Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.31 + 534

СЛУЧАЙ ПОРОЖДАЮЩЕГО СЕМЕЙСТВА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Рассматривается задача о существовании и устойчивости в малом периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром μ, которые в порождающем приближении ($\mu = 0$) допускают семейство квазипериодических решений (речь идет только о решениях, принадлежащих при $\mu = 0$ указанному семейству). Исследуемый случай является в определенном смысле наиболее общим случаем неизолированного порождающего решения в теории малого параметра и поэтому включает в себя все рассмотренные ранее И. Г. Малкиным [1], И. И. Блехманом [2] и др.

Основная трудность исследования заключается в наличии у характеристического определителя порождающей системы задачи кратного нулевого корня, которому отвечают как простые, так и квадратные элементарные делители [3]. Это обстоятельство предопределяет наличие трех групп критериев устойчивости рассматриваемого решения. Предлагаемая здесь методика построения этих критериев предполагает, в отличие от предыдущего [1], предварительное определение не только порождающего, но и первого приближения к искомому периодическому решению.

Ранее частные аспекты рассмотренной здесь общей «смешанной» задачи изучались в работах [4,5].

1. Существование периодического решения. В настоящее время относительно общие признаки интегрируемости и методы интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка разработаны только для автономных канонических систем [6]. Последовательное использование этих методов приводит в случае знакоопределенной функции Гамильтона к определению квазипериодического общего интеграла. Выражения для сопряженных канонических переменных задачи будут при этом 2π-периодическими функциями величин

$$\psi_s = \nu_s t + \alpha_s \tag{1.1}$$

а также взаимно независимых постоянных интегрирования h_s $(s = 1, 2, \ldots)$. Общее число величин ψ_s, h_s, естественно, равно порядку исходной системы. Если величины α_s — также не зависящие одна от другой и от h_s постоянные интегрирования (а это и предполагается в дальнейшем), то величины ψ_s приобретают характер парциальных быстро вращающихся фаз, причем парциальные частоты ν_s, равно как и постоянная энергии, зависят в общем случае только от h_s. Иногда постоянным h_s придают смысл парциальных действий. Тогда о паре h_s, ψ_s обычно говорят как о канонической паре «действие — угол».

Можно представить себе более общий случай, когда исследуемую систему тем или иным способом удается разбить на две подсистемы. Одна из них — каноническая, интегрируемая, другая, либо линейна и стационарна относительно собственных переменных, либо допускает построение частного периодического решения с помощью метода А. М. Ляпунова [1] или какого-либо другого локального метода. При этом, естественно, можно чисто аналитическими средствами построить семейство квазипериодических решений исходной системы. Таким образом, построенное с помощью известных аналитических средств периодическое решение системы высокого порядка практически всегда входит в состав некоторого семейства квазипериодических решений.

Принимая во внимание сказанное, будем полагать в общем случае, что система

$$x^{\cdot} = X(x, \psi, \mu) \tag{1.2}$$

где x — вектор $k \times 1$, вектор-функция X аналитична по x и μ и 2π-периодична по безразмерному аргументу $\psi = \nu t$ $(\nu > 0)$, допускает при $\mu = 0$ семейство квазипериодических решений

$$x(t, 0) = \varphi(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_l, h_1, \ldots, h_n) \tag{1.3}$$

Здесь быстро вращающиеся фазы ψ_s $(s = 1, \ldots, l)$ и постоянные h_s $s = 1, \ldots, n)$ имеют прежний смысл. Кроме того, $l + n \leqslant k$.

Будем для общности полагать, что m первых парциальных частот семейства (1.3) существенно зависят от постоянных $h_1, \ldots, h_n$, а $l - m$ последующих тождественно равны ν, т. е.

$$\begin{aligned} &\nu_s = \nu_s(h_1, \ldots, h_n) \quad && (s = 1, \ldots, m) \\ &\nu_s \equiv \nu && (s = m+1, \ldots, l) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Отметим также, что Фурье-разложение вектор-функции φ может, вообще говоря, и не содержать нескольких (но не очень многих) первых гармоник фаз $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_l$.

