Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СРЕДЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

А. И. Кузнецов, В. Ф. Нелепин, К. П. Станюкович

(Москва)

Рассматриваются некоторые задачи распространения звуковых волн в среде, находящейся в поле тяжести. За основу берутся точные решения для одномерного движения среды.

1. Основные уравнения и общее решение для одномерного движения среды. Уравнения одномерных движений среды в поле тяжести имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-g,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

Эта система однозначно определяет скорость u и плотность ρ при заданном уравнении состояния $p = p(\rho)$. Вводя новые переменные w, i, получим [1] (c — скорость звука)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial i}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial i}{\partial t}+u\frac{\partial i}{\partial x}+c^2\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\left(w=u+gt,\ di=\frac{dp}{\rho},\ c=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)$$

После обращения переменных $t = t(w, i)$, $x = x(w, i)$ система уравнений принимает следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial i}-u\frac{\partial t}{\partial i}+\frac{\partial t}{\partial w}=0,\quad \frac{\partial x}{\partial w}-u\frac{dt}{dw}+c^2\frac{\partial t}{\partial i}=0 \tag{1.2}$$

Пусть

$$t=\frac{\partial \psi}{\partial i},\qquad \psi=\psi(w,i) \tag{1.3}$$

Тогда из (1.2) следует

$$x=wt-\frac{\partial \psi}{\partial w}-\frac{gt^2}{2} \tag{1.4}$$

$$c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial i^2}+\frac{\partial \psi}{\partial i}=\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2} \tag{1.5}$$

Если уравнение состояния задать в виде $p = A\rho^n + B$, то $c^2 = i(n-1)$ и общее решение уравнения (1.5) запишется так:

$$\psi=\frac{\partial^r}{\partial i^r}\left[F_1\left(\sqrt{2(2r+1)i}+w\right)+F_2)\left(\sqrt{2(2r+1)i}-w\right)\right] \tag{1.6}$$

$$\left(r=\frac{3-n}{2(n-1)}\ \text{или}\ n=\frac{2r+3}{2r+1}\right)$$

Соотношения (1.3), (1.4), (1.6) образуют общее решение системы (1.1), если $p = A\rho^n + B$, где $n = (2r+3)/(2r+1)$, r — целое число.

Для большинства практически интересных задач проще искать не обращенное, а прямое решение системы уравнений (1.1). Ниже рассматриваются два таких случая ($n = -1$, $n = 3$).

1°. Пусть $p = -A/\rho + B$. (Из этого соотношения следует закон Гука $\sigma = \varepsilon E$, если учесть, что напряжение $\sigma = -p$, деформация $\varepsilon = \rho_0/\rho - 1$, и положить модуль Юнга $E = B$, $E\rho_0 = A$.)

В этом случае удобнее искать решение, если записать систему уравнений в лагранжевых координатах. Принимая во внимание, что $dp = -AdV$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\frac{\partial V}{\partial q} = -g, \qquad \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

$$q(x) = \int_0^x \rho_0\, dx = \int_0^{\xi(x,t)} \rho(\xi, t)\, d\xi, \qquad V = \frac{1}{\rho}, \qquad u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{q=\mathrm{const}}$$

Здесь $x(\xi, t)$, $\xi(x, t)$ — соответственно эйлерова и ланграржева координаты точки.

Общее решение системы (1.7) имеет вид

$$u = F_1(q + \sqrt{A}\, t) + F_2(q - \sqrt{A}\, t) \tag{1.8}$$

$$V = \frac{1}{\rho} = V_0 + \frac{gq}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}[F_1(q + \sqrt{A}\, t) - F_2(q - \sqrt{A}\, t)]$$

2°. $p = A\rho^3 + B$. (Это соотношение аппроксимирует уравнение $p = A\rho^2$.) Принимая во внимание соотношение $c^2 = dp/d\rho = 3A\rho^2$ и делая подстановку $u = {}^1/_2(\alpha + \beta)$, $c = {}^1/_2(\alpha - \beta)$, систему (11) представим в виде

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -g, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta\frac{\partial \beta}{\partial x} = -g$$

Общее решение этой системы

$$F_1(\alpha + gt, 2gx + \alpha^2) = 0, \qquad F_2(\beta + gt, 2gx + \beta^2) = 0 \tag{1.9}$$

2. Рассмотрим некоторые конкретные решения для случаев $p = -A/\rho + B$, $p = A\rho^3 + B$.

