

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫЕ С ПОВОРОТОМ ПОЛЯ

Н. Н. Баутин

(Горький)

Показано, что неизбежность осуществления бифуркаций, связанных с двойным (и тройным) предельным циклом или с петлей сепаратрисы, может быть в некоторых случаях обнаружена из глобальной оценки поведения траекторий при изменении параметров при учете знака седловой величины и обращается внимание на новые возможности прослеживания бифуркаций, возникающие при использовании монотонного поворота поля.

Методы теории бифуркаций [1] широко используются в задачах механики. Однако в общем случае задача разыскания всех возможных бифуркаций трудна и не существует регулярных методов ее решения. Отсутствуют какие-либо критерии, локально связанные с точками фазового пространства или пространства параметров, обуславливающие фактическую осуществимость в конкретной динамической системе бифуркаций, связанных с петлей сепаратрисы. Подобная же ситуация существует и для бифуркаций, связанных с возникновением предельных циклов из сгущения траекторий, так как обычно неизвестны ни уравнения предельного цикла, ни значения параметров, при которых он возникает.

В ряду средств, используемых в теории бифуркаций, важную роль играет локальный поворот поля в окрестности особых траекторий системы [1, 2]. Перенесение этой идеи на все фазовое пространство и пространство параметров в целом (осуществимое при наличии специфических особенностей исследуемой системы) позволяет в ряде случаев не только проследить все возможные в системе бифуркации, но и судить о расположении бифуркационных кривых или поверхностей.

1. Рассмотрим систему, рассматривавшуюся в [3] методом малого параметра (фазовое пространство — цилиндр)

$$(1.1) \quad \dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \beta - \sin \varphi - \lambda y - 2\alpha s \frac{y}{s^2 + y^2}$$

