Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 534.2

О ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ВОЛН В СРЕДАХ С МАЛЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ДИСПЕРСИЕЙ

Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский

(Горький)

Развивается метод упрощения систем уравнений с малыми нелинейностью и дисперсией. Эти системы отличаются от линейной гиперболической некоторым интегро-дифференциальным оператором, входящим с малым параметром. Метод основан на приведении исходных уравнений к нормальной форме и последующей рекуррентной процедуре. В случае волны, распространяющейся вдоль одной из характеристик системы (одноволновые процессы) первое приближение метода приводит к известным уравнениям Бюргерса, Кортевега — де Вриза, Клейна — Гордона и др., которые впервые выводились для конкретных физических моделей, а затем для более общей системы нелинейных уравнений [1, 2]. Однако данный метод применим и для многоволновых взаимодействий, когда учитываются волны, соответствующие двум и более характеристикам системы. Показано также, что как в одноволновом, так и в многоволновом случаях порядок упрощенных уравнений возрастает с номером приближения, причем по-разному для систем с высокочастотной и низкочастотной дисперсией (когда малый параметр содержится соответственно при членах с высшими производными или с интегралами от искомых функций).

Рассмотрим систему вида

$$\partial u / \partial t + B(\tau, \rho)\nabla u = \varepsilon F\{u\} \tag{1}$$
$$(\tau = \tau_0 + \varepsilon t,\ \rho = \rho_0 + \varepsilon \mathbf{r},\ \varepsilon \ll 1)$$

Здесь u — N-мерный вектор переменных поля, $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$ — совокупность трех квадратных матриц, F — заданные, вообще говоря, нелинейные интегро-дифференциальные операторы по $\mathbf{r}$ и t, зависящие от ε, τ, ρ. Относительно матрицы B предположим, что все ее собственные значения действительны, т. е. при $\varepsilon = 0$ система (1) гиперболическая (как ясно из дальнейшего, это условие не обязательно — необходимо лишь существование $r < N$ действительных характеристик системы (1) при $\varepsilon = 0$).

В случае $\varepsilon = 0$ система (1) имеет решение в виде плоских волн

$$u = U_0 + \psi U(t - \mathbf{V}\mathbf{r} / V^2) \tag{2}$$

Здесь U_0 — произвольный постоянный вектор и U — произвольная скалярная функция, определяемые граничными и начальными условиями; ψ — правый собственный вектор матрицы $\mathbf{B}$, отвечающий собственному значению $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V}\mathbf{B}\psi = V^2\psi, \qquad \mathrm{Det}\,|\,\mathbf{V}\mathbf{B} - V^2\,| = 0 \tag{3}$$

Имея в виду рассмотреть при $\varepsilon \neq 0$ более общий класс квазиплоских волн, распространяющихся вдоль оси x, приведем исходную систему (1) к нормальной форме (ср. [3]). Для этого сделаем замену переменных

$$u = Yv \tag{4}$$

где Y — квадратная матрица, составленная из линейно независимых собственных векторов матрицы $B \equiv B_x$; тогда получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda(\tau, \rho)\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon \mathbf{C}(\tau, \rho)\nabla_\perp v = \varepsilon Y^{-1}\left[F - \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \mathbf{B}\nabla Y\right)v\right] \equiv \varepsilon f \tag{5}$$

$$\left(\mathbf{C} = Y^{-1}\mathbf{B}_\perp Y, \quad \mathbf{B}_\perp = \{B_y, B_z\}, \quad \nabla_\perp = \left\{\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\right)$$

Здесь λ — диагональная матрица с элементами $V_1, \ldots V_N$, Y^{-1} — матрица, обратная Y.