Принадлежащее (1.3) подсемейство T-периодических по t решений $(T = 2\pi / \nu)$ характеризуется выполнением соотношений

$$\nu_s(h_1, \ldots, h_n) = \nu \quad (s = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

и поэтому зависит только от $l + n - m$ независимых постоянных, в число которых входят фазовые сдвиги $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Поэтому система в вариациях

$$y^{\cdot} = \frac{\partial X}{\partial x} y \tag{1.6}$$

при $\mu = 0$ $(y = y_0)$ вблизи упомянутых выше периодических движений, согласно теореме А. Пуанкаре [1], допускает l взаимно независимых T-периодических решений $\partial\varphi / \partial\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ и n-линейно возрастающих

$$\frac{\partial'\varphi}{\partial h_s} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \frac{\partial\nu_i}{\partial h_s} t + \frac{\partial\varphi}{\partial h_s} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Здесь штрих означает «полное» частное дифференцирование.

Семейство n взаимно независимых решений (1.7) линейной системы (1.6) при $\mu = 0$ может быть заменено на семейства m линейно возрастающих и $n - m$-периодических решений. Действительно, предположим, что определитель

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial h_s}\right|_{i,\, s=1,\ldots,m}$$

при условии (1.5) отличен от нуля. Тогда из соотношений

$$\sum_{s=1}^{m} \chi_{sr} \frac{\partial v_i}{\partial h_s} = \delta_{ir} \qquad (i, r = 1, \ldots, m) \tag{1.8}$$

совершенно однозначно определяются числа χ_{sr}. Величины

$$\vartheta_r = \sum_{s=1}^{m} \chi_{sr} \frac{\partial' \varphi}{\partial h_s} \tag{1.9}$$

являются линейными комбинациями первых m решений (1.7) и поэтому также удовлетворяют системе (1.6) при $\mu = 0$. С другой стороны, если подставить (1.7) в (1.9), то вследствие (1.8) после замены индекса r на i будем иметь

$$\vartheta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} t + \sigma_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.10}$$

Здесь периодическая добавка σ_i определяется по формуле

$$\sigma_i = \sum_{s=1}^{m} \chi_{si} \frac{\partial \varphi}{\partial h_s} \tag{1.11}$$

и, вследствие (1.6) и (1.10), удовлетворяет уравнению

$$\sigma_i^{\bullet} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) \sigma_i - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.12}$$

В уравнениях (1.12) и далее круглые скобки означают, что соответствующая величина вычисляется при $x = \varphi$ и $\mu = 0$.

Введем в рассмотрение величины

$$\vartheta_s = \frac{\partial' \varphi}{\partial h_s} - \sum_{i,\, r=1}^{m} \chi_{ir} \frac{\partial' \varphi}{\partial h_i} \frac{\partial v_r}{\partial h_s} \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

которые, очевидно, также удовлетворяют системе (1.6) при $\mu = 0$. Поскольку после подстановки (1.7) в (1.13) линейно возрастающие слагаемые в силу (1.8) обращаются в нуль, величины ϑ_s ($s = m + 1, \ldots, n$) периодичны по t и могут быть представлены в виде

$$\vartheta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial h_s} - \sum_{i,\, r=1}^{m} \chi_{ir} \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} \frac{\partial v_r}{\partial h_s} \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

Наряду с (1.14) справедливы также следующие, вытекающие из (1.11), выражения:

$$\vartheta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial h_s} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial h_s} \sigma_i \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

Итак, система уравнений в вариациях порождающей системы задачи ($\mu = 0$) допускает $l + n - m$ взаимно независимых T-периодических решений $\partial\varphi^{\cdot} / \partial\alpha_i$ ($i = 1, \ldots, l$) и ϑ_s ($s = m + 1, \ldots, n$). Будем предполагать, что иных независимых T-периодических решений эта система не допускает. Тогда сопряженная система

$$(1.16) \qquad z^{\cdot} = -z\,(\partial X / \partial x)$$

также допускает $l + n - m$ взаимно независимых T-периодических частных решений, которые в дальнейшем будем обозначать через $z_1, \ldots, z_{l+n-m}$.

Применительно к рассматриваемой задаче в локальной теории малого параметра [1] показывается, что для аналитичности по μ и T-периодичности по t решения $x\,(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1, \ldots, h_n, \mu)$ системы (1.2), которое при $\mu = 0$ обращается в (1.3), достаточно, чтобы трансцендентная система, состоящая из m уравнений (1.5) и, кроме того, из $l + n - m$ уравнений

$$(1.17) \qquad P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1, \ldots, h_n) \equiv \int\limits_0^T z_s \left(\frac{\partial X}{\partial \mu}\right)^{\cdot} dt = 0 \quad (s = 1, \ldots, l + n - m)$$

допускала простые решения. Эти решения, естественно однозначно определяют T-периодическое порождающее приближение в разложении

$$x = \varphi + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 \ldots$$

С другой стороны, наличие такого решения гарантирует T-периодичность последовательности поправок $x_1, x_2, \ldots$.

