

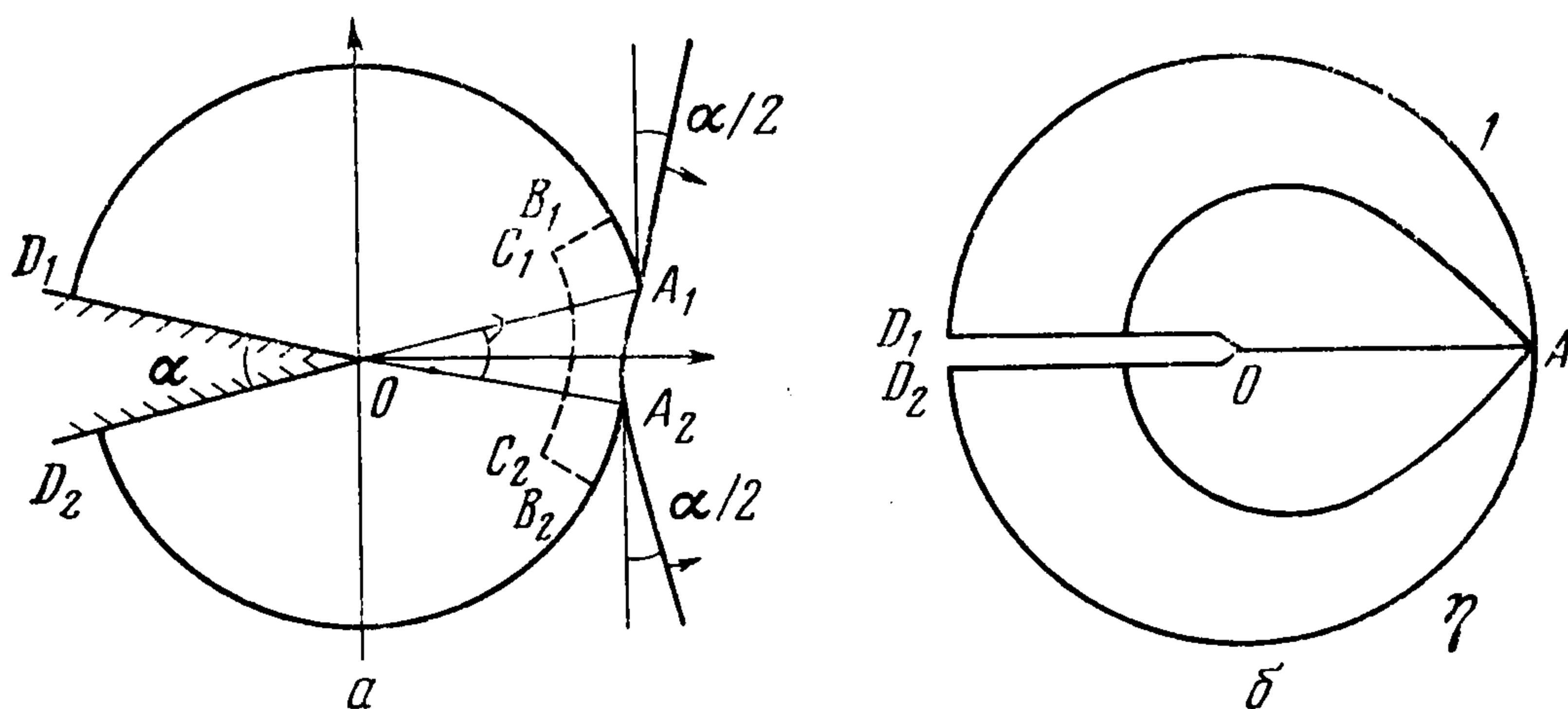
## НЕРЕГУЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН РАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Г. П. Шиндяпин

(Саратов)

Рассматривается задача нерегулярного взаимодействия слабых ударных волн, возникающая при изучении взаимного проникновения двух волн разной интенсивности при малом угле взаимодействия [1, 2]. Невозможность решения задачи в линейной постановке, когда область, примыкающая к фронту волны Маха, стягивается в точку, приводит к рассмотрению нелинейной задачи. Методом сращиваемых асимптотических разложений [3, 4] анализируется поведение решения во всей области взаимодействия. В качестве внешнего решения берется решение задачи в линейной постановке. Для внутренней области в окрестности фронта волны Маха ставится краевая задача для системы нелинейных уравнений коротких волн [5], учитывающая условия смыкания решения с внешним линейным решением и решениями в окрестности отраженных фронтов на границе внутренней области. Исследуется влияние исходных параметров на режим течения, дается приближенное решение задачи.

1. Рассмотрим взаимодействие двух плоских ударных волн в покоящемся идеальном политропическом газе, возникающее при сбегании волн с клина угла раствора  $\alpha$  (фиг. 1, а). Пусть в момент  $t = 0$  волны встречаются в точке  $O$  и начинается их взаимодействие. Выберем систему координат



Фиг. 1

нат так, чтобы ось  $Ox$  совпадала с осью симметрии клина. Для слабых ударных волн разной интенсивности

$$(1.1) \quad P_I = \frac{P_I - p_0}{\kappa p_0}, \quad P_{II} = \frac{P_{II} - p_0}{\kappa p_0}$$

при малых углах  $\alpha$  ( $\alpha < \alpha^*$ ), согласно [1, 2], возникает нерегулярное взаимодействие, когда между двумя плоскими волнами  $A_1J_1$ ,  $A_2J_2$  образуется криволинейный фронт волны Маха  $A_1A_2$  и возникает область возмущения,

ограниченная поверхностью клина и фронтами отраженных  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$  и маховской волны.