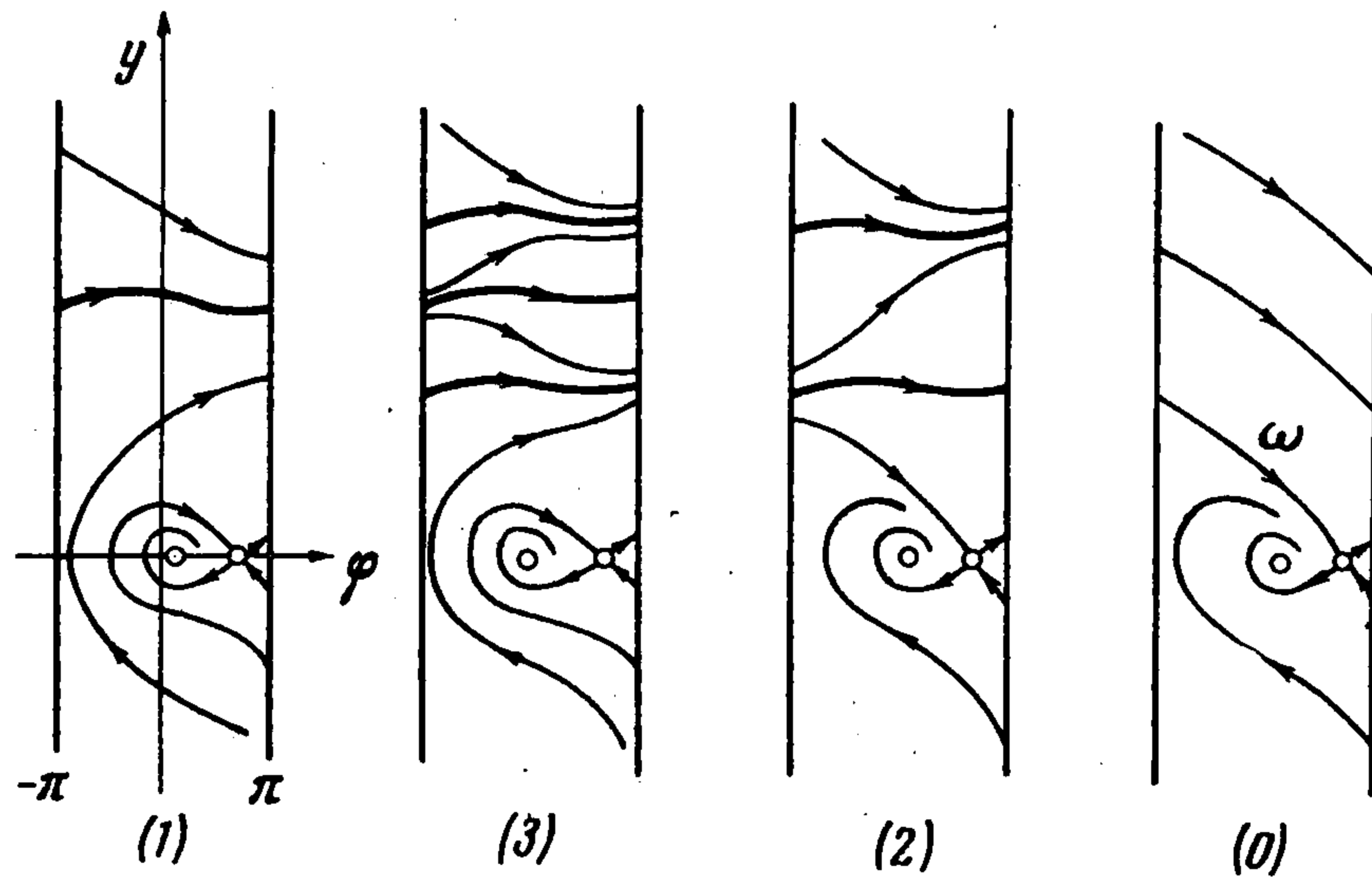
Известными методами качественной теории обнаруживается, что для всех значений параметров $\alpha > 0$, $s > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \beta < 1$, на оси $y = 0$ есть два состояния равновесия: $O_1 (\arcsin \beta, 0)$ — устойчивый узел или фокус, $O_2 (\pi - \arcsin \beta, 0)$ — седло. Траектории на нижнем полуцилиндре идут из бесконечности на верхний полуцилиндр. На нижнем полуцилиндре и вокруг точки O_1 циклов нет [4, 5]. Все бифуркации могут происходить только на верхнем полуцилиндре.

Для больших λ структура разбиения фазового пространства однозначно определяется сравнением с системой

$$(1.2) \quad \dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \beta - \sin \varphi - 2\kappa y$$

Как известно [4, 6], для каждого β ($0 < \beta < 1$) существует такое $\kappa^*(\beta)$, что при $\kappa > \kappa^*$ ω -сепаратриса седла системы (1.2), выходящая на верхний полуцилиндр, не пересекает $y = 0$ и уходит в бесконечность на верхнем

полуцилиндре. Если $\lambda > 2\kappa$, то поле направлений (1.1) повернуто относительно поля направлений (1.2) по часовой стрелке. Поэтому если $\kappa > \kappa^*$ и $\lambda > 2\kappa$, то ω -сепаратриса седла системы (1.1) также должна идти в бесконечность. Циклов нет. Структура разбиения фазового пространства эквивалентна представленной на фиг. 1(0).



Фиг. 1

Проследим за изменением качественной структуры и возможными бифуркациями при фиксированных β ($0 < \beta < 1$) и $s > 0$ в плоскости параметров $\alpha\lambda$. Качественная структура не будет зависеть от выбранных β и s . Качественные структуры, осуществляющиеся вдоль прямой $\lambda = 0$, известны [5]. Существуют такие α_1 и α_2 , что на куске $0 < \alpha < \alpha_1(\beta, s)$ оси α будет осуществляться структура разбиения без предельных циклов. На куске $\alpha_1(\beta, s) < \alpha < \alpha_2(\beta, s)$ — структура с двумя предельными циклами на верхнем полуцилиндре (нижний — устойчивый, верхний — неустойчивый). На куске $\alpha_2(\beta, s) < \alpha < \infty$ — структура с одним неустойчивым предельным циклом. Точке $\alpha = \alpha_1(\beta, s)$ соответствует структура с двойным предельным циклом, возникшим из сгущения траекторий. Точке $\alpha = \alpha_2(\beta, s)$ — структура с петлей сепаратрисы, охватывающей верхний полуцилиндр.

