Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.526

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ (ЛОКАЛЬНО-АВТОМОДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ)

Г. А. Тирский, Ю. Д. Шевелев

(Москва)

Предлагается аналитический метод расчета задач теории несжимаемого пограничного слоя, основанный на применении метода последовательных приближений. Система уравнений сводится к виду, удобному для интегрирования. Параметры, характеризующие внешнее течение и геометрию тела, содержатся только в коэффициентах системы и не входят в граничные условия. Преобразованные уравнения количества движения интегрируются поперек пограничного слоя от текущего значения до бесконечности с учетом граничных условий. Если интегрирование проводится от нуля до бесконечности, то уравнения переходят в соотношения Кармана. Интегрируя систему уравнений вторично с использованием граничных условий на стенке, получаем систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Для решения этой системы уравнений применяется метод последовательных приближений. Для удовлетворения граничным условиям на бесконечности на каждом шаге итераций вводятся неизвестные «управляющие» функции. Из условий на внешней границе пограничного слоя получаются дополнительные уравнения для их определения. При таком построении алгоритма итераций граничные условия как на теле, так и на внешней границе пограничного слоя выполняются автоматически.

Рассматривается локально-автомодельное приближение.

В этом случае относительно управляющих функций получается алгебраическая система уравнений. Выписывается решение в первом приближении. Результаты, полученные в первом приближении, сравниваются с результатами конечно-разностных расчетов для широкого круга задач. Приводится сравнение результатов данной работы с результатами, полученными в работе [1], для течения в окрестности критической точки. Указывается на неединственность решений уравнений трехмерного пограничного слоя.

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости около произвольной гладкой поверхности s. Уравнения трехмерного пограничного слоя для несжимаемой жидкости, полученные при обычных предположениях теории пограничного слоя, имеют вид [2]

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial u}{\partial \eta} + v\frac{\partial u}{\partial \zeta} + A_1u^2 + A_2\omega^2 + A_3u\omega = A_4 + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + v\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + B_1u^2 + B_2\omega^2 + B_3u\omega = B_4 + \nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\,u\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\,\omega\right] + \sqrt{g}\frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0$$

Граничные условия для этой системы уравнений будут

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0 \tag{1.2}$$
$$u \to u_e, \quad w \to w_e \quad \text{при} \quad \zeta \to \infty$$

Здесь ξ, η — координаты на поверхности тела, $\zeta = 0$ — уравнение поверхности; u, w и v — составляющие скорости соответственно вдоль осей ξ, η, ζ; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости; g_{11}, g_{22}, g_{12} — метрические коэффициенты; $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Коэффициенты A_1 — B_4 определяются внешним течением и геометрией тела (см. [2]).

Сведем систему уравнений трехмерного пограничного слоя к виду, удобному для интегрирования. Введем следующую замену переменных:

$$u = u_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda)$$
$$w = \beta(\xi, \eta) u_e(\xi, \eta) [G(\xi, \eta, \lambda) + \varphi E(\xi, \eta, \lambda)]$$
$$v = \sqrt{\frac{u_e(\xi, \eta)\nu}{\alpha(\xi, \eta)}} \left[K(\xi, \eta, \lambda) - \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} E \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{g_{22}}} (G + \varphi E) \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right]$$
$$\lambda = \sqrt{\frac{u_e}{\alpha\nu}} \zeta$$

где α и β — произвольные функции, выбор которых будет произведен ниже. Тогда система уравнений (1.1) может быть приведена к следующему виду (см. [2]):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} = K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^*(E^2 - 1) + N_2^* G^2 + N_3^* EG + \tag{1.3}$$
$$+ N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} = K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^*(E^2 - 1) + M_2^* G^2 + M_3^* EG +$$
$$+ N_4 E \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta}$$
$$-\frac{\partial K}{\partial \lambda} = P_1^* E + P_2^* G + N_4 \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial G}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

Граничные условия примут вид

$$E = G = K = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \tag{1.4}$$
$$E \to 1, \quad G \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

