Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СОЧЕТАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

А. Б. Куржанский

(Свердловск)

Рассматриваются управляемые линейные системы в условиях неполной информированности о текущем фазовом состоянии, когда в каждый момент времени измерению доступны лишь некоторые функции фазовых координат. Предполагается, что в управляемой системе и в канале измерения (наблюдения) присутствуют помехи, для которых отсутствует какое-либо специальное описание. Известны лишь точные детерминированные ограничения, которым эти помехи удовлетворяют. В каждый момент времени оптимальные управления синтезируются по информации обо всей предыстории наблюдения на основании критерия минимакса выпуклой функции значений фазовых координат в момент окончания процесса.

Таким образом, в работе рассматривается специфическая игровая информационная задача конфликтного управления [1]. Особенность задачи проявляется в том, что здесь требуется в совокупности оптимизировать как процесс синтеза оптимального управления, так и процесс непрерывной оценки величин текущих фазовых координат. Последнее приводит к использованию и экстремальных конструкций теории дифференциально-игровых задач динамики [1, 2] и функциональных построений для минимаксных задач позиционного наблюдения и прогнозирования [3, 4]. Основное внимание уделяется конструктивному построению решений в рамках аппарата выпуклого анализа [5, 6].

Иным постановкам задач о сочетании управления и наблюдения посвящены исследования [7–9].

1. Доступная информация. Постановка задачи. Пусть управляемая n-векторная величина $x(t)$ изменяется в силу уравнения

$$x^{\cdot}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v + f(t) \tag{1.1}$$

Здесь u и v — соответственно p- и q-мерные управления, $f(t)$ — известная локально-интегрируемая функция. В каждый момент времени t, начиная с начального, равного $t_0 - h, h > 0$, измерению доступна m-мерная величина

$$y(t) = G(t)\, x(t) + F(t)\xi \tag{1.2}$$

где ξ — помеха в канале измерения (наблюдения). Система (1.1), (1.2) рассматривается на фиксированном промежутке времени $[t_0 - h, \vartheta]$. Коэффициенты системы предполагаются непрерывными. На реализации $u[t]$, $v[t]$, $\xi[t]$ величин u, v, ξ наложены ограничения

$$u[t] \in P, \qquad v[t] \in Q, \qquad \xi[t] \in R \tag{1.3}$$

при всех t, где P, Q, R — заранее известные выпуклые компакты соответственно в $R^{(p)}$, $R^{(q)}$, $R^{(r)}$.

Существенно то, что сами реализации $v[t]$, $\xi[t]$ заранее не даны. Наоборот, управление u подлежит определению в каждый момент t, поэтому реализацию $u_t[\cdot] = u[t+\sigma]$ можем считать известной.

Здесь и далее принято обозначение $g_t[\cdot] = g[t+\sigma]$, $t_0 - h - t \leqslant \sigma \leqslant 0$, $g_t(\cdot) = g(t+\sigma)$.

Будем формировать управление u по предыстории наблюдения, т. е. по реализовавшейся в силу (1.2) функции $y = y[t+\sigma]$, предполагая, что «запоминание» величин $y_t[\cdot]$, $u_t[\cdot]$ имеет место. Далее вместо $u_t[\cdot]$ удобнее рассматривать функцию $z_t[\cdot]$, где $z[t]$, $(z(t))$ — решение уравнения

$$z^{\cdot} = A(t)z + B(t)u[t] + f(t), \quad z(t_0 - h) = 0$$

определяемое однозначно по $u[t]$ $(u(t))$.

Таким образом, под позицией системы (1.1), (1.2) будем понимать величину $\{t, \zeta_t, (\cdot)\}$, где $\zeta_t(\cdot) = \{y_t[\cdot], z_t[\cdot]\}$. Управление u будем искать в виде функционала от позиции: $u = u(t, \cdot) = u(t, \zeta_t(\cdot))$. Класс допустимых функционалов $u(t, \cdot)$ будет определен ниже.

Определение 1.1. Областью $X(t, \cdot) = X(t, \zeta_t(\cdot))$, допускаемой позицией $\{t, \zeta_t, (\cdot)\}$, будем называть множество тех и только тех векторов $x \in R^{(n)}$, для каждого из которых найдутся функции $v(\tau)$, $\xi(\tau)$, удовлетворяющие (1.3), $t_0 - h \leqslant \tau \leqslant t$ такие, что на промежутке $[t_0 - h, t]$ решение $y(\tau)$ системы (1.1), (1.2), найденное при $x = x(t)$, $v = v(\tau)$, $\xi = \xi(\tau)$, $u = u[\tau]$, будет удовлетворять условию $y(\tau) \equiv y[\tau]$.

Пусть даны две функции $y_{t_1}^{(1)}(\cdot)$, $y_{t_2}^{(2)}(\cdot)$. Расстояние между ними определим следующим образом $(t_0 - h \leqslant \tau \leqslant t,\ t_1 \leqslant t_2)$:

$$d(y_{t_1}^{(1)}(\cdot), y_{t_2}^{(2)}(\cdot)) = \max_\tau \| y_*^{(1)}(\tau) - y^{(2)}(\tau) \|$$

$$y_*^{(1)}(\tau) \equiv y^{(1)}(\tau),\ \tau \in [t_0 - h, t_1]; \qquad y_*^{(1)}(\tau) \equiv y^{(1)}(t_1),\ \tau > t_1$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Аналогично определяется расстояние $d(z_{t_1}^{(1)}(\cdot), z_{t_2}^{(2)}(\cdot))$. Расстояние между выпуклыми множествами X_1, X_2 определим при помощи хаусдорфовой метрики.

Определение 1.2. Допустимой x-стратегией управления будем называть многозначный функционал $U = U(t, X(t, \zeta_t(\cdot)))$ со значениями в виде выпуклых компактов, содержащихся в P, полунепрерывный сверху по включению по $X(t, \cdot)$ при $\Delta t \geqslant 0$.

Понятие полунепрерывности здесь стандартное, учитывающее вид метрики во множестве множеств $\{X\}$. Рассмотрим разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$ на полуинтервалы вида $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta_i > 0$, $t_0 = \tau_0$.

Определение 1.3. Допустимыми Δ-стратегиями будем называть однозначные функционалы вида $U(t, \tau_i, \zeta_{\tau_i}(\cdot))$ со значениями в P, непрерывные по t на промежутках $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(\Delta_i \leqslant \Delta$ для любого $i)$.

