

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧАСТКОМ СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С НЕПОДВИЖНЫМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

Ю. С. Федосенко

(Горький)

Методом, развитым в работе [1], исследуются вынужденные колебания с участком скользящего режима двухмассовой системы с упругой связью между элементами, ударяющейся о неподвижный ограничитель. Рассматриваемая система представляет собой динамическую модель ряда вибрационных механизмов.

Вынужденные колебания с участком скользящего режима систем с ударными взаимодействиями представляют собой периодические движения, сопровождающиеся на периоде бесконечной последовательностью мгновенных соударений двух фиксированных элементов модели [2].

В данной работе методом [1] в рамках условий грубости пространства параметров [3] изучаются периодические движения с участком скользящего режима двухмассовой системы с ограничителем. Постановка этой задачи вызвана тем, что в реальных системах коэффициент восстановления скорости  $R$  изменяется от удара к удару, принимая, в основном, небольшие значения (0, 0.2). В то же время области реализуемости одноударных колебаний, практически наиболее существенных среди движений с конечным числом взаимодействий на периоде, сильно сужаются при уменьшении  $R$  и становятся весьма малыми уже при  $R < 0.6$  [4]. Таким образом, стабильность заданного рабочего процесса может быть обеспечена законом движения, не зависящим или слабо зависящим от  $R$ <sup>1</sup>. В силу сказанного выше конечноударные периодические режимы мало пригодны для этой цели.

Выделенные в пространстве параметров рассматриваемой модели области существования устойчивых периодических движений с участком скользящего режима оказались достаточно широкими. Динамические характеристики этих движений в силу принятой аппроксимации скользящего режима не зависят от  $R$ .

Указанные обстоятельства подтверждают практическое значение движений с участком скользящего режима динамических систем с ударными взаимодействиями.

**1. Уравнения движения и точечное отображение.** Принимаемая для исследования модель представляет собой систему из двух масс  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных пружиной с линейной характеристикой  $s$ . На каждую из масс действует постоянная сила  $-P_1$  и  $P_2$  соответственно. Движение массы  $m_1$  ограничено неподвижной преградой, при соприкосновении с которой происходит ударное взаимодействие, характеризуемое гипотезой Ньютона. Столкновения между массой  $m_2$ , подверженной влиянию внешнего гармонического воздействия  $F \sin \Omega t$ , и массой  $m_1$ , а также неподвижной преградой отсутствуют.

Перемещения  $\eta$  массы  $m_1$  и  $\zeta$  массы  $m_2$  отсчитываются от поверхности ограничителя в одном направлении так, что в промежутках времени между

<sup>1</sup> Аналогичный вывод сделан на основе экспериментального изучения динамики вибромолота в работе [5].

соударениями в системе  $\eta > 0$ . Введем безразмерные переменные и параметры

$$y = m_2 \Omega^2 \eta / F, \quad x = m_2 \Omega^2 (\zeta + P_2 c^{-1}) / F, \quad \tau = \Omega t \\ v^2 = c / m_2 \Omega^2, \quad P = (P_1 + P_2) / F, \quad \mu = m_1 / m_2$$

Тогда при обычных для данного класса задач предположениях поведение рассматриваемой модели описывается следующими уравнениями:

$$(1.1) \quad \mu y'' = v^2 (x - y) - P, \quad x'' = v^2 (y - x) + \sin \tau, \quad y > 0$$

$$(1.2) \quad y_+^{\cdot} = -R y_-^{\cdot}, \quad y = 0$$

$$(1.3) \quad y = y^{\cdot} = 0, \quad x'' = -v^2 x + \sin \tau, \quad G(\tau) \equiv v^2 x - P < 0$$

Здесь (1.1) — уравнения безударных движений, (1.2) — ударных взаимодействий, (1.3) — возможного состояния кинематической связи между массой  $m_1$  и преградой. Через  $y_-^{\cdot}$ ,  $y_+^{\cdot}$  обозначены значения безразмерной скорости  $y^{\cdot}$  соответственно до и после мгновенного удара с коэффициентом восстановления  $R \in [0, 1)$ .