Принимая для определенности  $P_I > P_{II}$ , имеем в качестве параметров задачи

$$(1.2) \quad \varepsilon = P_I \quad (\varepsilon \ll 1), \quad \eta = P_{II}/P_I, \quad \alpha^\vee = \alpha / \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} P_I}$$

В области возмущения имеем квазистационарное (отсутствуют характерные размеры длины и времени) безвихревое с точностью до порядка  $\varepsilon^2$  включительно течение сжимаемого газа, описываемое уравнением для потенциала скорости  $f$  [6, 7]

$$(1.3) \quad (1 - r^2) f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = (\kappa - 1) \left( f - r f_r + \frac{1}{2} f_r^2 + \frac{1}{2r^2} f_{\theta}^2 \right) \times \\ \times \left( f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} \right) + (f_r^2 - 2r f_r) f_{rr} + \frac{2}{r^2} (f_{\theta} - r f_{r\theta}) f_{\theta} + \\ + \frac{1}{r^4} f_{\theta}^2 f_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2} f_r f_{\theta} f_{r\theta} - \frac{1}{3} f_r f_{\theta}^2$$

и уравнением Лагранжа — Коши

$$(1.4) \quad a^{*2} = (1 + \kappa P)^{(\kappa-1)/\kappa} = 1 - (\kappa - 1) \left( f - r f_r + \frac{1}{2} f_r^2 + \frac{1}{2r^2} f_{\theta}^2 \right) \\ P = \frac{p - p_0}{\kappa p_0}$$

Здесь безразмерные независимые  $r$ ,  $\theta$  и зависимые  $f$ ,  $P$ ,  $a^*$  переменные связаны с компонентами декартовой системы  $x$ ,  $y$ , потенциалом скорости  $\Phi$  ( $u = \Phi_x$ ,  $v = \Phi_y$ ), давлением  $p$  и скоростью звука  $a$  выражениями (нулевой индекс соответствует параметрам покоящегося газа)

$$(1.5) \quad x = a_0 t r \cos \theta, \quad y = a_0 t r \sin \theta \\ \Phi = a_0^2 t f(r, \theta), \quad p = \rho_0 a_0^2 p^*, \quad a = a_0 a^*$$

Сформулируем условия на границе области возмущений. На стенках клина  $D_1O$ ,  $D_2O$

$$(1.6) \quad f_{\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \Pi - \alpha / 2, \quad \theta = \Pi + \alpha / 2$$

На фронтах ударных волн  $r = k(\theta)$ , распространяющихся в общем случае со скоростью  $U$  по однородному потоку, потенциал которого  $f_1$ , имеют место условия динамической совместности (в переменных (1.5))

$$(1.7) \quad U - u_n = \frac{2}{\kappa + 1} a_1^2 (U - u_{1n})^{-1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (U - u_{1n}), \quad u_{\tau} = u_{1\tau} \\ \frac{p - p_1}{\kappa p_1} = \frac{2}{\kappa + 1} [a_1^{-2} (U - u_{1n})^2 - 1], \quad U = k [1 + k'^2 k^{-2}]^{-1/2}$$

Выражая нормальную  $u_n$  и касательную  $u_{\tau}$  компоненты скорости через  $f_r$ ,  $f_{\theta}$ , получим из условий (1.7) дифференциальное уравнение ударного фронта и условия на фронте

$$(1.8) \quad f_r = \frac{2k^3 + [(\kappa + 1)k'^2 + (\kappa - 1)k^2] f_{1r} + 2k' f_{1\theta}}{(\kappa + 1)(k^2 + k'^2)} - \\ - \frac{2a_1^{*2}}{(\kappa + 1)(k - f_{1r} + k'k^{-2} f_{1\theta})}$$

$$(1.9) \quad P^\nu = \frac{p - p_1}{\kappa p_1} = \frac{2}{\kappa + 1} \left[ \frac{k^2 (k - f_{1r} + k' k^{-2} f_{1\theta})^2}{a_1^{*2} (k^2 + k'^2)} - 1 \right], \quad f = f_1$$

Потенциал  $f_1$  однородного потока перед фронтом имеет вид

$$(1.10) \quad \begin{aligned} f_1 &= \varepsilon (b_1 r \cos(\theta \pm \alpha/2) + b_2) \\ b_1 &= q \left(1 + \frac{\kappa + 1}{2} \varepsilon\right)^{-1/2}, \quad q = \begin{cases} 1 & \text{на } A_1 D_1 \\ \eta & \text{на } A_2 D_2 \\ 0 & \text{на } A_2 A_2 \end{cases} \\ b_2 &= -q, \end{aligned}$$

Знак плюс соответствует потоку перед волной  $A_1 D_1$ , минус — перед волной  $A_2 D_2$ .