Классы стратегий, соответствующие определениям 1.2—1.3 обозначим соответственно как U_0, U_1. Пусть $U(t, \cdot) = U(t, \zeta_t(\cdot))$ — одна из указанных стратегий. Под движением системы (1.1), (1.2), порожденным $U(t, \cdot)$ и фиксированной парой функций $v[t]$, $\xi[t]$, будем понимать все пары функций $x[t]$, $y[t]$ вида

$$x[t] = p[t] + z[t], \qquad y[t] = q[t] + r[t] \tag{1.4}$$

где почти при всех t

$$p^{\cdot}[t] = A(t)p[t] - C(t)v[t]; \qquad q[t] = G(t)p[t] + F(t)\xi[t] \tag{1.5}$$

$$z^{\cdot}[t] = A(t)z(t) + B(t)u[t] + f(t) \tag{1.6}$$

$$r[t] = G(t)z[t], \qquad z[t_0 - h] = 0, \qquad u[t] \in U(t, \cdot)$$

Для кусочно-программных Δ-стратегий существование решения вытекает из общих свойств линейных дифференциальных уравнений, и для x-стратегий справедливо следующее условие: решение системы (1.4)—1.6) существует, если при $u[t] \equiv 0$ для любой пары $v[t]$, $\xi[t]$ многозначная функция $X(t, \zeta_t(\cdot))$ непрерывна по t на всем промежутке $[t_0 - h, \vartheta]$, за исключением разве лишь счетного множества точек.

Определим начальную позицию системы. Будем предполагать, что формирование $u[t]$ может быть начато лишь с момента t_0 (в то время как информация о функции $y[t]$ поступает с момента $t_0 - h$). На $[t_0 - h, t_0]$ реализация и считается заданной. Здесь для определенности принято $u[t] \equiv 0$, $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0$.

Указанное предположение приводит к тому, что к началу формирования управления $u[t]$ уже известна область $X(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot))$, допускаемая начальной позицией $\zeta_{t_0}(\cdot) = \{y_{t_0}[\cdot], 0\}$. Эта область ограничена, если однородная система (1.1), (1.2) вполне наблюдаема. (Указанные предположения могут быть заменены условием $x(t_0) \in X_0$, где X_0 — заданное ограниченное множество.)

Пусть $\Phi(X)$ — собственный выпуклый функционал, заданный на метрическом пространстве $F = \{X\}$ выпуклых, замкнутых множеств в $R^{(n)}$ с хаусдорфовой метрикой. В частности может быть (φ — собственная выпуклая функция в $R^{(n)}$, [5])

$$\Phi(X) = \max_x \varphi(x), \quad x \in X; \quad \min \varphi(x) = 0, \quad x \in R^{(n)} \tag{1.7}$$

Обозначим

$$g(\cdot) = g(t), \quad g[\cdot] = g[t], \quad t_0 - h \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.8}$$

$$\Phi^{\circ}(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) = \min_{U(t,\cdot)} \max_{x, v[\cdot], \xi[\cdot]} \max_{z[\cdot]} \Phi(X(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot)))$$

Здесь $U(t, \cdot) \in U$, где U — один из указанных выше классов стратегий U_0, U_1; $x \in X(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot))$, $z[\cdot] \in Z(\cdot)$, где $Z(\cdot)$ — множество траекторий системы (1.6) при $u[t] \in U(t, \cdot)$.

Итак, каждая стратегия $U(t, \cdot)$ порождает множество траекторий $z[\cdot]$ и каждая тройка $\{x, v[\cdot], \xi[\cdot]\}$ — реализацию $y[\tau] - r[\tau]$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ — одно из возможных продолжений на промежуток $[t_0, \vartheta]$ сигнала $y[t_0 + \sigma] - r[t_0 + \sigma]$, $-h \leqslant \sigma \leqslant 0$. В свою очередь, каждая пара $y_t[\cdot]$, $z_t[\cdot]$ определяет множество точек $X(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot))$. Цель работы — выяснение условий существования и определение оптимальной стратегии

$U^\circ(t, \cdot)$, обеспечивающей точное равенство

$$\Phi^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) = \max_{x,\, v[\cdot],\, \xi[\cdot]} \max_{z[\cdot]} \Phi(X(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot))) \tag{1.9}$$

$$v[t] \in Q, \qquad \xi[t] \in R \quad \text{при всех } t$$

$$x \in X(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)), \quad z(\cdot) \in Z^\circ(\cdot) \quad (Z^\circ(\cdot) = Z(\cdot) \text{ при } U(t, \cdot) = U^\circ(t, \cdot))$$

или же его аппроксимацию.

2. Оценка допускаемых областей. Решение задачи предполагает рассмотрение совокупной оптимизации как процесса управления, так и процесса наблюдения — оценки области пребывания фазового вектора x в каждый текущий момент времени.

Пусть на промежутке $\tau \in [t_0 - h, t]$ реализовалось управление $u_t[\cdot]$, породившее в силу (1.6) траекторию $z[\tau]$, и функция $y_t[\cdot]$, измеренная в процессе наблюдения. Реализация $y_t[\cdot]$ могла возникнуть не при любых $v_t[\cdot]$, $\xi_t[\cdot]$, $x(t)$. А именно, знание $y_t[\cdot]$ позволяет апостериорно установить множество тех и только тех значений фазового вектора $x = x(t)$, для каждого из которых найдутся измеримые функции $v(\tau)$, $\xi(\tau)$, $\tau \in [t_0 - h, t]$ со значениями в Q и R такие, что элементы $\{x(t) = x, v = v(\tau), \xi = \xi(\tau), u = u[\tau]\}$ вместе порождают в силу системы (1.1), (1.2) именно реализацию $y(\tau) \equiv y[\tau]$. Указанные значения $\{x\}$ только и могут быть совместимы с реализацией $y_t[\cdot]$. Множество указанных векторов $\{x\}$ и образуют область $X(t, \zeta_t(\cdot)) = X(t, \cdot)$, допускаемую позицией $\zeta_t(\cdot) = \{y_t[\cdot], z_t[\cdot]\}$, согласно определению 1.1.

Описание области $X(t, \cdot)$, а также динамики ее изменения по ходу времени, зависящего от реализующейся позиции $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$, составляют важный элемент в решении. Здесь подчеркнем, что именно зависимость $X(t, \cdot)$ от $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$ (а не от одного лишь t) и приводит к задаче совокупной оптимизации процессов управления и наблюдения. (В противим случае имели бы задачу об управлении, когда текущее состояние — заранее известное выпуклое множество.)