Фазовое пространство системы, образованное координатами  $y$ ,  $y^{\cdot}$ ,  $x$ ,  $x^{\cdot}$ ,  $\tau$ , пятимерно. Так как в уравнения движения переменное  $\tau$  входит явно только как аргумент  $2\pi$ -периодической функции, то гиперплоскости  $\tau = \text{const}$ , отличающиеся на  $2\pi n$  ( $n$  — целое), отождествляем.

В случае колебаний модели с соударениями изображающая точка  $M(y, y^{\cdot}, x, x^{\cdot}, \tau)$ , двигаясь в области  $y > 0$  фазового пространства, попадает в некоторый момент времени  $\tau_0$  на полуповерхность ударных взаимодействий  $\Pi(y = 0, y^{\cdot} < 0)$  в точку  $M_0(0, y_0^{\cdot}, x_0, x_0^{\cdot}, \tau_0)$ , где

$$(1.4) \quad y_0^{\cdot} = y_-^{\cdot}(\tau_0), \quad x_0 = x(\tau_0), \quad x_0^{\cdot} = x^{\cdot}(\tau_0)$$

Затем мгновенно перемещается по закону (1.2) на полуповерхность  $y = 0, y^{\cdot} > 0$ , откуда она выходит в область  $y > 0$ , пока в момент  $\tau_1$  вновь не попадет на  $\Pi$  в точку  $M_1(0, y_1^{\cdot}, x_1, x_1^{\cdot}, \tau_1)$ . Порождаемое такими движениями точечное отображение  $M_1 = T(M_0)$  полуповерхности  $\Pi$  в себя определяется в результате интегрирования дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями (1.4) и может быть представлено следующей системой трансцендентных соотношений:

$$(1.5) \quad v^2 \varepsilon \sin(\sigma_0 + \tau_0) - 1/2 P g (\sigma_0 + \tau_0)^2 + r_1 + r_2 \sigma_0 + r_3 \cos \omega \sigma_0 + \\ + r_4 \sin \omega \sigma_0 = 0 \\ \mu y_1^{\cdot} - v^2 \varepsilon \cos(\sigma_0 + \tau_0) + P g (\sigma_0 + \tau_0) - r_2 + \omega (r_3 \sin \omega \sigma_0 - \\ - r_4 \cos \omega \tau_0) = 0 \\ (\mu - v^2) \varepsilon \sin(\sigma_0 + \tau_0) + P [1/2 g (\sigma_0 + \tau_0)^2 - \omega^{-2}] - \\ - r_1 - r_2 \sigma_0 + \mu (r_3 \cos \omega \sigma_0 + r_4 \sin \omega \sigma_0 + x_1) = 0 \\ (\mu - v^2) \varepsilon \cos(\sigma_0 + \tau_0) + P g (\sigma_0 + \tau_0) - r_2 - \\ - \mu [\omega (r_3 \sin \omega \sigma_0 - r_4 \cos \omega \sigma_0) + x_1^{\cdot}] = 0$$

Здесь

$$g = \mu / (1 + \mu), \quad \omega^2 = v^2 / g, \quad \varepsilon = 1 / (1 - \omega^2) \\ r_1 = g [x_0 - P (\mu^{-1} \omega^{-2} - 1/2 \tau_0^2) + \sin \tau_0] \\ r_2 = g (x_0^{\cdot} - R \mu y_0^{\cdot} + P \tau_0 + \cos \tau_0) \\ r_3 = g (P \mu^{-1} \omega^{-2} - \varepsilon \sin \tau_0 - x_0) \\ r_4 = -g \omega^{-1} (x_0^{\cdot} + R y_0^{\cdot} + \varepsilon \cos \tau_0)$$

$\sigma_0 = \tau_1 - \tau_0$  — наименьший простой положительный корень первого уравнения (1.5).