Проследим за сменой качественных структур и возможными бифуркациями при возрастании λ вдоль прямых $\alpha = \alpha_0$. Рассмотрим три случая.

1°. $\alpha_0 > \alpha_2$. При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ в уравнении появляется член $-\lambda y$ и бесконечность становится неустойчивой. Из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл. Эта структура изображена на фиг. 1(2). На верхнем полуцилиндре — два предельных цикла. При возрастании λ поле направлений поворачивается по часовой стрелке и предельные циклы монотонно сближаются (устойчивый опускается, неустойчивый поднимается). Так как при $\lambda > \kappa^*$ заведомо осуществляется структура разбиения, представленная на фиг. 1(0) (циклов уже нет), то существует такое $\lambda = \lambda^{++}(\alpha; \beta, s)$, для которого предельные циклы сливаются, образуя двойной полуустойчивый предельный цикл. При возрастании λ от бифуркационного значения λ^{++} двойной предельный цикл исчезает.

2°. $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$. При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ из бесконечности появляется третий предельный цикл (устойчивый). Эта структура изображена на фиг. 1(3). При возрастании λ верхний и нижний устойчивые предельные циклы монотонно опускаются, а расположенный между ними неустойчивый — монотонно поднимается. Так как при $\lambda > \kappa^*$ циклов нет, а поле поворачивается с возрастанием λ монотонно, то существуют $\lambda = \lambda^{++}(\alpha; \beta, s)$, соответствующее слиянию неустойчивого предельного цикла с верхним устойчивым, и $\lambda = \lambda_0(\alpha; \beta, s)$, соответствующее влипанию нижнего устойчивого цикла в петлю сепаратрисы на верхнем полуцилиндре (петля может возникнуть только при стягивании к петле устойчивого предельного цикла, так как седловая величина $[1, 2]$ $(P_x' + Q_y') = -(2\alpha/s + \lambda)$ отрицательна).

3°. $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. При возрастании λ от значения $\lambda = 0$ из бесконечности появляется устойчивый предельный цикл, который с возрастанием λ монотонно опускается. Так как при $\lambda > \kappa^*$ циклов нет и седловая величина отрицательна, то существует $\lambda = \lambda_0(\alpha; \beta, s)$, соответствующее петле сепаратрисы седла на верхнем полуцилиндре. При $\lambda = \lambda_0$ устойчивый предельный цикл влипает в петлю сепаратрисы.

Если монотонный поворот поля не повсюду увеличивает шаг спиралей, охватывающих цилиндр (расстояние между витками), то остается еще возможность возникновения двойного предельного цикла из сгущения траекторий с последующим разделением двойного цикла на простые — устойчивый и неустойчивый. Такая возможность действительно реализуется при возрастании λ вдоль прямой $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$, если α_0 достаточно близко к α_1 .

Точке $\lambda = 0$, $\alpha = \alpha_1$ соответствует структура разбиения фазового пространства с двойным полуустойчивым предельным циклом на верхнем полуцилиндре. Так как поле направлений поворачивается в противоположных направлениях при возрастании λ и при убывании α (соответственно по и против часовой стрелки), то предельный цикл при возрастании λ разделяется на два, а при убывании α исчезает. Из соображений непрерывности следует, что на плоскости $\alpha\lambda$ существует бифуркационная кривая $\lambda = \lambda^+(\alpha; \beta, s)$, выходящая из точки $\lambda = 0$, $\alpha = \alpha_1$ с отрицательным наклоном, для которой двойной цикл не разрушается. Прямая $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$ эту кривую пересекает, если α_0 достаточно близко к α_1 .