1°. Случай $p = -A/\rho + B$. Сначала рассмотрим решение для невозмущенной среды

$$u(x = 0) \equiv 0, \qquad V(x = 0) = V_0$$

и найдем, как меняется плотность по высоте. Из общего решения (1.8) получим

$$F_1(\sqrt{A}\, t) + F_2(-\sqrt{A}\, t) = 0, \quad F_1(\sqrt{A}\, t) - F_2(-\sqrt{A}\, t) = 0$$

учитывая, что по определению, $q(x) = 0$ при $x = 0$. Следовательно

$$F_1(q + \sqrt{A}\, t) = F_2(q - \sqrt{A}\, t) = 0, \quad V = V_0 + gq(x)/A \tag{2.1}$$

Найдем $q(x)$. Из определения $q(x)$ и второго соотношения (2.1) следует

$$\frac{dq}{dx} = \left(\rho_0^{-1} + \frac{gq}{A}\right)^{-1}$$

Отсюда

$$q(x) = \frac{\sqrt{A}}{\rho_0 g}\left(\sqrt{A + 2g\rho_0^2 x} - \sqrt{A}\right) \tag{2.2}$$

Подставив $q(x)$ в (2.1), получим

$$\rho = \rho_0 (1 + 2A^{-1} g\rho_0^2 x)^{-1/2}$$

Теперь рассмотрим решение для бегущей синусоидальной волны. Для волны, распространяющейся снизу вверх, граничные условия

$$u_+ (x = 0) = u_0 \sin \omega t$$

а для волны, распространяющейся сверху вниз

$$u_- (x = h) = u_0 \sin \omega t$$

Из общего решения (1.8) получим

$$u_+ (x = 0) = F_2 (\sqrt{A}\, t) = u_0 \sin \omega t$$
$$u_- (x = h) = F_1 (q (x = h) + \sqrt{A}\, t) = u_0 \sin \omega t$$

Здесь и ниже $q(x)$ определяется формулой (2.2). Отсюда найдем

$$\begin{aligned} u_\pm &= u_0 \sin \omega \left(t \mp \frac{q(x)}{\sqrt{A}}\right) \\ \rho_\pm^{-1} &= \rho_0^{-1}\left(1 + \frac{2}{A}\rho_0^2 g x\right)^{1/2} \mp \frac{u_0}{\sqrt{A}} \sin \omega \left(t \mp \frac{q(x)}{\sqrt{A}}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь и далее рассмотрим вопрос о том, может ли при данном уравнении состояния $p = p(\rho)$ возникнуть разность амплитуд скорости для волн, распространяющихся вверх и вниз по среде, если среда и в том и в другом случае находится в одинаковых условиях. При уравнении состояния $p = -A / \rho + B$, как видно из решения (2.3), различие в амплитудах скорости отсутствует. При других уравнениях состояния, как будет показано ниже, амплитуды скоростей $u_+ (x = h)$, $u_- (x = 0)$ различны.

2°. Рассмотрим два конкретных решения для случая $p = A\rho^3 + B$.

Пусть $u \equiv 0$. При $u \equiv 0$ общее решение (1.9) не должно зависеть от времени. Поэтому функции F_1 и F_2 примут следующий вид:

$$F_1 (2gx + \alpha^2) = 0, \quad F_2 (2gx + \beta^2) = 0$$

Отсюда $2gx + \alpha^2 = 2gx + \beta^2 = c_0^2$ и, следовательно

$$\alpha = -\beta = c = \sqrt{c_0^2 - 2gx}$$

При $u \neq 0$ для волны, распространяющейся вверх по среде, имеем

$$F_1 (\alpha_+ + gt,\ 2gx + \alpha_+^2) = 0, \qquad \beta_+ = -\sqrt{c_0^2 - 2gx} \tag{2.4}$$