В случае вырождения ударной волны в линию слабого разрыва  $r = r_*(\theta)$ , согласно первому уравнению (1.7) при  $u_n \rightarrow u_{1n}$ , получим дифференциальное уравнение линии

$$(1.11) \quad r_* (1 + r_*'^2 r_*^{-2})^{-1/2} = a_1 + u_{1n}$$

На линии слабого разрыва имеют место условия непрерывности скорости и давления

$$(1.12) \quad f_r = f_{1r}, \quad f_\theta = f_{1\theta}, \quad P = P_1$$

Уравнение линии слабого разрыва получим, интегрируя (1.11)

$$(1.13) \quad r = \varepsilon b_1 \cos(\theta \pm \alpha/2) + \sqrt{a_1^{*2} - \varepsilon^2 b_1^2 \sin^2(\theta \pm \alpha/2)}$$

Здесь значения коэффициента  $b_1$  и знак в аргументе берутся согласно (1.10).

Таким образом, задача сводится к интегрированию нелинейной системы уравнений (1.3), (1.4) с граничными условиями (1.6), (1.8), (1.9) или (1.12), (1.13) и связана со значительными математическими трудностями.

2. Для слабых ударных волн при построении решения в области возмущений обычно используют [6] метод асимптотического разложения по малому параметру

$$(2.1) \quad f(r, \theta, \varepsilon) = \varepsilon f^{(1)}(r, \theta) + \dots, \quad P = \varepsilon P^{(1)} + \dots$$

получая для первых членов разложения  $f^{(1)}$ ,  $P^{(1)}$  из уравнений (1.3), (1.4) систему линейных уравнений

$$(2.2) \quad (1 - r^2) f_{rr}^{(1)} + \frac{1}{r} f_r^{(1)} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}^{(1)} = 0, \quad P^{(1)} = r f_r^{(1)} - f^{(1)}$$

В линейной постановке, рассматривая фронты ударных волн как фронты слабых возмущений и сносая при малых углах  $\alpha$  граничные условия на поверхности клина (1.6) на ось  $\theta = 0$ , исключим  $f^{(1)}$  из системы (2.2) и используем преобразование Чаплыгина  $\sigma = r^{-1} (1 - \sqrt{1 - r^2})$ . Получим уравнение Лапласа для  $P^{(1)}$  с граничными условиями согласно (1.6), (1.12)

$$\begin{aligned} P_\theta^{(1)} &= 0 & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \theta = \Pi \\ P^{(1)} &= 1 & \text{при } \sigma = 1, \quad 0 < \theta < \Pi \\ P^{(1)} &= \eta & \text{при } \sigma = 1, \quad \Pi < \theta < 2\Pi \end{aligned}$$

Решение этой краевой задачи, используя [8], запишем в виде

$$(2.3) \quad P^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \eta) \pm \frac{1}{\pi}(1 - \eta) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{ch} \ln \sigma - 1}}, \quad \eta = \frac{P_{II}}{P_I}$$

Здесь знак плюс соответствует значениям  $0 < \theta < \Pi$ , минус — значениям  $\Pi < \theta < 2\Pi$ . На фиг. 1, б показано качественно поле давлений в области возмущения согласно решению (2.3). В точке  $A$  ( $r = 1, \theta = 0$ ) решение (2.3) имеет особенность: давление меняется скачком от значения  $P^{(1)} = \eta$  на  $AD_2$  до  $P^{(1)} = 1$  на  $AD_1$ . Эта особенность — следствие физического дефекта линейной постановки, когда фронт волны Маха отсутствует, а давления на фронтах  $AD_2$  и  $AD_1$  постоянны. Отметим, что случай взаимодействия ударных волн почти равной интенсивности ( $1 - \eta \ll 1$ ), когда картина взаимодействия близка к симметричной, физически не может здесь рассматриваться как частный случай решения (2.3) при  $\eta \rightarrow 1$  и должен исследоваться особо.

3. Построим решения, описывающие течения вблизи фронтов  $A_1D_1, A_2D_2$ . Для каждого фронта исследование удобно провести в подвижной системе отсчета, скорость движения которой совпадает со скоростью  $\bar{q}$  ( $q_1, q_2$ ) однородного потока (1.10) перед фронтом волны

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= a_1 t (x_1 + q_1 / a_1), & y &= a_1 t (y_1 + q_2 / a_1) \\ x_1 &= R \cos \vartheta, & y_1 &= R \sin \vartheta \end{aligned}$$

Записывая потенциал однородного потока согласно (1.10)

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= q_1 x + q_2 y + q_3 t \\ q_1 &= \varepsilon b_1 a_0 \cos \alpha / 2, & q_2 &= -\varepsilon b_1 a_0 \sin (\pm \alpha / 2), \\ q_3 &= \varepsilon b_2 a_0^2 \end{aligned}$$

представим решение в виде

$$(3.2) \quad \Phi = \Phi_1 + a_1^2 t F(R, \vartheta), \quad a = a_1 a^{\checkmark}$$

Здесь  $a_0, a_1$  — скорость звука в покоящемся газе и однородном потоке (1.10) соответственно (размерные). Связь между компонентами подвижной системы отсчета  $R, \vartheta$  и полярными координатами  $r, \theta$  записывается согласно (1.5), (3.1).

Переходя в системе уравнений газовой динамики к переменным (3.1), (3.2), получим для функций  $F, P^{\checkmark}, a^{\checkmark}$  систему уравнений, совпадающую с системой (1.3), (1.4) ( $P^{\checkmark} = (p - p_1) / \kappa p_1$ ).