Обозначим символом $\rho(l; Q) = \sup l'q$, $q \in Q$ (штрих означает транспонирование) опорную функцию множества Q, [7]. Подробный вывод формулы для $\rho(l; X(t, \cdot))$ и описание свойств множества $X(t, \cdot)$ приведены в работах [3, 4]. В них отмечено, в частности, что множества $X(t, \cdot)$ — замкнутые, выпуклые и приведены условия, обеспечивающие ограниченность $X(t, \cdot)$ для любой позиции $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$. Указанные условия сводятся к требованию о полной наблюдаемости системы (1.1), (1.2) (при $v \equiv 0$, $\xi \equiv 0$, $u \equiv 0$) на любом конечном промежутке времени, которое далее примем выполненным [4].

Имеем согласно [3]

$$\rho(l; X(t, \cdot)) = l'z[t] + \psi(l, \zeta_t(\cdot), t, t_0 - h) \tag{2.1}$$

$$\psi(l, \zeta_t(\cdot), t, t_0 - h) = \inf\Big\{ \int_{t_0-h}^{t} \rho(-s(\tau; \lambda(t, \cdot))C(\tau); Q)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0-h}^{t} [\rho(\lambda(t, \tau)F(\tau); R) + \lambda(t, \tau)(y[\tau] - z[\tau])]\,d\tau$$

по всем $\lambda(t,\cdot)\in\Lambda(t,l)$, где $\Lambda(t,l)=\{\lambda(t,\cdot)\equiv\lambda(t,\tau),\ t_0-h\leqslant\leqslant\tau\leqslant t\}$ — множество всех решений уравнения

$$s(t,\lambda(t,\cdot))=l \tag{2.2}$$

в классе m-векторных функций с суммируемым квадратом: $\lambda(t,\tau)\in L_2^{(m)}$, $\tau\in[t_0-h,t]$. Здесь $s(\tau;\lambda(t,\cdot))$ — решение уравнения

$$ds/d\tau=-sA(\tau)+\lambda(t,\tau)G(\tau),\quad s(t_0-h)=0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим множество

$$G(\vartheta,t,x,z[\vartheta\,|\,t])=\bigcup_{v(\cdot)}\Big\{X(\vartheta,t)x+z[\vartheta\,|\,t]-\int\limits_{c}^{\vartheta}X(\vartheta,\xi)C(\xi)v(\xi)\,d\xi\Big\} \tag{2.4}$$

$$\Big(z[t_1\,|\,t]=\int\limits_{t}^{t_1}X(t_1,\xi)(B(\xi)u[\xi]+f(\xi))\,d\xi\Big)$$

являющееся областью достижимости системы (1.1) из состояния $x(t)=x$ за время $\vartheta-t$ по управлениям $v(\tau)\in Q$ при фиксированном $u=u[\tau]$. Здесь $X(\vartheta,t)$ — нормированная фундаментальная матрица однородной системы (1.1).

Обозначим

$$G(\vartheta,\tau,Q,z[\vartheta\mid t])=\bigcup_{q\in Q}G(\vartheta,t,q,z[\vartheta\mid t]) \tag{2.5}$$

Далее, пусть $y_{t_1}[\cdot\mid t]$ означает отрезок реализации сигнала $y[\tau]$ (1.2) на промежутке $[t,t_1]$ (т. е. $y_{t_1}[\cdot\mid t]=y[t_1+\sigma]$, $t-t_1\leqslant\sigma\leqslant 0$), $z_{t_1}[\cdot\mid t]$ — аналогичный отрезок для $z[\tau]$; $X(t_1,\cdot\mid t)=X(t_1,\zeta_{t_1}(\cdot\mid t))$— область фазового пространства, допускаемую величинами $\{y_{t_1}[\cdot\mid t], z_{t_1}[\cdot\mid t]\}=\zeta_{t_1}(\cdot\mid t)$ (т. е. удовлетворяющую определению 1.1, где вместо $\zeta_{t_1}(\cdot)$ следует взять $\zeta_{t_1}^{\Gamma}(\cdot\mid t)$).

Лемма 2.1. Справедливо равенство ($t_0\leqslant t_1\leqslant t_2$)

$$X(t_2,\zeta_{t_2}(\cdot\,|\,t_0))=X(t_2,\zeta_{t_2}(\cdot\,|\,t_1))\cap G(t_2,t_1,X(t_1,\zeta_{t_1}(\cdot\,|\,t_0)),z[t_2|t_1]) \tag{2.6}$$

Докажем справедливость (2.6), сравнивая опорные функции выпуклых компактов, стоящих в левой и правой частях этого соотношения. Имеем, согласно (2.1)

$$\rho(l;X(t_2;\zeta_{t_2}(\cdot\mid t_0))=l'z[t_2\mid t_0]+\psi(l;\zeta_{t_2}(\cdot\mid t_0),t_2,t_0) \tag{2.7}$$

С другой стороны, из (2.4), (2.5), [5] получаем (в подробной записи)

$$\begin{aligned}\rho(l;G(t_2,t_1,X(t_1,\zeta_{t_1}(\cdot\,|\,t_0)),z[t_2\,|\,t_1]))&=l'X(t_2,t_1)z[t_1]+\\&+\inf\nolimits_{\lambda(t_1,\cdot)}\Big\{\int\limits_{t_0}^{t_1}\rho(s(\xi;\lambda(t_1,\cdot))_{t_0}B(\xi);Q)\,d\xi+\\&+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\lambda(t_1,\xi)(y[\xi]-z[\xi])+\rho(\lambda(t_1,\xi)F(\tau);R)]\,d\xi\Big\}+\\&+\int\limits_{t_1}^{t_2}\rho(s(t_1;\lambda(t_1,\cdot))_{t_0}X(t_1,\xi)B(\xi);Q)\,d\xi\end{aligned} \tag{2.8}$$

по всем $\lambda(t_1, \tau)$, удовлетворяющим равенству

$$(2.9) \qquad s(t_1;\ \lambda(t_1, \cdot))_{t_0} = l'X(t_2, t_1)$$

Здесь $s(\tau; \lambda(t_1, \cdot))_{t_0}$ — решение (2.3) при $s(t_0) = 0$.