Переход к системе (5) существенно упрощает построение схемы последовательных приближений по параметру ε. Согласно (4) и (5), искомая функция является суперпозицией «почти бегущих» волн, каждая из которых распространяется по одной из характеристик. Во многих случаях граничные или начальные условия таковы, что при $\varepsilon = 0$ в среде возбуждаются лишь $r < N$ волн $v_i\,(x - V_i t)$ или даже одна из них. Например, в случае полубесконечной среды ($x > 0$), на границу которой падает заданная волна из области $x < 0$, все характеристики с $V < 0$ в первом приближении исключаются из рассмотрения. Другой пример — задача с начальным условием в виде локализованного возмущения, рас адающегося на импульсы, которые расходятся по характеристикам и далее не перекрываются, так что рассмотрение каждого из них для достаточно больших t может быть проведено независимо. В подобных случаях среди компонент вектора v можно выделить r «главных» переменных, остальные же $N - r$ компонент малы и могут быть вычислены с помощью теории возмущений. В результате в каждом (m-м) приближении по малому параметру ε уравнения (5) разбиваются на две группы: r уравнений вида

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + V_i(\tau, \rho)\frac{\partial v_i}{\partial x} + \varepsilon\sum_{j=1}^{r} \mathbf{C}_{ij}(\tau, \rho)\nabla_\perp v_j = \varepsilon f_i\{v_i, v_s^{(m-1)}, \varepsilon\} - \tag{6}$$

$$- \varepsilon\sum_{s=r+1}^{N} \mathbf{C}_{is}(\tau, \rho)\nabla_\perp v_j^{(m-1)} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

и $N - r$ линейных уравнений для $v_s^{(m)}$

$$\frac{\partial v_s^{(m)}}{\partial t} + V_s\frac{\partial v_s^{(m)}}{\partial x} = \varepsilon f_s\{v_i, v_s^{(m-1)}, \varepsilon\} - \tag{7}$$

$$- \varepsilon\sum_{i=1}^{r} \mathbf{C}_{si}\nabla_\perp v_i - \varepsilon\sum_{l=r+1}^{N} \mathbf{C}_{sl}\nabla_\perp v_l^{(m-1)}$$

Очевидно, что (7) асимптотически распадается на $N - r$ независимых уравнений первого порядка с известными правыми частями; в результате построение приближенной системы (6) сводится к итерациям. Заметим, что такая схема получения упрощенных уравнений представляется даже в одноволновом случае более простой, чем приведенная в [1, 2].

Рассмотрим структуру правой части (6). В первом приближении в (6) нужно вычислить функцию f_i при $\varepsilon = 0$, т. е. положить $v_s = 0$. При заданном r порядок уравнений первого приближения, естественно, зависит от вида функционала F в исходной системе (1). Во многих важных случаях F может быть представлено в виде суммы производных и интегралов от некоторых функций искомой переменной; очевидно, что так же представимо f, и тогда уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + V_i \frac{dv_i}{\partial x} + \varepsilon \sum_{j=1}^{r} C_{ij} \nabla_\perp v_j + \ldots + \varepsilon \int h_i^{(-1)} dx + \varepsilon h_i^{(0)} + \tag{8}$$
$$+ \varepsilon \frac{\partial h_i^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 h_i^{(2)}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 h_i^{(3)}}{\partial x^3} + \ldots = 0$$

где $h^{(n)}$ — функции от v_i и все производные по t исключены с помощью (6). В простейшем случае отлична от нуля лишь функция $h^{(1)}$, что сооответствует недиспергирующей среде. Если вместе с $h^{(1)}$ отличны от нуля функция $h^{(2)}$ («вязкость») или $h^{(3)}$ (высокочастотная дисперсия), причем последние линейны по v, а $h^{(1)} \sim v^2$, то при $r = 1$ из (8) следуют известные уравнения Бюргерса и Кортевега — де Вриза. Член $h^{(0)}$ описывает «низкочастотные потери». Наконец, если отлична от нуля функция $h^{(-1)}$, то, дифференцируя (8) по t и исключая $\partial^2 v / \partial x \partial t$, при $r = 1$ приходим к уравнению Клейна — Гордона. Роль этих уравнений в нелинейной теории волн, очевидно, связана именно с тем, что в одноволновом приближении каждое из них описывает наиболее простую форму нелинейных, дисперсионных и диссипативных свойств среды. Как видно из (8), подобные уравнения могут быть написаны для любого числа взаимодействующих волн.