Отметим, что первое приближение $x_1 = (\partial x / \partial\mu)$ к решению $x\,(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1, \ldots, h_n, \mu)$, не обязательно периодическому, может быть найдено из системы

$$x_1^{\cdot} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{\cdot} x_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial \mu}\right)$$

2. Критерии устойчивости первой группы. Проведенный в п. 1 анализ показывает, что уравнения в вариациях порождающей системы допускают m групп решений $\partial\varphi / \partial\alpha_i$, ϑ_i ($i = 1, \ldots, m$), которым соответствуют нулевые характеристические показатели с квадратными элементарными делителями [1,3]. Отвечающие этим решениям корни характеристического определителя системы (1.6) аналитичны по $\mu^{1/2}$ [7]. С другой стороны, простым периодическим решениям $\partial\varphi / \partial\alpha_i$ ($i = m + 1, \ldots, l$), ϑ_s ($s = m + 1, \ldots, n$) отвечают нулевые характеристические показатели с простыми элементарными делителями. Обращающиеся в них при $\mu \to 0$ характеристические показатели системы (1.6) аналитичны по μ.

Обратимся к непосредственному определению «критических» решений системы (1.6) Вводя подстановку [1]

$$(2.1) \qquad y = \eta \exp \lambda\,(\mu)\, t$$

будем искать T-периодические решения системы

$$(2.2) \qquad \eta^{\cdot} = \frac{\partial X}{\partial x}\,\eta - \lambda\eta$$

Аналитические по μ, T-периодические частные решения (2.2) представляются в виде

$$\eta = \eta_0 + \mu\eta_1 + \mu^2 \ldots, \qquad \lambda = \lambda_1\mu + \mu^2 \ldots \tag{2.3}$$

Порождающее периодическое приближение η_0, очевидно, представимо в виде суперпозиции периодических решений уравнений в вариациях порождающей системы, т. е.

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} a_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s b_s \tag{2.4}$$

где $a_1, \ldots, a_l, b_{m+1}, \ldots, b_n$ — постоянные. Дифференцируя (2.2) по μ и затем полагая $\mu = 0$, получаем уравнения для определения η_1

$$\eta_1^{\bullet} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\eta_1 + \left[\left(\frac{\partial'}{\partial\mu}\frac{\partial X}{\partial x}\right) - \lambda_1 E_k\right]\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} a_i + \sum_{s=m+1}^{n}\vartheta_s b_s\right) \tag{2.5}$$

где E_k — единичная матрица $k \times k$. Система (2.5), поскольку в силу (1.2)

$$\left[\frac{\partial'}{\partial\mu}\frac{\partial X}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha_i} \equiv \frac{\partial^2 x^{\bullet}}{\partial\mu\partial\alpha_i} - \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\partial\alpha_i} \tag{2.6}$$

может быть при учете (1.13) приведена к виду

$$\eta_1^{\bullet} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\eta_1 + \sum_{i=1}^{l}\left[\frac{\partial x_1^{\bullet}}{\partial\alpha_i} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i} - \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\right]a_i + \\ + \sum_{s=m+1}^{n}\left[\frac{\partial^* x_1^{\bullet}}{\partial h_s} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\frac{\partial^* x_1}{\partial h_s} - \lambda_1\vartheta_s\right]b_s \tag{2.7}$$

Здесь введено обозначение

$$\frac{\partial^*}{\partial h_s} = \frac{\partial}{\partial h_s} - \sum_{i,\,r=1}^{m}\chi_{ir}\frac{\partial v_r}{\partial h_s}\frac{\partial}{\partial h_i} \tag{2.8}$$