2. Вывод уравнений границы области скользящих движений. При попадании изображающей точки в момент  $\tau_0$  на пластинку скользящих движений  $\Pi_s$ , расположенную на полуповерхности  $\Pi$  между многообразием  $y^* = 0$  и некоторой границей  $\Gamma_s$ , дальнейшее ее движение происходит по бесконечной чередующейся последовательности ударно-безударных участков фазовой траектории и завершается в точке схода  $M_s(0, 0, x_s, x_s^*, \tau_s)$ .

В автономном варианте системы (1.1) — (1.3) —  $F = 0$  при  $P_1 = P_2 = 0$  вопрос о бесконечноударном взаимодействии двухмассовой системы с ограничителем рассмотрен в работе [6] (для случая  $y_0^* = x_0^*$ ) и в примере 3 работы [1].

С ростом номера соударения  $i$  временные интервалы  $\sigma_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  уменьшаются, и фазовая траектория скользящего режима приближается к определяемой соотношениями (1.3) траектории движения модели с наложенной кинематической связью [2]. Необходимое условие скользящего режима  $y^* < 0$  будет при этом все меньше отличаться от так же записываемого условия движения системы в состоянии кинематической связи (неравенство (1.3)). Имея в виду указанные особенности, скользящий режим за счет выбора момента его начала  $\tau_0$  можно идеализировать с любой степенью точности как движение системы с наложенной кинематической связью между массой  $m_1$  и неподвижной преградой после абсолютно неупругого взаимодействия [1, 2]. Такой прием позволяет аппроксимировать  $M_s$  фазовой точкой, отвечающей окончанию движения модели по уравнениям (1.3), и следовательно, определить координаты точки схода из условий

$$(2.1) \quad G(\tau_s) = 0, \quad G^*(\tau_s) > 0$$

Таким образом

$$(2.2) \quad y_s = 0, \quad y_s^* = 0, \quad x_s = P / v^2$$

Для нахождения остальных координат  $x_s^*, \tau_s$  из (2.1) в результате интегрирования дифференциального уравнения (1.3) с начальными условиями (1.4) имеем зависимости

$$(2.3) \quad \varphi_0 \equiv P - v^2 [(x_0 - a \sin \tau_0) \cos v h_0 + a \sin (\tau_0 + h_0)] - \\ - v (x_0^* - a \cos \tau_0) \sin v h_0 = 0$$

$$(2.4) \quad x_s^* = v (a \sin \tau_0 - x_0) \sin v h_0 + (x_0^* - a \cos \tau_0) \cos v h_0 + \\ + a \cos (\tau_0 + h_0) = 0, \quad a = (v^2 - 1)^{-1}$$

Здесь  $h_0 = \tau_s - \tau_0$  — длительность скользящего режима, определяемая как наименьший положительный корень уравнения (2.3), удовлетворяющий условию  $x_s^* > 0$ .

Порождаемое соотношениями (2.2) — (2.4) преобразование  $M_0 \rightarrow M_s$  обозначим через  $S$ .

На граничном многообразии  $\Gamma_s$ , согласно [1], величины  $\sigma_0$  и  $\sigma_5$  связаны равенством

$$(2.5) \quad \sigma_0 = \Theta h_0$$

где коэффициент длительности скользящего режима  $\Theta$  — известная функция от  $R$ .

Уравнение (2.5) совместно с (2.3) и первым уравнением (1.5) накладывает на координаты точки  $M_0$  дополнительную связь и позволяет тем самым определить в первом приближении границу  $\Gamma_s$  области существования скользящих режимов. Уточняющие приближения  $\Gamma_s$  могут быть получены путем рассмотрения обратных точечных отображений  $T^{-k}(\Gamma_s)$ , как это сделано, например, в работе [7]. При этом всякий раз будет смещаться лишь номер соударения, принимаемого за начало скользящего режима.

**3. Уравнения неподвижной точки.** В точке схода скользящий режим заканчивается. Последующее движение осуществляется по выходящей из точки схода фазовой траектории безударных движений до момента  $\tau'$  очередного прихода траектории на полуповерхность  $\Pi$  в точку  $M'(0, y', x', x', \tau')$ .