Аналогично, из (2.1) находим

$$(2.10) \qquad \rho(l;\ X(t_2, \zeta_{t_1}(\cdot \mid t_1))) = l'z[t_2 \mid t_1] + \\ + \inf_{\lambda(t_2, \cdot)} \Big\{ \int_{t_1}^{t_2} [\rho(s(\xi;\ \lambda(t_2, \cdot))_{t_1} B(\xi);\ Q) + \\ + \lambda(t_2, \xi)[y[\xi] - z[\xi]) + \rho(\lambda(t_2, \xi) F(\xi);\ R)]\, d\xi \Big\}$$

по всем $\lambda(t_2, \tau)$, удовлетворяющим равенству

$$(2.11) \qquad s(t_2;\ \lambda(t_2, \cdot))_{t_1} = l'$$

Тенерь, принимая во внимание структуру правой части (2.6), равенства (2.7)—(2.11) и формулу [7]

$$\rho(l;\ Q_1 \cap Q_2) = \inf_{l_1 l_2} \{\rho(l_1;\ Q_1) + \rho(l_2;\ Q_2)\}, \qquad l_1 + l_2 = l$$

приходим сразу к опорной функции правой части (2.6), совпадающей с выражением (2.8)

Следствие 2.1. Справедливо условие ($t_2 \geqslant t_1$)

$$(2.12) \qquad G(\vartheta, t_1, X(t_1, \cdot), z[\vartheta \mid t_1]) \supseteq G(\vartheta, t_2, X(t_2, \cdot), z[\vartheta \mid t_2])$$

какова бы ни была реализация $u[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, порождающая величины $z[\vartheta \mid t_1]$, $z[\vartheta \mid t_2]$.

Действительно, с одной стороны справедливо равенство [1]

$$G(\vartheta, t_1, X(t_1, \cdot), z[\vartheta \mid t_1]) = \\ = G(\vartheta, t_2, G(t_2, t_1, X(t_1, \cdot), z[t_2 \mid t_1]), \ z[\vartheta \mid t_2])$$

и с другой, согласно лемме 2.1

$$X(t_2, \cdot) \subseteq G(t_2, t_1, X(t_1, \cdot), z[t_2 \mid t_1])$$

Условие (2.12) теперь вытекает из очевидного включения (см. (2.5))

$$G(\vartheta, t_2, Q_1, z[t_2 \mid t_1]) \supseteq G(\vartheta, t_2, Q_2, z[t_2 \mid t_1]), \quad Q_1 \supseteq Q_2$$

Будем говорить, что функция $G(t)$ (G — выпуклые множества) имеет скачок при $t = t_1$, если функция $\rho(l;\ G(t))$ имеет в точке $t = t_1$ скачок хотя бы при одном l. Из выпуклости и компактности множеств $G(\vartheta, t, X(t, \cdot), z[\vartheta \mid t])$ получаем вывод (см. лемму 2.1).

Лемма 2.2. Функция $G(\vartheta, t, X(t, \cdot), z[\vartheta \mid t]) = G[t]$ имеет не более чем счетное множество скачков.

3. Вспомогательная задача прогнозирования. Пусть в момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ реализовалась позиция $\{t, \zeta_t, (\cdot)\}$, $\zeta_t(\cdot) = \{y_t[\cdot], z_t[\cdot]\}$, породившая множество $X(t, \cdot)$ (допускаемое этой позицией). Зафиксируем тройку функций $u^*(\tau)$, $v^*(\tau)$, $\xi^*(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ со значениями в P, Q, R соответственно. Тогда $u^*(\tau)$ породит реализацию $z_\vartheta{}^*(\cdot \mid t)$ — отрезок решения на $[t, \vartheta]$ уравнения (1.6) при $u[\tau] = u^*(\tau)$. В свою очередь

$z_\vartheta^*(\cdot \mid t)$, $v^*(\tau)$, $\xi^*(\tau)$ породят множество реализаций $Y(\cdot \mid t) = \{[y_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x]\}$, $x \in X(t, \cdot)$. Здесь $[y_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x]$ — решение на $[t, \vartheta]$ системы (1.1), (1.2) при $u = u^*(\tau)$, $v = v^*(\tau)$, $\xi = \xi^*(\tau)$, $x(t) = x$.

Таким образом, каждая из функций $[y_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x]$ — одно из возможных продолжений реализации $y_t[\cdot]$ на промежуток $(t, \vartheta]$, когда на нем одновременно реализуется и величина $z_\vartheta^*(\cdot \mid t)$. При этом каждое из указанных возможных продолжений сигнала $y_t[\cdot]$ (т. е. каждый из элементов $Y(\cdot \mid t)$) порождается функциями $v^*(\tau)$, $\xi^*(\tau)$ и одним из векторов $x \in X(t, \cdot)$.

Введем обозначения

$$[\zeta_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x] = \{[y_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x],\ z_\vartheta^*(\cdot \mid t)\}$$
$$[\zeta_\vartheta^*(\cdot) \mid x] = \{y_\vartheta^*(\cdot),\ z_\vartheta^*(\cdot)\}$$
$$y^*(\vartheta + \sigma) \equiv y[\vartheta + \sigma], \qquad t_0 - h - \vartheta \leqslant \sigma < t - \vartheta$$
$$y^*(\vartheta + \sigma) \equiv [y^*(\vartheta + \sigma \mid t) \mid x], \qquad t - \vartheta \leqslant \sigma \leqslant 0$$
$$z^*(\vartheta + \sigma) \equiv z[\vartheta + \sigma], \qquad t_0 - h - \vartheta \leqslant \sigma < t - \vartheta$$
$$z^*(\vartheta + \sigma) \equiv z^*(\vartheta + \sigma \mid t), \qquad t - \vartheta \leqslant \sigma \leqslant 0$$

Если в момент времени t реализовалось множество $X(t, \cdot)$, то (при $u = u^*(\tau)$, $v = v^*(\tau)$, $\xi = \xi^*(\tau)$, $\tau \in [t, \vartheta]$) в момент ϑ может априорно реализоваться любое из множеств $X(\vartheta, \cdot \mid x) = X(\vartheta, [\zeta_\vartheta^*(\cdot) \mid x])$.

Согласно лемме 2.1 имеем

$$X(\vartheta, \cdot \mid x) = X(\vartheta, [\zeta_\vartheta^*(\cdot \mid t) \mid x]) \cap G(\vartheta, t, X(t, \cdot), z^*(\vartheta \mid t)) \tag{3.1}$$

Найдем опорную функцию множества $X(\vartheta, \cdot \mid x)$.

Привлекая соображения, изложенные в п. 2, находим

$$\rho(l, X(\vartheta, \cdot \mid x)) = l'z^*(\vartheta \mid t) + l'X(\vartheta, t)x + \tag{3.2}$$
$$+ \rho(l; X(\vartheta, t)G^{(1)}(t, x) \cap G^{(2)}(\vartheta, t, v^*(\cdot)\ \ \xi^*(\cdot)))$$

$$G^{(1)}(t, x) = X(t, \cdot) - x$$

$$\rho(l; G^{(2)}(\vartheta, t, v^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) =$$
$$= \inf_{\lambda(\vartheta,\cdot)} \ \sup_{v(\cdot),\xi(\cdot)} \int_t^\vartheta [s(\tau; \lambda(\vartheta, \cdot))_t C(\tau)(v^*(\tau) - v(\tau)) +$$
$$+ \lambda(\vartheta, \tau)F(\tau)(\xi^*(\tau) - \xi(\tau))]d\tau \qquad (s(\vartheta; \lambda(\vartheta, \cdot))_t = l')$$

Формула (3.2) дает точное решение задачи прогноза — описание всех наперед возможных реализаций $X(\vartheta, \cdot \mid x)$ множества $X(\vartheta, \cdot)$, если в момент t реализовалось $X(t, \cdot)$.