Условия на ударном фронте  $R = k(\vartheta)$  (1.8); (1.9) запишутся в виде

$$(3.3) \quad F_R = \frac{2}{\kappa + 1} \left[ \frac{k}{1 + k'^2 k^{-2}} - \frac{1}{k} \right], \quad F = 0, \quad P^{\checkmark} = k F_R$$

Условия на линии слабого разрыва, уравнение которой (1.13) в переменных  $R, \vartheta$

$$(3.4) \quad R = 1$$

примут вид

$$(3.5) \quad F_R = 0, \quad F = 0, \quad P^{\checkmark} = 0$$

Потенциал  $F$  в окрестности ударной волны и линии слабого разрыва будем искать в виде

$$(3.6) \quad F = \varepsilon^m F_1(\Delta, \vartheta) + \dots, \quad R = 1 + \varepsilon^n \varphi(\vartheta) \Delta$$

Здесь ударной волне соответствует значение  $\Delta = 1$ ; уравнение линии слабого разрыва, согласно (3.4), получим при  $\Delta = 0$ , и можно положить  $\varphi = 1$ . Из анализа поведения решения системы (1.3), (1.4) на фронте (1.8), (1.9) или (1.12), (1.13) [4] ( $f_{rr} \sim O(1)$ )  $m = 2n$ .

Подставляя (3.6) в уравнение для  $F$  (вида (1.3)), для функции  $Z(\Delta, \vartheta)$ , введенной с помощью выражения

$$(3.7) \quad F_1 = 2(\kappa + 1)^{-1} \varphi^2(\vartheta) Z(\Delta, \vartheta)$$

получим уравнение, сходное с уравнением одномерных коротких волн [9]

$$(3.8) \quad 2Z_{\Delta\Delta}(Z_{\Delta} - \Delta) - Z_{\Delta} = 0$$

Общее решение (3.8) имеет вид ( $A(\vartheta)$ ,  $B(\vartheta)$  — произвольные функции)

$$(3.9) \quad Z(\Delta, \vartheta) = \frac{1}{2} |A(\vartheta)| \Delta + B(\vartheta) \pm \frac{1}{3} \sqrt{2|A(\vartheta)|} \left[ \frac{1}{2} |A(\vartheta)| - \Delta \right]^{3/2}$$

Граничные условия для  $Z(\Delta, \vartheta)$  согласно (3.3), (3.5): на фронте ударной волны

$$(3.10) \quad Z = 0, \quad Z_{\Delta} = 2 \text{ при } \Delta = 1$$

на линии слабого разрыва

$$(3.11) \quad Z = 0, \quad Z_{\Delta} = 0 \text{ при } \Delta = 0$$

Из уравнения Лагранжа — Коши (вида (1.3)) находим для давления на фронтах выражение

$$(3.12) \quad P = P_1 + \varepsilon^n \varphi^{-1}(\vartheta) F_{1\Delta}$$

Здесь  $P_1$  характеризует давление перед фронтом согласно (1.4); показатель  $n$ , функция  $\varphi(\vartheta)$  для ударного фронта и функция  $A(\vartheta)$  для линии слабого разрыва определяются из условия срачивания внутреннего решения (3.12) с внешним решением (2.3) [4].

4. Для исследования течения в зоне взаимодействия ударных волн вблизи волны Маха  $A_1 A_2$  (фиг. 1, а) перейдем к внутренним переменным [4, 7].

$$(4.1) \quad r = 1 + \frac{\kappa + 1}{2} \varepsilon \delta, \quad \theta = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}} \varepsilon Y \quad \left( \delta = X + \frac{1}{2} Y^2 \right)$$

и представим потенциал  $f$  и давление  $P$  в виде

$$(4.2) \quad f = \varepsilon^2 \frac{\kappa + 1}{2} F^{(1)}(\delta, Y) + \dots, \quad P = \varepsilon P^{(1)} + \dots$$

Для первых членов разложения (4.2), вводя обозначения

$$F_{\delta}^{(1)} = \mu, \quad F_Y^{(1)} = \nu$$

получим, используя уравнения (1.3), (1.4), систему нелинейных уравнений

$$(4.3) \quad 2(\mu - \delta) \mu_{\delta} + \nu_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = \nu_{\delta}, \quad P^{(1)} = \mu$$

Из (1.8), (1.9) получим дифференциальное уравнение, определяющее фронт ударной волны, и условия на фронте

$$(4.4) \quad \frac{d\delta}{dY} = \pm \sqrt{2\delta - (\mu + \mu_1)}$$

$$(4.5) \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dY} + v - v_1 = 0, \quad \mu = P^{(1)}$$

Здесь, учитывая (1.10), имеем для фронтов  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$ ,  $A_1A_2$

$$(4.6) \quad \mu_1 = q, \quad v_1 = -q(Y \pm \alpha^\vee / 2)$$

Геометрически  $d\delta / dY$  определяется через угол  $\psi$  между нормалью к фронту и направлением радиус-вектора [10]

$$(4.7) \quad \frac{d\delta}{dY} = \pm \psi^\vee = \pm \psi \left| \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}} P_I \right|$$

Условие  $\mu = P^{(1)}$  на фронте выполняется автоматически согласно третьему уравнению (4.3). Условия на стенках клина (1.6) должны быть отброшены, как внешние по отношению к области разложения (4.1).