Проследим за изменением качественных структур при возрастании λ вдоль прямой $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1$ при α_0 достаточно близком к α_1 . При $\lambda = 0$ будет осуществляться структура фиг. 1(0). Циклов нет. При переходе к положительным λ появляется устойчивый предельный цикл из бесконечности, который будет опускаться с возрастанием λ . Для значения $\lambda = \lambda^+(\alpha_0; \beta, s)$ появляется двойной предельный цикл ниже устойчивого предельного цикла (двойной цикл не может возникнуть выше устойчивого предельного цикла, появившегося из бесконечности, так как выше цикла при повороте поля по часовой стрелке с возрастанием λ шаг спирали, накручивающейся на устойчивый цикл сверху, может только увеличиваться). С дальнейшим возрастанием λ двойной предельный цикл разде-

ляется на нижний устойчивый и верхний неустойчивый и осуществляется структура разбиения фиг. 1(3). При дальнейшем возрастании λ устойчивый цикл опускается, неустойчивый поднимается. Так как для $\lambda > \kappa^*$ циклов уже нет, то в интервале $\lambda^+ < \lambda < \kappa^*$ необходимо осуществляются еще две бифуркации: слияние устойчивого и неустойчивого предельных циклов на бифуркационной кривой $\lambda = \lambda^{++}(\alpha_0; \beta, s)$ и возникновение на бифуркационной кривой $\lambda = \lambda_0(\alpha_0; \beta, s)$ петли сепаратрисы при стягивании к ней с возрастанием λ устойчивого (так как седловая величина отрицательна) предельного цикла.

2. Проследим расположение бифуркационных кривых в плоскости $\alpha\lambda$. Бифуркационная кривая $\lambda = \lambda^{++}(\alpha; \beta, s)$ существует для всех значений $\alpha > \alpha_1$ и для значений $\alpha < \alpha_1$, достаточно близких к α_1 . Кривая $\lambda = \lambda^{++}(\alpha; \beta, s)$ имеет отрицательный наклон. Последнее следует из того, что на кривой с положительным наклоном при одновременном возрастании или убывании параметров α и λ векторное поле поворачивается монотонно и при этом двойной предельный цикл не мог бы существовать. Бифуркационная кривая $\lambda = \lambda^+(\alpha; \beta, s)$ начинается в точке $\lambda = 0, \alpha = \alpha_1$ существует в некоторой окрестности этой точки слева и по тем же причинам, что и кривая λ^{++} , имеет отрицательный наклон.

Кривая $P_x' + Q_y' = 0$ не имеет в фазовом пространстве действительных ветвей, если $\alpha < 4s\lambda$. Поэтому при условии $\alpha < 4s\lambda$ не может быть более одного цикла, охватывающего фазовый цилиндр [7]. Это обстоятельство помогает проследить поведение кривых λ^+ и λ^{++} .