Пусть

$$u_+(x=0)=\begin{cases}U_+, & t_1\leqslant t\leqslant t_2\\ 0, & t<t_1 \text{ или } t>t_2\end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $u = {}^1/_2\,(\alpha+\beta)$, получим

$$\alpha_+(x=0)=2u_+(x=0)+c_0=\begin{cases}2U_++c_0, & t+\alpha_0/g\in T_\alpha\\ c_0, & t+\alpha_0/g\notin T_\alpha\end{cases}\tag{2.5}$$

Здесь и далее отрезок $T_\alpha=[t_1+\alpha_0/g,\ t_2+\alpha_0/g]$, $\alpha_0=c_0$. Из (2.4) и (2.5) имеем

$$\alpha_+^2+2gx=\begin{cases}(2U_++c_0)^2, & t+\alpha_+/g\in T_\alpha\\ c_0^2, & t+\alpha_+/g\notin T_\alpha\end{cases}$$

Отсюда найдем u_+ и c_+

$$u_+=\frac{1}{2}(\alpha_++\beta_+)=\tag{2.6}$$

$$=\begin{cases}{}^1/_2\left[\sqrt{(2U_++c_0)^2-2gx}-\sqrt{c_0^2-2gx}\right], & t+\alpha_+/g\in T_\alpha\\ 0, & t+\alpha_+/g\notin T_\alpha\end{cases}$$

$$c_+=\frac{1}{2}(\alpha_+-\beta_+)=$$

$$=\begin{cases}{}^1/_2\left[\sqrt{(2U_++c_0)^2-2gx}+\sqrt{c_0^2-2gx}\right], & t+\alpha_+/g\in T_\alpha\\ \sqrt{c_0^2-2gx}, & t+\alpha_+/g\notin T_\alpha\end{cases}$$

Проведя аналогичные рассуждения для волны, распространяющейся вниз, получим

$$u_-=\frac{1}{2}(\alpha_-+\beta_-)=\tag{2.7}$$

$$=\begin{cases}{}^1/_2\left[\sqrt{c_0^2-2gx}-\sqrt{\left(2U_--\sqrt{c_0^2-2gh}\right)^2+2g(h-x)}\right], & t+\beta_-/g\in T_\beta\\ 0, & t+\beta_-/g\notin T_\beta\end{cases}$$

$$c_-=\frac{1}{2}(\alpha_--\beta_-)=$$

$$=\begin{cases}{}^1/_2\left[\sqrt{c_0^2-2gx}+\sqrt{\left(2U_--\sqrt{c_0^2-2gh}\right)^2+2g(h-x)}\right], & t+\beta_-/g\in T_\beta\\ \sqrt{c_0^2-2gx}, & t+\beta_-/g\notin T_\beta\end{cases}$$

Здесь

$$T_\beta=[t_1+\beta_0/g,\quad t_2+\beta_0/g],\quad \beta_0=-\sqrt{c_0^2-2gh}$$

Сравним решения для возмущений, распространяющихся вверх и вниз по алюминиевому стержню двухметровой длины, возникших под действием импульсной нагрузки, приложенной к нижнему или верхнему торцу стержня соответственно. Приложенную нагрузку возьмем равной $p = 10$ *кг/мм*^{2}. Для импульсной нагрузки между скоростью и напряжением существует следующая связь: $U_\pm\approx c_0\Delta\rho_\pm/\rho\approx -c_0\varepsilon_\pm\approx\approx c_0p_\pm/E$ (E — модуль Юнга). Учитывая это соотношение и неравенства $2gh\leqslant c_0$, $p/E\leqslant 1$, из (2.6), (2.7) получим

$$u_+(x=h)\approx\frac{p}{E}c_0+\frac{pgh}{Ec_0},\qquad u_-(x=0)\approx-\frac{p}{E}c_0+\frac{pgh}{Ec_0}$$

$$\Delta u=|u_+(x=h)|-|u-(x=0)|\approx\frac{2pgh}{Ec_0},\qquad \frac{\Delta u}{u}\approx\frac{2gh}{c_0^2}$$

Принимая во внимание, что для алюминия $E = 7000$ *кг/мм* $c_0 = 5500$ *м/сек*, получим

$$\Delta u\approx 10^{-5}\ м/сек,\quad u\approx 8\ м/сек,\quad \Delta u\,/\,u\approx 1.\ 25\cdot 10^{-6}$$