Соотношения

$$(3.1) \quad \varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

для вычисления величин  $y', x', x', \sigma_s = \tau' - \tau_s$  с точностью до обозначений совпадают с соответствующими уравнениями (1.5) и получаются из них заменой в обозначениях фазовых координат индексов 0 и 1 индексом  $s$  и штрихом соответственно.

Если  $M' \in \Pi_s$  и  $M' = M_0$ , т. е.

$$(3.2) \quad y' = y_0', \quad x' = x_0', \quad x'' = x_0'', \quad \tau' = \tau_0 \pmod{2\pi n}$$

то движение рассматриваемой модели будет в целом периодическое,  $n$ -кратное.

Изучение периодических процессов, как известно, сводится к исследованию неподвижной точки соответствующего точечного преобразования. Рассматриваемому движению с участком скользящего режима в первом приближении принятой идеализации отвечает, очевидно, неподвижная точка  $M_*$  аппроксимирующего произведения преобразований  $ST$ .

Вводя для удовлетворяющих равенствам (3.2) координат неподвижной точки  $M_*$  обозначения  $y_*, x_*, x_*, \tau_*$ , [получим для] их определения из соотношений (2.3), (2.4), (3.1) следующую систему уравнений:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & v^2 \varepsilon \sin \tau_* - 1/2 P g (2\pi n + \tau_*)^2 + \alpha_1 + \alpha_2 \omega^{-1} \beta + \\ & + \alpha_3 \cos \beta + \alpha_4 \sin \beta = 0 \\ & v^2 \varepsilon \cos \tau_* - P g (2\pi n + \tau_*) + \alpha_2 - \mu y_*' - \\ & - \omega (\alpha_3 \sin \beta - \alpha_4 \cos \beta) = 0 \\ & (\mu - v^2) \varepsilon \sin \tau_* + P [1/2 g (2\pi n + \tau_*)^2 - \omega^{-2}] - \\ & - \alpha_1 - \alpha_2 \omega^{-1} \beta + \mu (x_* + \alpha_3 \cos \beta + \alpha_4 \sin \beta) = Q \\ & \mu [x_*' - \omega (\alpha_3 \sin \beta - \alpha_4 \cos \beta)] + (\mu - v^2) \varepsilon \cos \tau_* + \\ & + P g (2\pi n + \tau_*) - \alpha_2 = 0 \\ & v^2 [(x_* - \alpha \sin \tau_*) \cos v h_* + \alpha \sin \tau_s] + \\ & + v (x_*' - \alpha \cos \tau_*) - P = 0 \end{aligned}$$



б) Нарушение непрерывности точечного преобразования  $ST$  связано с появлением в некоторый момент  $\tau^* \in (\tau_s, \tau_*)$  дополнительного взаимодействия массы  $m_1$  с неподвижной преградой. Граничная поверхность  $S$ , отвечающая такому вырождению, определяется аналитическими условиями касания фазовой траектории полуповерхности  $\Pi$

$$(4.3) \quad y(\tau^*) = 0, \quad y'(\tau^*) = 0$$

Таким образом, система уравнений многообразия  $S$  состоит из (3.3), (4.3). В развернутой записи правые части равенств (4.3) с точностью до обозначения момента касания совпадают с выражениями для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

в) Наконец, на последней части граничных поверхностей — многообразии  $S_s$  происходит вырождение бесконечноударных периодических движений в колебания системы с конечным числом ударов за период [1,7]. Уравнения связи между параметрами, определяющие вместе с (3.3) границу  $S_s$ , получаются из записанных в координатах неподвижной точки соотношений (1.5), (2.3), (2.5) как предельное условие  $M_* \in \Gamma_s$  ограничения  $M_* \in \Pi_s$ .