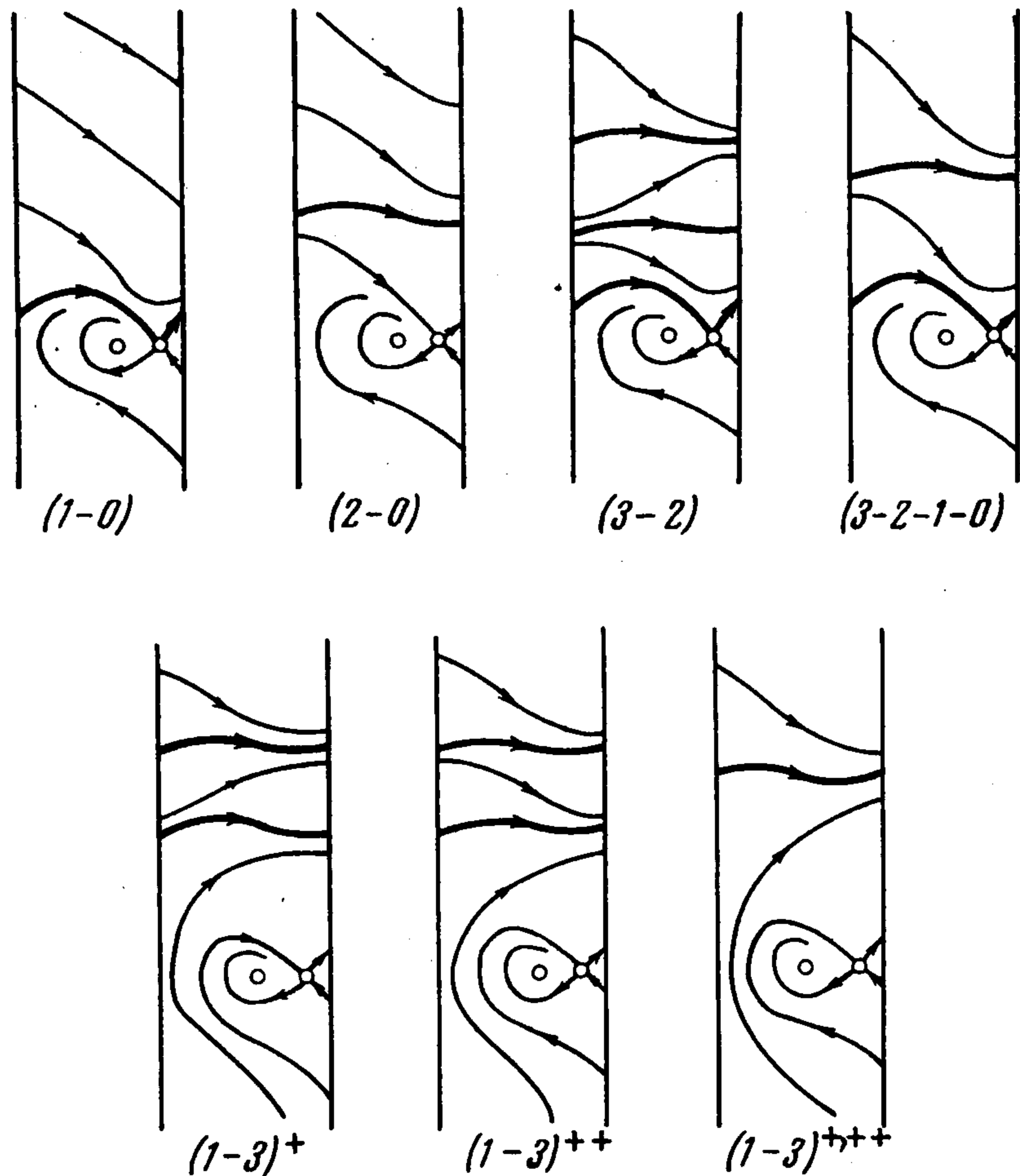
Кривые λ^+ и λ^{++} при убывании α не могут идти ни в бесконечность (так как не могут пересекать прямую $\lambda = \kappa^*$), ни к оси λ (так как не могут пересекать прямую $\alpha = 4s\lambda$), ни к оси α (так как имеют отрицательный наклон). Кривые λ^+ и λ^{++} могут при убывании α прекратиться лишь в угловой точке, соответствующей смыканию бифуркационных кривых λ^+ и λ^{++} . Для значений параметров, соответствующих этой угловой точке, система будет иметь тройной предельный цикл.