3. Рассмотрим линейное приближение $u\,/\,c\ll 1$. В этом случае можно пренебречь конвективными членами и систему уравнений (1.1) записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{nA}{n-1}\frac{\partial\rho^{n-1}}{\partial x}=-g,\quad \frac{nA}{n-1}\frac{\partial\rho^{n-1}}{\partial t}+nA\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{3.1}$$

$$p=A\rho^n+B$$

Пусть

$$\rho^{n-1}(x,t)=\rho_0^{n-1}-\frac{(n-1)gx}{nA}+\psi(x,t)$$

Тогда, принимая во внимание, что $c_0^2=nA\rho_0^{n-1}$ и что член $\psi(x,t)\partial u/\partial x$ второго порядка малости, преобразуем систему уравнений (3.1) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{nA}{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\quad \frac{nA}{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial t}+[c_0^2-(n-1)gx]\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{3.2}$$

Дифференцируя первое уравнение из системы (3.2) по t, а второе по x и вычитая из первого второе, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c_0^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-(n-1\ g)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Вводя новую переменную z, получим

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\left[\frac{(n-1)g}{c_0}\right]^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \frac{z^2}{4}=\left[1-\frac{(n-1)gx}{c_0^2}\right]$$

Рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\left[\frac{(n-1)g}{c_0}\right]^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{1}{z_0}\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad z_0=z(x=0)=2$$

Решение ищем в виде

$$u=u_0\exp\{j\omega t-jk_\omega(z-z_0)\}$$

Подставляя в уравнение (3.3), получим

$$k_\omega=-\frac{j}{2z_0}\pm\sqrt{\left[\frac{\omega c_0}{(n-1)g}\right]^2+\frac{1}{4z_0^2}}$$

Общее решение имеет вид

$$u=\exp\left\{-\frac{z-z_0}{2z_0}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}(u_1(\omega)\exp J_-+u_2(\omega)\exp J_+)\,d\omega$$

$$J_\pm=j\omega t\pm j(z-z_0)\sqrt{\left[\frac{\omega c_0}{(n-1)g}\right]^2+\frac{1}{4z_0^2}}$$

Здесь $u_1(\omega)$, $u_2(\omega)$ определяются граничными условиями. Учитывая, что

$$z_0 = 2, \quad z = 2\sqrt{1 - \frac{(n-1)gx}{c_0^2}} \approx 2 - \frac{(n-1)gx}{c_0^2} - \left[\frac{(n-1)gx}{2c_0^2}\right]^2$$

и предполагая $\omega \gg (n-1)g/(4c_0)$, получим

$$u \approx \left[1 + \frac{(n-1)gx}{4c_0^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(\omega)\exp J_-^\circ + u_2(\omega)\exp J_+^\circ)\, d\omega$$

$$J_\pm^\circ = j\omega t \mp j\frac{\omega x}{c_0}\left(1 + \frac{(n-1)gx}{4c_0^2}\right)$$

4. Был поставлен эксперимент по обнаружению разности амплитуд выходного сигнала для волн, распространяющихся вверх и вниз по среде. На два алюминиевых стержня двухметровой длины, изолированных латунными трубами и одинаковым образом закрепленных, одновременно подавались сигналы в виде коротких (10—20, 60—80 *нсек*) импульсов. Импульсы подавались на пьезокерамику, укрепленную на торцах стержней и полностью изолированную. Амплитуда импульсов — 1—2 *в*. На один стержень сигнал приходил на нижний торец, на второй — на верхний. Для того чтобы максимально ослабить отражение волны, концы стержней демпфировались резиной. С противоположного торца сигнал снимался и усиливался. Снимаемый сигнал имел амплитуду порядка 0.5—1.5 *мв*.

Этот эксперимент показал следующий результат: когда звуковая волна распространялась вверх, амплитуда снимаемого напряжения имела значение 1.2—1.5 *мв*, в то время как для волны, распространяющейся вниз, амплитуда снимаемого напряжения имела значение 0.4—0.5 *мв*. Тем самым качественно подтверждаются результаты приведенных решений. Интересно отметить, что точность такого эксперимента достаточна для выявления эффекта даже при указанной выше незначительной длине стержня.

Поступила 19 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной с[реды]. М., «Наука», 1971.