Построение границ области существования устойчивых периодических движений с участком скользящего режима в пространстве параметров  $\nu$ ,  $R$ ,  $\mu$ ,  $R$  проводилось посредством численных исследований соответствующих уравнений. Необходимые значения коэффициента  $\Theta$  определялись как по приближенным соотношениям [1], так и из точной формулы для линейного закона изменения  $y''(\tau)$  на заключительном этапе скользящего режима

$$(4.4) \quad \Theta^3 - 5\Theta^2 + 5\Theta + (1 - R)(2\Theta - 3) = 0, \quad \Theta \in (0, 1]$$

Эта зависимость является предельной для асимптотического представления  $\Theta$  [1] и непосредственно следует из условий существования инвариантной кривой  $y' = \gamma_s \tau^2 (\gamma_s = \Theta(\Theta - 3) / 6R)$  для соответствующего точечного отображения<sup>1</sup>.

На фиг. 1, 2 представлены отдельные сечения  $D_s$  области существования и устойчивости однократных ( $n = 1$ ) периодических движений поверхностями  $\nu = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ .

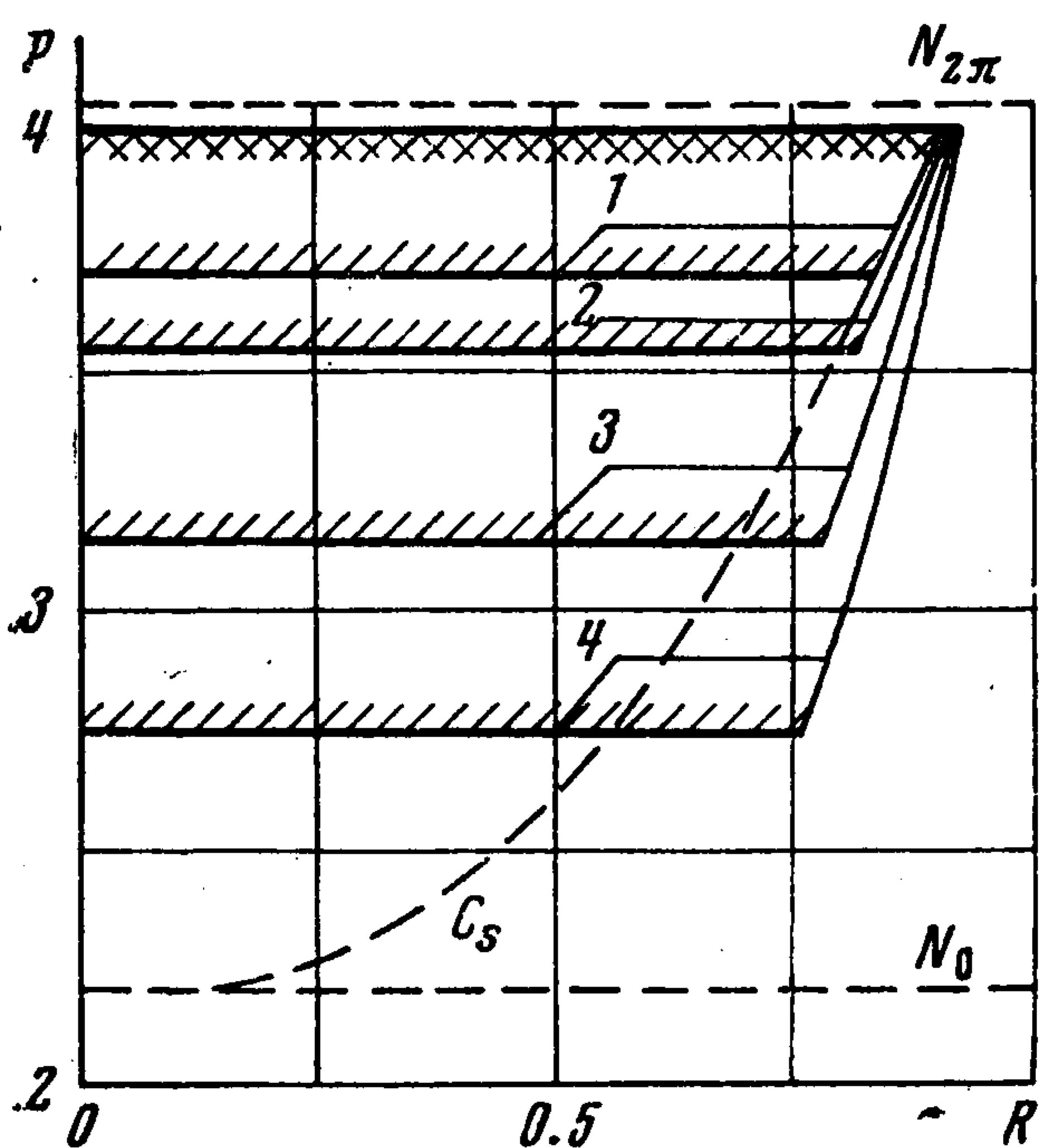
Границы 1—4 (фиг. 1) построены при  $\nu = 0.9$  и следующих значениях  $\mu$ : 1 —  $\mu = 5$ , 2 —  $\mu = 2$ , 3 —  $\mu = 1$ , 4 —  $\mu = 0.4$ . Граничные многообразия 5—8 (фиг. 2) соответствуют наборам значений параметров: 5 —  $\nu = 0.8$ ,  $\mu = 1$ ; 6 —  $\nu = 0.8$ ,  $\mu = 0.4$ ; 7 —  $\nu = 0.7$ ,  $\mu = 0.4$ ; 8 —  $\nu = 0.7$ ,  $\mu = 0.2$ .