Бифуркационная кривая $\lambda = \lambda_0(\alpha; \beta, s)$ существует на интервале $0 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Любая прямая $\alpha = \alpha_0$ ($0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$) или $\lambda = \lambda_1$ ($0 \leq \lambda_1 \leq \kappa^*$) пересекает ее только один раз, так как поле направлений при возрастании λ или α поворачивается монотонно. Она проходит через точку $\alpha = 0, \lambda = \kappa^*$ (по определению κ^* [4, 6]) и точку $\alpha = \alpha_2, \lambda = 0$ (по определению α_2 [5]). Кривая λ_0 по тем же причинам, что и кривые λ^+ и λ^{++} , имеет отрицательный наклон.

Замечание. Структуры на прямой $\lambda = 0$ известны лишь с точностью до дополнительного четного числа циклов, охватывающих цилиндр [5], поэтому остается неустраненной логическая возможность существования «двойников» бифуркационных кривых λ^+ и λ^{++} .

Выясним расположение кривой λ_0 относительно кривых λ^+ и λ^{++} в предположении отсутствия «двойников». Если при возрастании λ петля сепаратрисы вокруг цилиндра возникает и затем разрушается прежде, чем появляется двойной предельный цикл, то возникает разбиение фазового пространства на траектории без предельных циклов; ω -сепаратриса

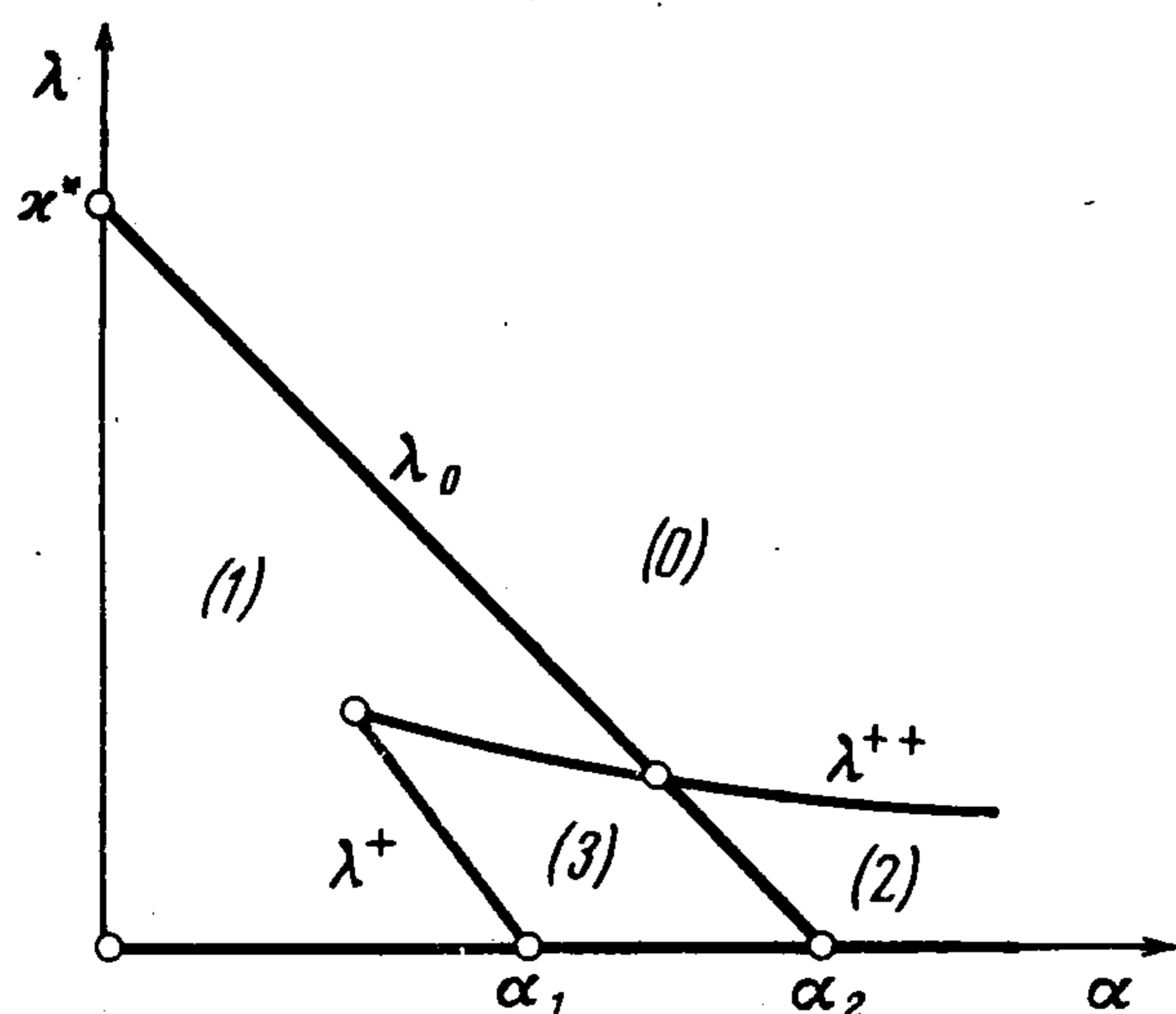
седла, выходящая на верхний полуцилиндр, накручивается на цилиндр, уходя в бесконечность. При дальнейшем возрастании λ предельные циклы возникнуть уже не могут, так как с возрастанием λ поле поворачивается по часовой стрелке и шаг спиралей на верхнем полуцилиндре при этом