Система уравнений (4.3) представляет известную систему уравнений коротких волн [5] и описывает течение в области резких изменений параметров потока за фронтами ударных волн.

Анализ условий (4.4), (4.5) в точках  $A_1$ ,  $A_2$  пересечения ударных фронтов при условии  $\mu = P^{(1)}$  в области за фронтами приводит к выводу [10], что в первом приближении (4.2) ударные фронты  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$  представляют линии слабого разрыва. Их уравнения, согласно (4.4), есть

$$(4.8) \quad \delta = \mu_1$$

При построении решений (4.3) во внутренней области, кроме условий (4.4), (4.5), необходимо также удовлетворить условиям сращивания решения с решением вблизи фронтов (3.12) и с решением (2.3) во внешней области.

Записывая внешнее решение (2.3) во внутренних переменных (4.1) и оставляя первый член в разложении по  $\varepsilon$ , получим в качестве условия для сращивания (4.3) на границе области (знак плюс берется при  $Y \gg 0$ , минус — при  $Y < 0$ )

$$(4.9) \quad \mu = P^{(1)} = \frac{1}{2} [(1 + \eta) \pm (1 - \eta)] - \frac{1}{\pi} (1 - \eta) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y},$$

$\delta \rightarrow -\infty$

Решение (3.12) вблизи фронтов  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$  удовлетворяет условиям (3.11), смыкается с решением (2.3) при

$$n = 2, \quad B(\vartheta) = -\frac{1}{6} A^2(\vartheta), \quad |A(\vartheta)| = h(\vartheta) = \frac{(\kappa + 1)(1 - \eta)}{2\pi \sin \vartheta / 2}$$

и имеет вид при  $1 - \eta \sim O(1)$  ( $h^2 \geq 2\Delta$ )

$$(4.10) \quad P = \varepsilon \left[ \frac{1}{2} (1 + \eta) \pm \frac{1}{2} (1 - \eta) \right] \pm \varepsilon^2 \frac{h^2(\vartheta)}{\kappa + 1} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\Delta}{h^2(\vartheta)}} \right)$$

Знак плюс берется при  $0 < \vartheta < \pi$ , минус — при  $\pi < \vartheta < 2\pi$ .

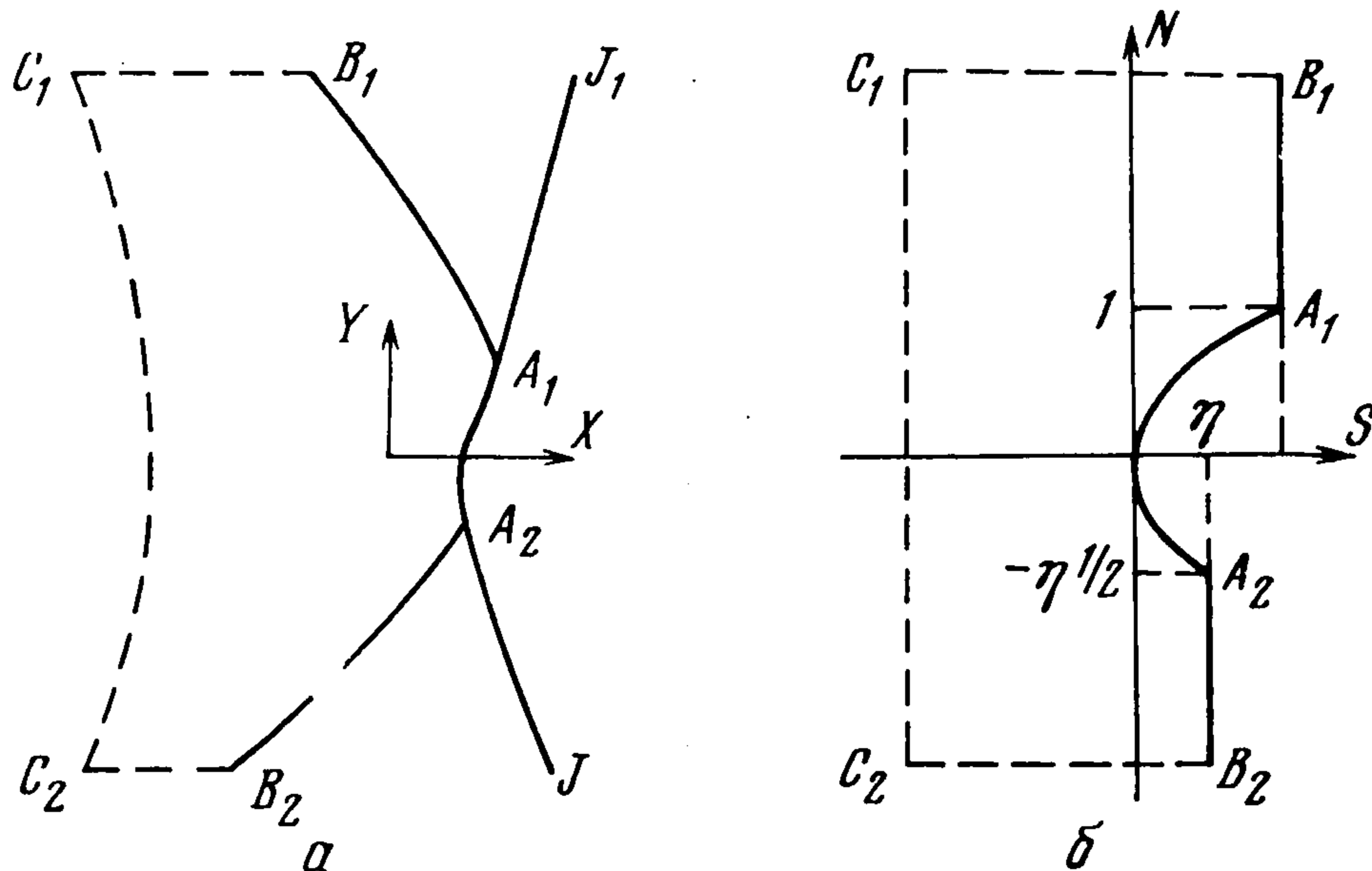
Условие смыкания решения системы (4.3) для первого члена разложения (4.2) с решением (4.10) на границе области, с учетом (4.1), (3.6) есть

