10$	—0.68209	—0.73630	—0.72402	—0.70868	—0.68526
$A_4\cdot 10^2$	—1.3115	0.083613	—0.84254	—0.50500	—0.20875
$A_6\cdot 10^2$	—0.43721	—0.45794	—0.0035444	0.18313	0.28892
$A_8\cdot 10^3$	—0.86645	—4.2548	1.4015	1.8660	1.7295
$A_{10}\cdot 10^3$	—8.1259	0.97589	1.1747	0.91164	0.49437
$A_{12}\cdot 10^3$	1.0691	0.33955	0.65397	0.24670	—0.0085908
$A_{14}\cdot 10^4$	2.7912	1.0673	2.5336	—0.18771	—0.82858
$A_{16}\cdot 10^4$	2.5506	4.3947	0.41799	—0.61749	—0.39833
$A_{18}\cdot 10^4$	2.5964	2.3446	—0.34982	—0.36215	—0.11618
$A_{20}\cdot 10^4$	1.6284	1.0846	—0.30902	—0.11260	—0.027086

Таблица 2

x/a	ε				
	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20
0.00	0.481	0.496	0.474	0.475	0.474
0.10	0.471	0.497	0.474	0.475	0.474
0.20	0.450	0.497	0.473	0.475	0.474
0.30	0.440	0.493	0·474	0.475	0.476
0.40	0.474	0.481	0.476	0.475	0.471
0.50	0.483	0.473	0.478	0.475	0.470
0.60	0.502	0.439	0.478	0.474	0.468
0.70	0.490	0.431	0.481	0.473	0.464
0.80	0.479	0.456	0.485	0.470	0.457
0.85	0.497	0.481	0.484	0.466	0.456
0.90	0.553	0.522	0.488	0.477	0.475
0.95	0.632	0.588	0.524	0.539	0.562
0.975	0.712	0.703	0.650	0.697	0.747
0.99	0.874	0.986	0.963	1.061	1.152

Зная коэффициенты A_{2n}, нетрудно найти величины c и $p(x)$.

Ниже приведены значения коэффициента γ (формула (3.2)) для некоторых ε

$\varepsilon = 0.02$	0.05	0.10	0.15	0.20
$\gamma = 1.5260$	1.2573	1.0444	0.92184	0.83555

При вычислении функции $p(x)$ по формуле (3.3) использовались таблицы полиномов Чебышева [6]. В табл. 2 приведены значения величины $aP^{-1}p(x)$ для некоторых ε и x / a.

Авторы благодарят Л. П. Матвеева и Н. П. Чумыкину за помощь при проведении вычислений.

Поступила 2 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
2. *Бородачев Н. М.* Вдавливание штампа с основанием в виде узкого прямоугольника в упругое полупространство. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
3. *Шерман Д. И.* Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. В кн.: Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендетные функции, т. 2. М., «Наука», 1966.
6. Таблицы полиномов Чебышева $S_n(x)$ и $C_n(x)$. М., ВЦ АН СССР, 1963.