Фиг. 2

только увеличивается. Никакая часть кривой λ_0 не может располагаться ниже кривой λ^+ . Поэтому кривые λ_0 и λ^+ не могут пересекаться.

Кривая λ_0 не может проходить и через угловую точку смыкания кривых λ^+ и λ^{++} . Такой точке должна соответствовать структура разбиения



Фиг. 3

фазового пространства с тройным устойчивым предельным циклом и простой устойчивой петлей сепаратрисы на верхнем полуцилиндре (седловая величина не равна нулю и отрицательна). Наличие этих элементов в структуре разбиения фазового пространства возможно лишь при существовании разделяющего их неустойчивого предельного цикла. Предположение о возможности такой структуры в угловой точке приводит к противоречию с предположением, что эта точка угловая (поворот поля при

убывании α может перевести такую структуру в структуру с одним предельным циклом, осуществляющуюся слева от прямой $\alpha = 4s\lambda$, лишь с переходом через бифуркационную кривую λ^+ , а это невозможно, если начальная точка угловая).

Кривая λ_0 пересекает λ^{++} справа от угловой точки. Разбиение пространства параметров для $\beta = \text{const}$ ($0 < \beta < 1$) и $s = \text{const}$ представлено на фиг. 3. Цифрами 0—3 отмечены области в пространстве параметров, соответствующие грубым структурам на фиг. 1, отмеченным теми же цифрами. Цифры указывают на число циклов. Негрубым структурам на фиг. 2, помеченным двумя или четырьмя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые на фиг. 3, разделяющие соответствующие области. Значки $+$ и $++$ на фиг. 2 соответственно указывают на принадлежность к бифуркационным кривым λ^+ и λ^{++} . Предельный цикл на фиг. 2 $(1-3)^{+,++}$ трехкратный.

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из состояния равновесия типа седло-узел. Математ. сб., 1959, т. 48, вып. 3.
3. Шалфеев В. Д. К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях. Изв. Высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1969 т. 12, вып. 7.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
5. Баутин Н. Н. Качественное исследование одной динамической системы. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
6. Tricomi F. Integrazione di una equazione differenziale presentata in elettrotecnica. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. Ser. 11, vol. 2, 1933, p. 1—20.
7. Dulac H. Recherche des cycles limites. C. r. Acad. sci., 1937, t. 204, No. 23.