Рассмотрим задачу о программном максимине функционала Φ

$$\varepsilon^\circ(t, \cdot) = \varepsilon^\circ(t, \zeta_t(\cdot)) = \max_{x, v^*, \xi^*} \ \min_{u^*} \Phi(X(\vartheta, \cdot \mid x)) \tag{3.3}$$
$$x \in X(t, \cdot), \quad v^*(\tau) \in Q, \quad \xi^*(\tau) \in R, \quad u^*(\tau) \in P, \quad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

Величина $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ — наилучший гарантируемый результат по функционалу Φ, если в момент t перейти к чисто программному управлению, неполучая при $\tau > t$ никакой дополнительной информации о позиции $\{\tau, \zeta_\tau(\cdot)\}$.

Далее конкретизируем функционал $\Phi(X)$, выбирая его в виде (1.7). Решая задачу (3.3) при помощи формулы (3.2), приходим к утверждению

(3.4) $$\varepsilon^\circ(t, \cdot) = \sup_l \{\Psi(t, \mathrm{X}(t, \cdot), l) - \varphi^*(-l)\}, \quad l \in R^{(n)}$$

$$\Psi(t, X(t, \cdot), l) = \int_t^\vartheta (\rho(l'\mathrm{X}(\vartheta, \tau) C(\tau); Q) -$$
$$- \rho(l'\mathrm{X}(\vartheta, \tau) B(\tau); P)) d\tau + \rho(-l'\mathrm{X}(\vartheta, t) X(t, \cdot))$$

Здесь $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная к $\varphi(l)$ так, что $\varphi(x) = \sup(l'x - \varphi^*(l))$ по всем $l \in R^{(n)}$ [5].

Заметим, что справедливо равенство ($u^*(\tau) \in P$)

(3.5) $$\Psi(t, X(t, \cdot), -l) = \min_{u^*} \rho(l; G(\vartheta, t, X(t, \cdot), z^*(\vartheta \mid t))$$

Примечание 3.1. Пусть $\Phi(X) = r_\varphi(X)$, где $r_\varphi(X) = \min_y \max_x \varphi(x - y)$, $x, y \in X$ есть так называемый чебышевский φ-радиус множества X (φ — собственная выпуклая функция). В частности, если $\varphi(x) = (x'x)^{1/2}$, то $r_\varphi(X) = d(X)$, где $d(X) = \max_l(\rho(l; X) - \rho(-l; X))$ — диаметр X [5]. Из формулы (2.1), (3.2) вытекает (см. также [3, 4]), что величины $r_\varphi(X(\vartheta, \cdot))$, $r_\varphi(X(\vartheta; [\zeta^*(\cdot \mid t) \mid x])$ не зависят от выбора управления u. Заметим, что формула для $r_\varphi(X(\vartheta \cdot))$ была выведена при $\xi \equiv 0$ в работе [4].

4. Основная оценка. Пусть за время Δt система (1.1), (1.2) перешла из позиции $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$ в позицию $\{t + \Delta t, \zeta_{t+\Delta t}(\cdot)\}$. Для решения задачи следует оценить приращение

(4.1) $$\Delta\varepsilon^\circ(t, \cdot) = \varepsilon^\circ(t + \Delta t, \zeta_{t+\Delta t}(\cdot)) - \varepsilon^\circ(t, \zeta_t(\cdot))$$

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Рассмотрим функцию $\gamma(t, X, l) = \Psi(t, X, l) - \varphi^*(-l)$.

Обозначим

$$\Gamma(t, \cdot) = \Gamma(t, \zeta_t(\cdot)) = \{l^\circ : \sup_l \gamma(t, X(t, \cdot), l) = \gamma(t, X(t, \cdot), l^\circ)\}$$

Ограниченность $\Gamma(t, \cdot)$ обеспечивается следующим дополнительным предположением, которое далее принимаем.

Условие 4.1. Каковы бы ни были число $N > 0$ и выпуклая всюду конечная положительно однородная функция $\beta(l)$, существует число $N_1(N; \beta(l))$ такое, что при $-\gamma \leqslant N$, $\rho(l; X) \leqslant \beta(l)$ будет иметь место неравенство $\|l\| \leqslant N_1$.

Условие 4.1. есть ограничение на функцию $\varphi(l)$. Пусть $\varphi(x)$ — евклидово расстояние $r(x, M)$ от x до выпуклого множества M. Тогда

$$\varphi(x) = \max_l (l'x - r(l; M)), \quad \|l\| = 1$$

причем

(4.2) $$\varphi^*(l) = r(l; M), \quad \|l\| \leqslant 1, \quad \varphi^*(l) = \infty, \quad \|l\| > 1$$

Отсюда вытекает, что условие 4.1 выполнено, когда $\varphi(x) = r(x, M)$.

Будем говорить, что функционал $F(t, \zeta_t(\cdot)) = F(t, \cdot)$ непрерывен по (направлению) $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\} = \{\Delta t, \zeta_{t+\Delta t}(\cdot) - \zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$, если

$$F(t + \lambda\Delta t, \zeta_{t+\lambda\Delta t}(\cdot)) \to F(t, \zeta_t(\cdot)), \quad \lambda \to 0$$

Лемма 4.1. Пусть функционал $X(t, \cdot)$ непрерывен по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$. Тогда в этой точке функционал $\varepsilon^\circ(\tau, \cdot)$ будет непрерывен по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$.

Из (3.4) вытекает, что функционал $\gamma(t, X(t, \cdot), l)$ непрерывен по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$.

Имеем $(0 < \lambda < 1)$

$$\begin{aligned}(4.3)\qquad & \gamma(t + \lambda\Delta t, X(t + \lambda\Delta t, \cdot), l_{\lambda\Delta}) = \varepsilon^\circ(t + \lambda\Delta t, \cdot) \geqslant \\ & \geqslant \gamma(t + \lambda\Delta t, X(t + \lambda\Delta t, \cdot), l^\circ)\\ (4.4)\qquad & \gamma(t, X(t, \cdot), l_{\lambda\Delta}) \leqslant \varepsilon^\circ(t, \cdot) = \gamma(t, X(t, \cdot), l^\circ)\\ & l^\circ \in \Gamma(t, \cdot), \qquad l_{\lambda\Delta} \in \Gamma(t + \lambda\Delta t)\end{aligned}$$

В силу непрерывности $X(\tau, \cdot)$ по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ имеем для $\sigma > 0$

$$\gamma(t + \lambda\Delta t, X(t + \lambda\Delta t, \cdot), l^\circ) \geqslant \varepsilon^\circ(t, \cdot) - \sigma$$

если только $\lambda \leqslant \delta(\sigma)$.