Проведем теперь частичную ортогонализацию и нормировку периодических решений системы (1.16) согласно равенствам

$$z_r\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = \delta_{ir} \quad (i = m+1, \ldots, l), \qquad z_r\vartheta_s = \delta_{l-m+s,\,r} \quad (s = m+1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Поскольку, кроме того, определяемые, согласно (1.10), величины ϑ_i $(i = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют соотношениям $z_r\vartheta_i \equiv \mathrm{const}$ и, следовательно

$$z_r\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.10}$$

после некоторых преобразований при учете (1.16) и (2.7) получим

$$\frac{d}{dt}z_r\left(\eta_1 - \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}a_i - \sum_{s=m+1}^{n}\frac{\partial^* x_1}{\partial h_s}b_s\right) = \begin{cases} 0 & (r = 1, \ldots, m) \\ -\lambda_1 a_r & (r = m+1, \ldots, l) \\ -\lambda_1 b_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases} \tag{2.11}$$

Проинтегрируем эти соотношения по t в пределах от нуля до T. Тогда, поскольку

$$z_r\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\bigg|_0^T \equiv \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(z_r\bar{x}_1)\bigg|_0^T, \qquad z_r\frac{\partial x_1}{\partial h_s}\bigg|_0^T \equiv \frac{\partial}{\partial h_s}(z_r x_1)\bigg|_0^T, \quad z_r x_1\big|_0^T \equiv P_r \tag{2.12}$$

оказывается, что для T-периодичности величины η_1 необходимо и достаточно выполнения следующих линейных уравнений:

$$(2.13)\qquad \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial^* P_r}{\partial h_s} b_s = \begin{cases} 0 & (r = 1, \ldots, m) \\ \lambda_1 T a_r & (r = m+1, \ldots, l) \\ \lambda_1 T b_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, приходим к уравнению степени $l + n - 2m$ для определения первых приближений к «простым» критическим характеристическим показателям задачи. Вытекающие отсюда $l + n - 2m$ критериев устойчивости будем называть критериями устойчивости первой группы.

3. Дополнительные критерии устойчивости. Критические «непростые» решения системы (2.2) в отличие от (2.3) представляются в виде

$$(3.1)\qquad \eta = \eta_0 + \mu^{1/2}\eta_1 + \mu\eta_2 + \mu^{3/2} \ldots, \qquad \lambda = \lambda_1\mu^{1/2} + \lambda_2\mu + \mu^{3/2}$$

Периодическое порождающее приближение здесь, как и ранее, можно записать в форме (2.4). Однако система уравнений для определения первого приближения η_1 в силу того, что компоненты матрицы $\partial X \,/\, \partial x$ аналитичны по μ, имеет вид

$$(3.2)\qquad \eta_1^{\bullet} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) \eta_1 - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} a_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s b_s \right)$$

Общее T-периодическое решение этой системы существует, только если $a_{m+1} = \ldots = a_l = b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$, и в силу (1.12) может быть записано в форме

$$(3.3)\qquad \eta_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \sigma_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} c_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s d_s$$

где $c_1, \ldots, c_l, d_{m+1}, \ldots, d_n$ — новые постоянные интегрирования. Таким образом, η_1 зависит уже от $l + n$ постоянных. Периодическое второе приближение η_2 определяется из системы

$$(3.4)\qquad \eta_2^{\bullet} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\eta_2 + \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left[\left(\frac{\partial'}{\partial \mu} \frac{\partial X}{\partial x} \right) - \lambda_2 E_k \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} - \lambda_1^2 \sigma_i \right\} a_i - \\ - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} c_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s d_s \right)$$

Предположим теперь выполнение соотношений

$$(3.5)\qquad z_r \sigma_i = \delta_{ir} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

которые вместе с (2.9) полностью определяют выбор ортогональных и нормированных решений $z_1, \ldots, z_{l+n-m}$ системы (1.16). Тогда, действуя так же, как и ранее, при учете (2.6) и (3.4) получим

$$(3.6)\qquad \frac{d}{dt} z_r \left(\eta_2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} a_i \right) = \begin{cases} -\lambda_1^2 a_r & (r = 1, \ldots, m) \\ -\lambda_1 c_r & (r = m+1, \ldots, l) \\ -\lambda_1 d_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases}$$

Интегрируя эти соотношения по t в пределах от 0 до T при учете (2.11), получаем, что для периодичности η_2 оказывается необходимым и достаточным выполнение следующих $l+n-m$ однородных линейных уравнений относительно неизвестных $a_1, \ldots, a_m, c_{m+1}, \ldots, c_l, d_{m+1}, \ldots, d_n$:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} a_i = \begin{cases} \lambda_1^2 T a_r & (r = 1, \ldots, m) \\ \lambda_1 T c_r & (r = m+1, \ldots, l) \\ \lambda_1 T d_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases} \tag{3.7}$$