Границы существования и устойчивости выделены штриховкой; при этом участок, заштрихованный дважды, является частью  $N$ -границы, не зависящей от  $\mu$ . Для конкретных значений  $\nu$  и  $\mu$  сечение  $D_s$  представляет собой область, заключенную между соответствующими  $N$ -границами и многообразием  $S_s$  (тонкие линии). Кривые  $S$  в рассмотренных случаях в состав границ областей существования и устойчивости не входят.

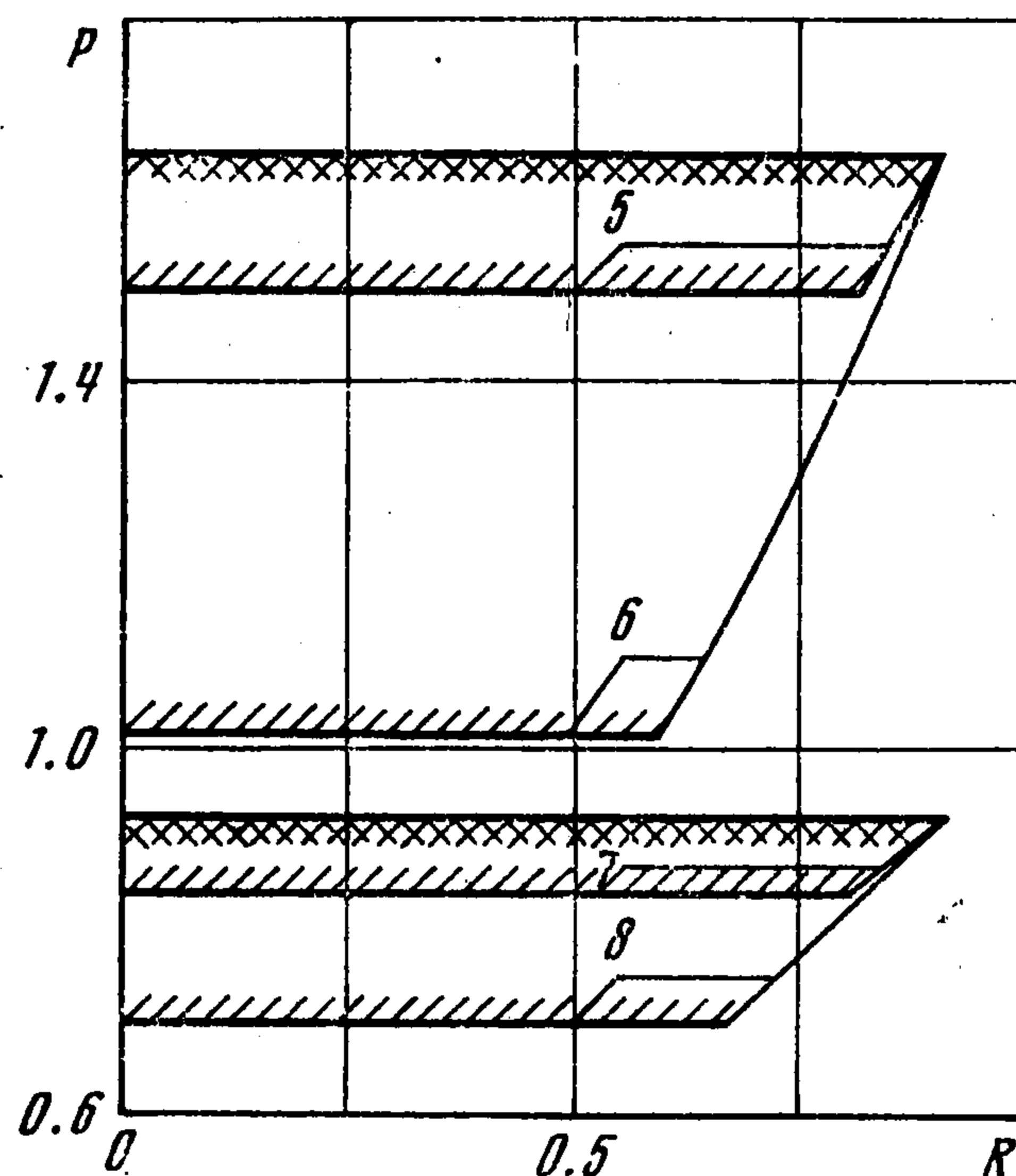
<sup>1</sup> Соотношение (4.4) может быть также получено из уравнений движения для пограничного процесса в порождающем приближении [8].