Пусть $\beta_\Delta(l) = \max \rho(l; X(t + \Delta t, \cdot))$ по всем множествам $X(t + \Delta t, \cdot)$, в которые может перейти $X(t, \cdot)$ за время Δt, при ограничениях (1.3) на u, v, ξ. Тогда по условию 4.1 ($N = \varepsilon^\circ(t, \cdot) - \delta$) получим $\|l_{\lambda\Delta}\| \leqslant K$, если только

$$\lambda \leqslant \delta(\sigma), \qquad \rho(l; X(t + \lambda\Delta t; \cdot)) \leqslant \beta_\Delta(l)$$

Из компактности множества $\| l_{\lambda\Delta} \| \leqslant K$, из непрерывности $X(t, \cdot)$ по Δt, $\Delta\zeta_t(\cdot)$ и неравенств (4.3), (4.4) следует непрерывность $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$.

Лемма 4.2. Пусть функционал $\varepsilon^\circ(\tau, \cdot)$ непрерывен по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$. Тогда множество $\Gamma(\tau, \cdot)$ полунепрерывно сверху по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в этой точке (т. е. для любого $\sigma > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda \leqslant \delta$ имеет место включение $\Gamma(t + \lambda\Delta t, \cdot) \subset \Gamma_\sigma(t, \cdot)$, Γ_σ — σ-окрестность Γ).

Лемма 4.3. Пусть в каждой точке $\{\tau, \zeta_\tau(\cdot)\}$ области $\varepsilon^\circ(\tau, \cdot) > 0$ множество $\Gamma(\tau, \cdot)$ состоит из единственного элемента $l^\circ(\tau, \zeta_\tau(\cdot)) = l^\circ(\tau, \cdot)$. Тогда функционал $l^\circ(\tau, \cdot)$ будет непрерывным по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$, если в этой точке по направлению $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ непрерывно $\varepsilon^\circ(\tau, \cdot)$.

Доказательство лемм 4.2, 4.3, использующих условие 4.1, следует стандартным схемам [1].

Из свойств выпуклых функций вытекает утверждение.

Лемма 4.4. Для выполнения условий леммы 4.3 достаточно выполнения одного из условий

А. Функция $-\gamma(\tau, X(\tau, \cdot), l)$ строго выпукла по l.

Б. $\varphi(x) = r(x, M)$, где M — выпуклое множество и функция $-\gamma(\tau, X(\tau, \cdot), l)$ выпукла по l.

Перейдем к оценке приращения (4.1). Пусть в обозначениях п. 3.

$$\zeta_{t+}{}^{*}{}_{\Delta t}\ (\cdot) = [\zeta^{*}{}_{t+\Delta t}(\cdot) \mid x^{*}], \qquad \zeta_t(\cdot) = \{y_t[\cdot], z_t[\cdot]\}$$

По формуле (3.4) находим

$$\begin{aligned}(4.5)\qquad \Delta\varepsilon^{\circ}(t, \lambda, \cdot) &= \varepsilon^{\circ}(t + \lambda\Delta t, \cdot) - \varepsilon^{\circ}(t, \cdot) = \\ &= \gamma(t + \lambda\Delta t, X(t + \lambda\Delta t, \cdot), l_{\lambda\Delta}) - \gamma(t, X(t, \cdot), l^{\circ})\end{aligned}$$

откуда для любых l°, $l_{\lambda\Delta}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$\begin{aligned}(4.6)\qquad &\Delta\varepsilon^{\circ}(t, \lambda, \cdot) \geqslant \Delta\gamma(t, \lambda, l^{\circ},)\ \Delta\varepsilon^{\circ}(t, \lambda, \cdot) \leqslant \Delta\gamma(t, \lambda, l_{\lambda\Delta}) \\ &\Delta\gamma(t, \lambda, l) = \gamma(t + \lambda\Delta t, X(t + \lambda\Delta t, \cdot), l) - \gamma(t, X(t, \cdot), l)\end{aligned}$$

Приращение $\Delta\varepsilon^{\circ}(t, 1, \cdot)$ соответствует реализации $y^{*}(\tau)$, $z^{*}(\tau)$, порожденной на промежутке $\tau \in [t, t + \Delta t]$ величинами $u^{*}(\tau)$, $v^{*}(\tau)$, $\xi^{*}(\tau)$.

Чтобы выписать явные выражения для правых частей неравенств (4.6), оценим приращение

$$\begin{aligned}\Delta\rho(t, \lambda, l, \cdot) &= \rho(-l; \mathrm{X}(\vartheta, t + \lambda\Delta t)X(t + \lambda\Delta t, \cdot)) - \\ &- \rho(-l; \mathrm{X}(\vartheta, t + \lambda\Delta t)X(t, \cdot))\end{aligned}$$

для чего воспользуемся формулами (3.1), (3.2) при $\vartheta = t + \lambda\Delta t$.

Прямым подсчетом получаем

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad \Delta\rho(t, \lambda, l, \cdot) &= -l'\mathrm{X}(\vartheta, t + \lambda\Delta t)\Big[z^{*}(t + \lambda\Delta t \mid t) - \\ &- \int_t^{t+\lambda\Delta t} \mathrm{X}(t + \lambda\Delta t, \xi)C(\xi)v^{*}(\xi)\,d\xi\Big] - l'\mathrm{X}(\vartheta, t)x^{*} - \\ &- \rho(-l'\mathrm{X}(\vartheta, t); X(t, \cdot)) + \omega(l, v_{\lambda}{}^{*}(\cdot), \xi_{\lambda}{}^{*}(\cdot), X^{*}, t, \lambda) \\ f_{\lambda}(\cdot) &= f(\tau), \qquad t \leqslant \tau \leqslant t + \lambda\Delta t \\ \omega(l, v_{\lambda}^{*}(\cdot), &\ \xi_{\lambda}^{*}(\cdot), x^{*}, t, \lambda) = \\ &= \rho(-l; G^{(1)}(t, x^{*}) \cap G^{(2)}(t + \lambda\Delta t, t, v^{*}(\cdot), \xi^{*}(\cdot)))\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}(4.8)\qquad G^{*}(t, \lambda, x^{*}, v^{*}{}_{\lambda}, (\cdot), \xi^{*}{}_{\lambda}(\cdot)) &= \\ = G^{(1)}(t, x^{*}) \cap G^{(2)}(t + \lambda\Delta t, t, v^{*}(\cdot), \xi^{*}(\cdot)) + x^{*}\end{aligned}$$