$$(4.11) \quad \mu = P^{(1)} = 1/2 [(1 + \eta) \pm (1 - \eta)], \quad Y \rightarrow \pm \infty$$

Подставляя (4.11) в (4.3) и учитывая направления однородных потоков (1.10) перед линиями слабого разрыва, получим эквивалентные (4.11) условия

$$(4.12) \quad \begin{aligned} v &= -(Y + \alpha^\vee / 2), \quad Y \rightarrow \infty \\ v &= -\eta (Y - \alpha^\vee / 2), \quad Y \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

5. Таким образом, задача сводится к интегрированию системы уравнений коротких волн (4.3) в области  $A_1 B_1 C_1 C_2 B_2 A_2 A_1$  (фиг. 2, а), где система



Фиг. 2

(4.3) эллиптического типа, с условиями (4.4), (4.5), (4.8), (4.12) на границах области

$$(5.1) \quad \begin{aligned} B_1 A_1: \mu &= 1, \quad \delta = 1 \\ A_1 A_2: \mu \frac{d\delta}{dY} + v &= 0, \quad \frac{d\delta}{dY} = \pm \sqrt{2\delta - \mu} \\ A_2 B_2: \mu &= \eta, \quad \delta = \eta \\ B_2 C_2: v &= -\eta (Y - \alpha^\vee / 2), \quad Y \rightarrow -\infty, \quad \delta \leq 1 \\ C_2 C_1: \mu &= \frac{1}{2} [(1 + \eta) \pm (1 - \eta)] - \frac{1}{\pi} (1 - \eta) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y}, \quad \delta \rightarrow -\infty \\ C_1 B_1: v &= -(Y + \alpha^\vee / 2), \quad Y \rightarrow +\infty, \quad \delta \leq \eta \end{aligned}$$

Задача (4.3), (5.1) представляет краевую задачу с неизвестным элементом границы области, так как граница  $A_1 A_2$  (фронт волны Маха) в (5.1) определяется через решение  $\mu = \mu(\delta, Y)$ . Это обстоятельство существенно осложняет анализ и решение задачи.

Перейдем к новым зависимым  $\delta, Y$  и независимым  $S, N$  переменным

$$(5.2) \quad S = 2\delta - \mu, \quad N = -v / \mu$$

в которых граница  $A_1A_2$ , а также остальные участки границы будут известны. В переменных (5.2) для системы, соответствующей (4.3)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} 2(\delta - S) Y_N + N\delta_N + (2\delta - S) \delta_S - (6\delta - 5S) (\delta_S Y_N - \\ - \delta_N Y_S) = 0 \\ NY_N - \delta_N + (2\delta - S) Y_S - 2N (\delta_S Y_N - \delta_N Y_S) = 0 \end{aligned}$$

получим граничные условия

$$(5.4) \quad \begin{aligned} B_1A_1: \delta = 1, \quad S = 1 \\ A_1A_2: 2N\delta_S + \delta_N - N(2NY_S + Y_N) = 0, \quad N^2 = S \\ A_2B_2: \delta = \eta, \quad S = \eta \\ B_2C_2: Y = N + \alpha^\checkmark / 2, \quad N \rightarrow -\infty, \quad S \leq 1 \\ C_2C_1: 2\delta + \frac{1-\eta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y} = S + \frac{1}{2} [(1+\eta) \pm (1-\eta)], \quad S \rightarrow -\infty \\ C_1B_1: Y = N - \alpha^\checkmark / 2, \quad N \rightarrow +\infty, \quad S \leq \eta \end{aligned}$$

Задача (5.3), (5.4) представляет краевую задачу для системы нелинейных уравнений эллиптического типа ( $S < \delta$ ) в области  $G (B_1A_1A_2B_2C_2C_1B_1)$  с известными границами (фиг. 2, б). Преобразование (5.2) обеспечивает взаимнооднозначное соответствие плоскостей  $\delta, Y$  и  $S, N$  для внутренних точек области  $G$ , так как согласно (5.3)

$$D(\delta, Y) / D(S, N) = \delta_S Y_N - \delta_N Y_S = 0 \quad \text{при } S \geq \delta$$

Постановка задачи (5.3), (5.4) эквивалентна постановке (4.3), (5.1) и представляет интерес для математического исследования и точного решения задачи нерегулярного взаимодействия двух волн разной интенсивности.