На фиг. 1 для  $\mu = 5$  пунктирными линиями изображены границы области существования:  $N_0$ ,  $N_{2\pi}$ ,  $C_s$ . При непрерывном изменении  $P$  от  $N_0$  до  $N_{2\pi}$  время скользящего режима  $h_*$  растет от нуля до  $2\pi$ . Однако, как видно из графика, значительная часть области существования отпадает из-за потери устойчивости.

Итак, из полученных результатов следует, что устойчивые периодические движения с участком скользящего режима могут осуществляться



Фиг. 1



Фиг. 2

в достаточно больших областях пространства параметров, расширяющихся с уменьшением  $\mu$  и при  $\nu \rightarrow 1$ ; в последнем случае сечения  $D_s$  смещаются вверх по оси  $P$ . В отличие от моделей с одной степенью свободы часть областей существования в двухстепенных системах может отсекается границами устойчивости колебаний рассматриваемого типа.

В силу обоснованной в работе [1] аппроксимации бесконечноударного сходящегося процесса видно, что в первом приближении динамические характеристики периодических движений с участком скользящего режима не зависят от  $R$ .

Таким образом, при расчете и проектировании двухмассовых ударно-колебательных систем в условиях изменяющихся значений коэффициента восстановления скорости для обеспечения стабильности рабочего процесса в качестве закона движения может быть назначен колебательный режим изученного типа.

Основные результаты, полученные в данной работе, были подтверждены моделированием уравнений движения системы (1.1) — (1.3) на ЭВМ, что позволило ограничиться решением задачи в первом приближении.

В заключение автор выражает признательность М. И. Фейгину за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. К теории скользящего режима в динамических системах с соударениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
  2. Фейгин М. И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
  3. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
  4. Метрикин В. С. К теории двухмассовой модели вибротрамбовки. Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12, № 3.
  5. Гурин М. А. К вопросу о коэффициенте восстановления скорости при ударе в вибромолоте для разрушения мерзлых грунтов. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1963, № 9.
  6. Нагаев Р. Ф., Якимова К. С. Об ударном взаимодействии двухмассовой упругой системы с неподвижной плоскостью. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
  7. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. Периодические движения виброударника, включающие участок скользящего режима. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
  8. Нагаев Р. Ф. Общая задача о квазипластическом ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
-