По построению справедливо условие

$$x^{*} \subseteq G^{*}(t, \lambda, x^{*}, v^{*}{}_{\lambda}(\cdot), \xi^{*}{}_{\lambda}(\cdot)) \subseteq X(t, \cdot)$$

По формулам (3.4), (4.7)—(4.9) находим

$$(4.9)\qquad \Delta\gamma(t, \lambda, l) = \int_t^{t+\lambda\Delta t} f(\tau, u^{*}(\tau), v^{*}(\tau), l)\,d\tau + \alpha^{*}(t, \lambda, l)$$

$$\begin{aligned}(4.10)\qquad f(\tau, u, v, l) &= \rho(l', X(\vartheta, \tau)B(\tau); P) - \rho(l'X(\vartheta, \tau)C(\tau); Q) - \\ &- l'X(\vartheta, \tau)(B(\tau)u^{*}(\tau) - C(\tau)v^{*}(\tau)) \\ \alpha^{*}(t, \lambda, l) &= \rho(-l; G^{*}(t, \lambda, x^{*}, v^{*}{}_{\lambda}(\cdot), \xi^{*}{}_{\lambda}(\cdot))) - \\ &- \rho(-l; X(t, \cdot))\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ непрерывно по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$ в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$. Тогда по лемме 4.2 множество $\Gamma(t, \cdot)$ будет в этой точке полунепрерывным сверху по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$. Отсюда приходим к следующей оценке.

Лемма 4.5. Пусть $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$. Тогда для любого $\sigma > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$(4.11)\qquad f(\tau, u, v, l_{\lambda\Delta}) \leqslant \max_{l^\circ}(f(\tau, u, v, l^\circ) + \sigma,\ l^\circ \in \Gamma(t, \cdot)$$

какими бы ни были $l_{\lambda\Delta} \in \Gamma(t + \lambda\Delta t, \cdot)$, $\tau \in [t, t + \lambda\Delta t]$, $\lambda \leqslant \delta$. Оценка (4.11) равномерна по всем $u \in P$, $v \in Q$, $\xi \in R$ и всем продолжениям $\zeta_{t+\Delta t}(\cdot)$ реализации $\zeta_t(\cdot)$ при ограничениях (1.3), для которых $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ непрерывно по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$.

Заметим, что справедливо условие, вытекающее из (4.8), (4.9)

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} &\max_x \rho(-l; G^*(t, \lambda, x, v_\lambda^*(\cdot), \xi_\lambda^*(\cdot))) = \\ &= \rho(-l; X(t, \cdot)),\ x \in X(t, \cdot) \end{aligned}$$

Неравенства (4.6), формула (4.10) и лемма (4.5) приводят к оценкам ($\lambda \to 0$, $l^\circ \in \Gamma(t, \cdot)$)

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &\lim\inf \lambda^{-1}\Delta\varepsilon^\circ(t, \lambda, \cdot) \geqslant f(t, u^*(t), v^*(t), l^\circ) + \\ &+ \lim\sup \lambda^{-1}\alpha(t, \lambda, l^\circ) \\ &\lim\sup \lambda^{-1}\Delta\varepsilon^\circ(t, \lambda, \cdot) \leqslant \max_{l^\circ} f(t, u^*(t), v^*(t), l^\circ) + \\ &+ \lim\inf \lambda^{-1}(\max_{l^\bullet} \alpha(t, \lambda, l^\circ)) \end{aligned}$$

Если $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ непрерывно по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$, то выполняется условие

$$\max_{l^\circ}\{-l^{\circ\prime}x^* - \rho(-l^\circ; X(t, \cdot))\} = 0, \qquad l^\circ \in \Gamma(t, \cdot)$$

которое вместе с (4.12) и (4.13) приводит к равенству (после перехода в (4.13) к пределу при $\lambda \to 0$)

$$(4.14)\qquad \left.\frac{d\varepsilon^\circ(t, \cdot)}{dt}\right|_{u^*, v^*} = \max_{l^\circ} f(t, u^*(t), v^*(t), l^\circ), \qquad l^\circ \in \Gamma(t, \cdot)$$

Здесь в левой части стоит производная $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ вдоль реализации $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$, порожденной управлениями $u^*(t)$, $v^*(t)$.

Данное равенство есть аналог известной формулы для производной по направлению функции максимума [10, 11], зависящей в рассматриваемом случае от специфического аргумента $\zeta^*(\cdot)$. Применение ее к линейным дифференциальным играм с полной информацией обсуждалось в работах [12, 13]. Формула (4.14) трансформируется очевидным образом, если $\Gamma(t, \cdot)$ состоит из единственного элемента.

Если $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$ — точка разрыва $\varepsilon^\circ(t; \cdot)$ по $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$, то справедливо неравенство $\Delta\rho(t, \lambda, l, \cdot) \leqslant -\sigma\|l\|$, $\sigma > 0$, каким бы ни было $\lambda \leqslant \delta(\sigma)$. Тогда, независимо от выбора u, v, ξ в точке t, справедлива оценка

$$(4.15)\qquad \lim_{\lambda\to 0}\ \varepsilon^\circ(t + \lambda\Delta t, \cdot) < \varepsilon^\circ(t, \cdot) - \sigma_1,\ \sigma_1 > 0$$

и функционал имеет в точке $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$ скачок конечной величины.

Условие 4.2. В области $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$ выполняется условие

$$(4.16)\qquad \min_u \max_v \left.\frac{d\varepsilon^\circ(t, \cdot)}{dt}\right|_{u, v} \leqslant 0$$

Условие 4.2 заведомо выполнено, если $\Gamma(t, \cdot)$ состоит из единственного вектора для каждой позиции $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$ (лемма 4.4). Это условие обеспечивает при надлежащем выборе $u^\circ = u(t)$ оценку

$$\varepsilon^\circ(t + \Delta t, \cdot) \leqslant \varepsilon^\circ(t, \cdot) + o(\Delta t) \tag{4.17}$$

равномерную по всем $t \in [t_0, \vartheta]$ и всем позициям $\zeta_t(\cdot)$ из ограниченного замкнутого подмножества области $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$ $(o(\Delta t)(\Delta t)^{-1} \to 0$ при $\Delta t \to 0)$.