Отметим, что значения постоянных $c_1, \ldots, c_m$ и λ_2 вследствие (1.12) на T-периодичность η_2 влияния не оказывают. Выражение для η_2, получаемое в результате интегрирования (3.4), можно записать в следующем общем виде:

$$\eta_2 = \zeta + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i (\lambda_1 c_i + \lambda_2 a_i) + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} e_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s f_s \tag{3.8}$$

Здесь $e_1, \ldots, e_l, f_{m+1}, \ldots, f_n$ — постоянные, а добавка ζ — частное решение (3.4), которое в силу (3.7) T-периодично по t и удовлетворяет соотношениям (3.6). После соответствующего интегрирования этих соотношений получаем

$$z_r \zeta = \sum_{i=1}^{m} z_r \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} a_i - \begin{cases} \lambda_1^2 a_r t & (r = 1, \ldots, m) \\ \lambda_1 c_r t & (r = m+1, \ldots, l) \\ \lambda_1 d_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases} \tag{3.9}$$

Система уравнений для определения периодического третьего приближения η_3 будет

$$\begin{aligned} \eta_3^{\cdot} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) \eta_3 + \left[\left(\frac{\partial'}{\partial \mu} \frac{\partial X}{\partial x}\right) - \lambda_2 E_k\right] \Bigg[\lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \sigma_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} c_i + \\ + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s d_s\Bigg] - \lambda_3 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} a_i - \lambda_1 \Bigg[\zeta + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i (\lambda_1 c_i + \lambda_2 a_i) + \\ + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} e_i + \sum_{s=m+1}^{n} \vartheta_s f_s\Bigg] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Определение условий T-периодичности η_3 проводится обычным способом. При этом, однако, кроме соотношений (1.14), (1.16), (2.6), (2.8)—(2.10) и (3.5), следует также иметь в виду (1.11) и (3.9). В силу этих последних соотношений при учете (3.7) имеем

$$\int_0^T z_r \left(\frac{\partial'}{\partial \mu} \frac{\partial X}{\partial x}\right) \sigma_i dt = \sum_{s=1}^{m} \chi_{si} \frac{\partial P_r}{\partial h_s}, \qquad \int_0^T z_r \zeta dt = \sum_{i=1}^{m} p_{ri} a_i \tag{3.11}$$

$$p_{ri} = \int_0^T \left(z_r \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} \frac{t}{T}\right) dt$$

Окончательно приходим к следующей системе $l+n-m$ линейных неоднородных уравнений для определения неизвестных $c_1, \ldots, c_m, e_{m+1}, \ldots$

$\ldots, e_l, f_{m+1}, \ldots, f_n$:

$$(3.12)\qquad \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} c_i + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial^* P_r}{\partial h_s} d_s + \lambda_1 \sum_{i,\,s=1}^{m} \chi_{si} \frac{\partial P_r}{\partial h_s} a_i =$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} p_{ri} a_i + T \times \begin{cases} 2\lambda_1\lambda_2 a_r + \lambda_1^2 c_r & (r = 1, \ldots, m) \\ \lambda_2 c_r + \lambda_1 e_r & (r = m+1, \ldots, l) \\ \lambda_2 d_{r-l+m} + \lambda_1 f_{r-l+m} & (r = l+1, \ldots, l+n-m) \end{cases}$$

Приведенное построение позволяет определить первые два приближения λ_1 и λ_2 к непростым критическим показателям режима. Действительно, из системы (3.7) естественным образом выделяется подсистема из первых m уравнений относительно неизвестных $a_1, \ldots, a_m$. Условие равенства нулю определителя последней дает уравнение

$$(3.13)\qquad \left| \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} - \delta_{ir}\lambda_1^2 T \right|_{i,\,r=1,\ldots,m} = 0$$

которое позволяет найти m значений величины λ_1^2. В случае устойчивости все эти значения, очевидно, должны быть вещественны и отрицательны. Будем говорить, что соответствующие m неравенств ($\lambda_1^2 < 0$) и составляют критерии устойчивости периодического режима второй группы.