6. Исследуем зависимость угла  $\chi$  между направлениями движения тройных точек  $A_1, A_2$  от исходных параметров  $P_I, P_{II}, \alpha$  или, согласно (1.2),  $\eta, \alpha^\checkmark$ .

Записывая с учетом (5.1), (5.2), (4.7) выражение для  $N$  в точках  $A_1, A_2$  на фронте  $A_1A_2$

$$(6.1) \quad N_1 = \psi_1^\checkmark, \quad N_2 = -\psi_2^\checkmark$$

и учитывая, согласно (5.4), что  $N_1 = 1, N_2 = -\eta^{1/2}$ , получим

$$(6.2) \quad \psi_1^\checkmark = 1, \quad \psi_2^\checkmark = \eta^{1/2}$$

Геометрически имеет место зависимость (фиг. 1, а)  $\chi + \alpha = \psi_1 + \psi_2$ , откуда для угла  $\chi$  имеет выражение

$$(6.3) \quad \chi^\checkmark = 1 - \alpha^\checkmark + \eta^{1/2}$$

или

$$(6.4) \quad \chi = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} P_I} + \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} P_{II}} - \alpha$$

Рассматриваемая модель течения реализуется при  $\chi^\checkmark \geq 0$ , т. е., согласно (6.3), при  $\alpha^\checkmark \geq 1 + \eta^{1/2}$ .

Зависимость (6.4) согласуется с экспериментальными данными Смита [1], согласно которым для слабых ударных волн при  $\alpha \checkmark \leq 1 + \eta^{1/2}$  связь между  $\chi$  и  $\alpha$  близка к линейной ( $\partial\chi / \partial\theta = 1$ ,  $\theta = \pi - \alpha$ ), при  $\alpha \checkmark > 1 + \eta^{1/2}$  значения  $\chi$  очень малы.

7. Рассмотрим приближенное решение задачи (4.3), (5.1) с помощью точного решения системы уравнений (4.3) [5].

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{2}Y^2 \operatorname{tg}^2(b\mu + c) + B \sin^2(b\mu + c) + \\ &+ \frac{1}{2}b^{-1} \sin 2(b\mu + c) + \mu \\ v &= [b^{-1} \operatorname{tg}(b\mu + c) - \mu] Y \quad (b, c, B = \text{const}) \end{aligned}$$

Решение (7.1) удовлетворяет условиям сращивания на  $C_1C_2$  (5.1), когда  $1 - \eta \sim O(1)$ , при

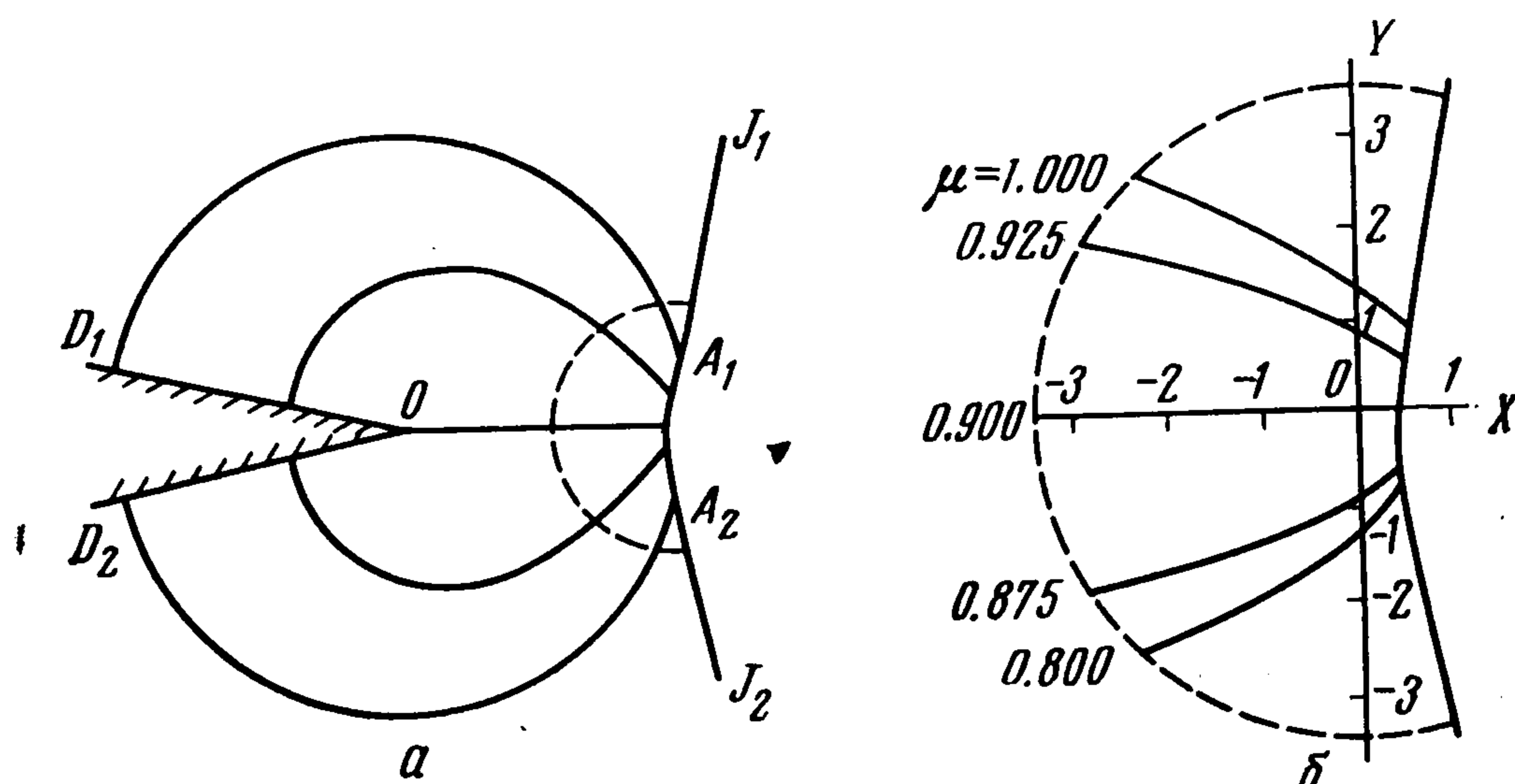
$$(7.2) \quad b = -\frac{\pi}{1 - \eta}, \quad \begin{aligned} c^+ &= -b & \text{при } Y \geq 0 \\ c^- &= -\eta b & \text{при } Y \leq 0 \end{aligned}$$