Действительно, пусть на промежутке $\tau \in [t, t + \Delta t]$ реализуются величины $v = v^*(\tau)$, $\xi = \xi^*(\tau)$. Пусть

$$g_* = (\Delta t)^{-1} \int_0^{\Delta t} g(t + \tau)\, d\tau$$

По векторам $v_*^* \in Q$, $\xi_*^* \in R$ выберем вектор $u_* \in P$, обеспечивающий неравенство $d\varepsilon^\circ(t, \cdot) / dt \leqslant 0$. Полагая теперь $u^*(\tau) \equiv u_*$, используя (4.9), (4.14), второе из неравенств (4.6), лемму 4.5 и условие (4.12), приходим к требуемому неравенству (4.17).

Суммируя условия (4.15), (4.16) приходим к утверждению.

Лемма 4.6. Пусть выполнены условия 4.1, 4.2 $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$ и на промежутке $\tau \in [t, t + \Delta t]$ реализовались величины x^*, $v^*(\tau)$, $\xi^*(\tau)$. Тогда существует управление $u^*(\tau) \equiv u_*$ такое, что для новой позиции $t + \Delta t, \zeta_{t+\Delta t}(\cdot)\}$, порожденной величинами x^*, $u^*(\tau)$, $v^*(\tau)$, $\xi^*(\tau)$, справедлива оценка (4.17), равномерная по всем $t \in [t_0, \vartheta]$ и всем позициям $\zeta_t(\cdot)$ из ограниченного замкнутого подмножества области $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$.

Оценка (4.17) обеспечивает для множеств начальных позиций $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$, из которых в классе программных управлений гарантировано значение критерия $\varepsilon^\circ(t, \cdot) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, \cdot) = \varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot))$, условие, аналогичное свойству стабильности множеств программного поглощения в теории дифференциальных игр [2]. Обсуждение соответствующей формализации не составляет цели данной работы.

5. Решение задачи. Из оценки (4.17) сразу вытекает существование Δ-стратегии $U_1(t, \tau_i, \zeta_{\tau_i}(\cdot))$, доставляющей результат

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot)) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) + \alpha$$

где при соответствующем разбиении промежутка $[t_0, \vartheta]$ величина α может быть сделана сколь угодно малой. На каждом промежутке разбиения $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ может быть взято постоянное управление $u^*(\tau) \equiv u_*$, которое следует выбирать из условий (4.14), (4.16). Справедливо утверждение.

Теорема 5.1. Пусть дана позиция $\{t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)\}$, $\varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) > 0$ и выполнены условия 4.1, 4.2. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует число $\Delta_\alpha > 0$ и Δ-стратегия $U_1(t, \tau_i, \zeta_{\tau_i}(\cdot))$, обеспечивающая при $\Delta < \Delta_\alpha$ условие

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot)) = \Phi^\circ(\vartheta, \cdot) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) + \alpha$$

в силу равенства (1.8).

Конструктивное описание указанной стратегии дается условиями (4.14), (4.16), (3.4), (2.1). Соотношение (2.1) подробно описано в работах [3, 4]. Пусть множество $\Gamma(t, \cdot)$ состоит из единственного элемента

$l^\circ(t, \cdot)$ для каждой точки области $\varepsilon^\circ(t, \cdot) > 0$. Условие 4.2 будет обеспечиваться управлениями $u^{(e)}$, удовлетворяющими условию максимума (см. (4.14))

$$l^{\circ\prime}(t, \cdot)X(\vartheta, t)B(t)u^{(e)} = \max_u l^{\circ\prime}(t, \cdot)X(\vartheta, t)B(t)u \tag{5.1}$$

причем выпуклое множество $U^{(e)}(t, \cdot) = \{u^{(e)}\}$ всех экстремальных элементов задачи (5.1) будет полунепрерывным сверху по направлениям $\{\Delta t, \Delta\zeta_t(\cdot)\}$, вдоль которых $\varepsilon^\circ(t, \cdot)$ непрерывен.

Из свойств $X(t, \cdot)$ (см. лемму 2.2) вытекает, что для каждой реализации $y_\vartheta[\cdot]$, зависящей от $v[t]$, $\xi[t]$, $u[t]$, множество $\{t_i\}$ скачков $X(t, \cdot)$ не более чем счетно, причем моменты появления скачков зависят лишь от $v[t]$, $\xi[t]$. В свою очередь, реализация $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(t, \zeta_t(\cdot))$, порожденная $y[t]$, $u[t]$, может иметь скачки лишь на множестве $\{t_i\}$. Последнее гарантирует существование решения системы (1.4)—(1.6), когда $U(t, \cdot) = U^{(e)}(t, \cdot)$. Оптимальность $U^{(e)}(t, \cdot)$ обеспечивается равенством $d\varepsilon^\circ(t, \cdot) / dt \leqslant 0$, вытекающим из (5.1) и справедливым вдоль любого из движений (1.4) — (1.6), порожденных $U^{(e)}(t, \cdot)$ и $y_t[\cdot]$. Таким образом, построенная стратегия $U^{(e)}(t, \cdot)$ есть оптимальная x-стратегия, ибо функционал $U^\circ(t, X(t, \cdot)) = U^{(e)}(t, \cdot)$ полунепрерывен по $\{t, X\}$, но не по $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$.

Теорема 5.2. Пусть дана позиция $\{t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)\}$, $\varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot)) > 0$, и множества $\Gamma(t, \cdot)$, содержат по одному элементу для каждой из позиций $\{t, \zeta_t(\cdot)\}$. Тогда $U^\circ(t, X(t, \cdot))$ — оптимальная x-стратегия, обеспечивающая в силу (1.8) условие

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, \zeta_\vartheta(\cdot)) = \Phi^\circ(\vartheta, \cdot) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, \zeta_{t_0}(\cdot))$$

Заметим, наконец, что для идеально наблюдаемых систем [14] множество $X(t, \cdot)$ состоит из одной точки $x^*(t, \cdot)$ и $U^\circ = U^\circ(t, x^*(t, \cdot))$.

Поступила 18 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1973, № 2—3.
3. *Куржанский А. Б.* К теории позиционного наблюдения. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 5.
4. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* К задачам оптимального наблюдения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
5. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
6. *Fan Ky.* Existense theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions and linear transformations. Math, Z., 1957, Bd 68, Nr 2.
7. *Шелементьев Г. С.* Об одной задаче коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
8. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Задачи оптимального управления при неполной информации. Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, вып. 1. М., 1971.
9. *Желнин Ю. Н.* Об оптимальном управлении при неполной информации. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1.
10. *Пшеничный Б. Н.* О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.
11. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
12. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
13. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
14. *Никольский М. С.* Идеально наблюдаемые системы. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6.