В последующих приближениях, например в m-м, функция f вычисляется с точностью ε^{m-1} по известным v_s^{m-1}. Так как V_s не совпадает ни с одной из V_i (в силу гиперболичности системы (1)), то V_s определяется как интеграл от правой части уравнений (7). Подставляя v_s в (6), можно видеть, что порядок системы (6), вообще говоря, повышается в каждом приближении. Однако это повышение происходит по-разному в зависимости от вида функционала F.

Пусть сначала $F \backsim \partial v / \partial x$, тогда слагаемые типа

$$\frac{\partial f}{\partial (\partial v / \partial x)} \frac{\partial v_s}{\partial x}$$

приводят во втором приближении к появлению в (6) члена $\partial v_i / \partial x$. Аналогичная ситуация имеет место и в высших приближениях. Следовательно, для среды без дисперсии порядок системы (6) не повышается.

Если $F \backsim \partial^2 v / \partial x^2$, то в каждом приближении порядок системы (6) повышается на r: во втором приближении в (6) появляются члены $\partial^3 v / \partial x^3$ за счет

$$\frac{\partial f}{\partial (\partial^2 v / \partial x^2)} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2}$$

и т. д.; поправки такого типа к уравнению Бюргерса в акустике были получены в [4]. Член с $\partial^3 v / \partial x^3$ приводит к повышению порядка на $2r$ и т. д.

Если же $F \backsim v$, то во втором приближении получаем $\int v dx$ и с ростом приближения появляются интегралы нарастающей кратности. Это относится также ко всем случаям, когда F содержит интегралы от v (для $F \backsim \int v dx$ кратность интегралов повышается на $2r$ и т. д.). Таким образом, повышение порядка приближенных уравнений для систем с высокочастотной или низкочастотной дисперсией (диссипацией) происходит по-разному. Если в первом случае растет порядок производных, то во втором растет кратность интегралов. «Пограничным» является случай недиспергирующей среды, когда малый параметр при первых производных в (1) и порядок системы (6) не изменяется в любом приближении.

Наконец, за счет слагаемого $C_{is}\nabla_\perp v_s$ в (6) появляется член типа $\Delta_\perp \int v dx$, соответствующий диффузионному приближению для параксиальных несинусоидальных пучков (впервые также исследовавшихся в акустике [5]).

Отметим также, что степень, с которой входят нелинейные слагаемые, как обычно, увеличивается с ростом приближения.

В заключение отметим, что преобразование исходной системы к приближенным уравнениям (6) зачастую упрощает выбор оптимальных методов их решения. Так, если в первом приближении (6) имеет решения в виде семейства стационарных волн, то в следующем приближении к ним могут быть применены методы усреднения (см., например, [6,7]).

Авторы выражают признательность А. В. Гапонову и Л. Г. Хазину за полезные замечания.

Поступила 7 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taniuti T., Wei C. C.* Reductive perturbation method in nonlinear ware propagation. I. J. Phys. Soc. Japan, 1968, vol. 24, No. 4.
2. *Asano N., Taniuti T.* Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media. I. J. Phys. Soc. Japan, 1969, vol. 27, No. 4.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
4. *Максимов А. Ю., Максимов Б. И., Михайлов Г. Д.* К динамике акустических волн в диссипативных средах. Акуст. ж., 1970, т. 16, вып. 2.
5. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, т. 15, вып. 2.
6. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
7. *Рабинович М. И., Розенблюм А. А.* Об асимптотических методах решения нелинейных уравнений в частных производных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.