Условия на  $B_1A_1$  и  $A_2B_2$  в (5.1) выполняются автоматически в силу обращения при (7.2) в нуль аргумента  $b\mu + c$ . Также выполняются условия на границах  $C_1B_1$ ,  $C_2B_2$  в (5.1) при  $Y \rightarrow \pm \infty$  в (7.1).

Учитывая выражение (4.6) для  $v_1$  в однородных потоках за фронтами  $A_1J_1$ ,  $A_2J_2$ , получим, используя (5.2), (6.1), (6.2) координаты точек  $A_1$ ,  $A_2$

$$(7.3) \quad \delta_1 = 1, \quad Y_1 = 1 - \alpha \checkmark / 2; \quad \delta_2 = \eta, \quad Y_2 = -\eta^{1/2} + \alpha \checkmark / 2$$

Условие (5.1) на фронте ударной волны  $A_1A_2$  (сохранение касательной составляющей скорости) будет выполняться приближенно (в точках  $A_1$ ,  $A_2$  это видно при подстановке (7.3) в (7.1) при  $\alpha \checkmark \ll 2\eta^{1/2}$ ).



Фиг. 3

Из анализа решения (7.1) при  $Y = 0$  для  $\mu = \mu^*$  имеем

$$(7.4) \quad \mu^* = (1 + \eta) / 2$$

Константу  $B$  в решении (7.1) определим, интегрируя уравнение фронта ударной волны  $A_1A_2$  (удобно это делать в переменных  $\mu$ ,  $Y$ )

$$(d\delta / dY)^2 = 2\delta - \mu$$

от точки  $A_1$  до точки  $A_2$  при условиях (7.3) так, чтобы при  $Y = 0$  выполнялось условие (7.4).

На фиг. 3, а показана качественная картина распределения давления при нерегулярном взаимодействии слабых ударных волн при  $\eta = 0.8$ ,  $\alpha \sim = 0.2$ . Линии постоянного значения давления (скорости) вблизи фронта  $A_1A_2$ , согласно решению (7.1), построены на фиг. 3, б в системе координат  $X = \delta - 1/2 Y^2$ ,  $Y = Y$  ( $B = 0.79$ ). Распределение давления вблизи фронта  $A_1A_2$  (фиг. 3, б) согласуется с распределением давления во внешней области, где течение описывается решением (2.3).

Случай взаимодействия ударных волн почти равной интенсивности ( $1 - \eta \ll 1$ ) не может рассматриваться здесь как предельный при  $\eta \rightarrow 1$  и должен быть исследован отдельно. Приближенное решение задачи в случае нерегулярного отражения ударной волны от твердой стенки, соответствующее случаю симметричного взаимодействия ( $\eta = 1$ ), приведено в работе [10].

Поступила 25 VI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith W. R.* Mutual reflection of two shock waves of arbitrary strengths. *Phys. Fluid*, 1959, vol. 2, No. 5, p. 533—541.
2. *Шиндяпин Г. П.* О режиме регулярного взаимодействия слабых ударных волн. *ПММ*, 1965, т. 29, вып. 6.
3. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.
4. *Вельмисов П. А., Шиндяпин Г. П.* Асимптотические исследования нелинейных взаимодействий слабых ударных волн. В сб.: *Аэродинамика*, вып. 1 (4). Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1972.
5. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. *ПММ*, 1958, т. 22, вып. 5.
6. *Lighthill M. I.* The shock strength in supersonic «conical fields». *Philos. Mag.*, 1949, vol. 40, No. 311, p. 1202—1223.
7. *Могилевич Л. И., Шиндяпин Г. П.* О нелинейной дифракции слабых ударных волн. *ПММ*, 1971, т. 35, вып. 3.
8. *Харкевич А. А.* Неустановившиеся волновые явления. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
9. *Христианович С. А.* Ударные волны на значительном расстоянии от места взрыва. *ПММ*, 1958, т. 20, вып. 5.
10. *Шиндяпин Г. П.* О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. *ПМТФ*, 1964, № 2.