Выполнение критериев устойчивости второй группы обеспечивает лишь мнимость первых приближений к непростым характеристическим показателям ($\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$). Поэтому полное суждение о знаках вещественных частей этих показателей получается из выражений для вторых приближений λ_2. Соответствующие выражения легко получаются из первых m уравнений (3.12), которые образуют следующую линейную неоднородную систему для определения постоянных $c_1, \ldots, c_m$

$$(3.14)\qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} c_i - \lambda_1^2 T c_r = \lambda_1 \Bigg\{ 2\lambda_2 T a_r - \sum_{i=1}^{m} \Bigg[\sum_{s=1}^{m} \chi_{si} \frac{\partial P_r}{\partial h_s} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1^2 T} \Bigg(\sum_{s=m+1}^{l} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_s} \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_i} + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial^* P_r}{\partial h_s} \frac{\partial P_{s+l-m}}{\partial \alpha_i} \Bigg) - p_{ri} \Bigg] a_i \Bigg\}$$

При выводе системы (3.14) величины постоянных $c_{m+1}, \ldots, c_l, d_{m+1}, \ldots$ $\ldots, d_n$ были исключены посредством (3.7).

Определитель однородной части системы (3.14) совпадает с (3.13) и, следовательно, обращается в нуль. Поэтому для разрешимости этой системы на ее правые части следует наложить определенные ограничения. Соответствующие соотношения в разрешенном относительно λ_2 виде будут

$$(3.15)\qquad \lambda_2 = \frac{1}{2T \sum\limits_{r=1}^{m} a_r a_r^*} \sum_{i,\,r=1}^{m} \Bigg[\sum_{s=1}^{m} \chi_{si} \frac{\partial P_r}{\partial h_s} + \frac{1}{\lambda_1^2 T} \Bigg(\sum_{s=m+1}^{l} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_s} \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_i} +$$

$$+ \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial^* P_r}{\partial h_s} \frac{\partial P_{s+l-m}}{\partial \alpha_i} \Bigg) - p_{ri} \Bigg] a_i a_r^*$$

Здесь числа a_1^*, ..., a_m^* образуют решение системы

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial P_r}{\partial \alpha_i} a_r^* = \lambda_1^2 T a_i^* \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.16}$$

сопряженной с первой группой уравнений (3.7).

Если все m корней λ_1^2 уравнения (3.13) отличны от нуля и имеют простые элементарные делители (именно это и будем предполагать), то каждому такому корню соответствует свой набор чисел a_1, ..., a_m, a_1^*, ..., a_m^* и своя подсчитанная по формуле (3.15) величина λ_2. Непростые характеристические показатели режима, таким образом, естественным образом разбиваются на m пар вида

$$\lambda_r^{(1,2)} = \pm \lambda_1^{(r)} \mu^{1/2} + \lambda_2^{(r)} \mu \pm \mu^{3/2} \ldots \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{3.17}$$

Если выполняются критерии устойчивости второй группы, то все числа λ_2 вещественны, и для окончательного суждения об устойчивости следует проверить выполнение m неравенств $\lambda_2^{(r)} < 0$. Эту группу неравенств и будем называть критериями устойчивости третьей группы.

В заключение отметим, что полученные в работе соотношения позволяют судить о существовании и устойчивости режима и в автономном случае. Для этого, однако, порождающая система должна быть выбрана так, чтобы частота ее периодического решения равнялась неизвестной частоте искомого режима ν. В уравнениях (1.5), (1.17) величину ν, кроме того, следует заменить на первое приближение к ней ν_0. Тогда из этих уравнений в автономном случае однозначно определяются величины ν_0, $\alpha_2 - \alpha_1$, ..., $\alpha_l - \alpha_1, h_1$, ..., h_n. Существенно также, что здесь определитель системы (2.13) имеет нулевой корень и общее число критериев устойчивости первой группы уменьшается на единицу. В последнем можно убедиться, суммируя первые l столбцов определителя системы (2.13) при учете того, что

$$\partial P_r / \partial \alpha_1 + \ldots + \partial P_r / \partial \alpha_l \equiv 0$$

Поступила 21 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Блехман И. И.* К вопросу об устойчивости периодических решений квазилинейных неавтономных систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 6.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.— Л., Гостехиздат, 1946.
4. *Акуленко Л. Д.* О резонансных колебательных и вращательных движениях. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
5. *Нагаев Р. Ф.* О синхронизации в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 28, вып. 2.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. *Кушуль М. Я.* О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами, у которых чисто мнимые корни фундаментального уравнения имеют непростые элементарные делители. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.