Коэффициенты N_1^*, N_2^*, N_3^*, M_1^*, M_2^*, M_3^*, P_1^*, P_2^*, N_4, N_5 зависят только от ξ и η, они связаны с геометрией поверхности и внешним течением. Проинтегрируем преобразованные уравнения количества движения системы (1.3) по переменной λ_1 от некоторого значения λ до ∞ с учетом граничных условий (1.4). Найдем

$$-\frac{\partial E}{\partial \lambda} = -K(E - 1) + (P_1^* + N_1^*)\theta_{11} + (P_2^* + N_3^*)\theta_{21} + \tag{1.5}$$
$$+ N_2^*\theta_{22} + N_1^*\theta_1 - P_2^*\theta_2 + N_4 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \eta} + N_5 \frac{\partial \theta_{12}}{\partial \eta}$$
$$-\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -KG + M_1^*(\theta_{11} + \theta_1) + (P_1^* + M_3^*)\theta_{21} +$$
$$+ (P_2^* + M_2^*)\theta_{22} + N_4 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{22}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \eta}$$

Здесь использовано асимптотическое стремление к нулю производных $\partial E/\partial\lambda$ и $\partial G/\partial\lambda$ при $\lambda \to \infty$. При этом предполагается существование интегралов

$$\theta_{11} = \int_\lambda^\infty (E-1) E d\lambda_1, \quad \theta_{21} = \int_\lambda^\infty EG d\lambda_1, \quad \theta_{22} = \int_\lambda^\infty G^2 d\lambda_1$$

$$\theta_{12} = \int_\lambda^\infty (E-1) G d\lambda_1, \quad \theta_1 = \int_\lambda^\infty (E-1) d\lambda_1, \quad \theta_2 = \int_\lambda^\infty G d\lambda_1$$

Если интегрирование проводится от нуля до бесконечности, то уравнения переходят в соотношения Кармана. В левой части (1.5) получим компоненты, пропорциональные напряжению трения на стенке.

Интегрируя уравнения (1.5) второй раз почленно поперек пограничного слоя от нуля до текущего значения λ и используя граничные условия при $\lambda = 0$, получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad & -E = \theta_{01}^* + (P_1^* + N_1^*)\theta_{11}^* + N_2^*\theta_{22}^* + (P_2^* + N_3^*)\theta_{21}^* + \\ & + N_1^*\theta_1^* - P_2^*\theta_2^* + N_4\frac{\partial}{\partial\xi}\theta_{11}^* + \varphi N_5\frac{\partial}{\partial\eta}\theta_{11}^* + N_5\frac{\partial\theta_{12}^*}{\partial\eta} \\ & -G = \theta_{02}^* + M_1^*(\theta_{11}^* + \theta_1^*) + (P_2^* + M_2^*)\theta_{22}^* + \\ & + (P_1^* + M_3^*)\theta_{21}^* + N_4\frac{\partial}{\partial\xi}\theta_{21}^* + N_5\frac{\partial}{\partial\eta}\theta_{22}^* + \varphi N_5\frac{\partial}{\partial\eta}\theta_{21}^*\end{aligned}$$

При этом были использованы граничные условия: $E = G = 0$ при $\lambda = 0$ и допущена возможность замены порядка интегрирования и дифференцирования.

Здесь

$$\begin{aligned}(1.7)\qquad & \theta_{01}^* = \int_0^\lambda K(1-E)d\lambda_1, \qquad \theta_{02}^* = -\int_0^\lambda KG\,d\lambda_1 \\ & \theta_{11}^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty (E-1)Ed\lambda_2\,d\lambda_1, \qquad \theta_{22}^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty G^2 d\lambda_2\,d\lambda_1 \\ & \theta_{21}^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty EGd\lambda_2\,d\lambda_1 \qquad \theta_2^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty Gd\lambda_2\,d\lambda_1 \\ & \theta_{12}^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty (E-1)Gd\lambda_2\,d\lambda_1, \qquad \theta_1^* = \int_0^\lambda\int_{\lambda_1}^\infty (E-1)d\lambda_2\,d\lambda_1\end{aligned}$$

Изменение величин скорости зависит от членов, входящих в выражение (1.6), которые характеризуют влияние факторов различной природы. Это изменение связано с нелинейным взаимодействием продольного, поперечного и перпендикулярного к стенке течений, геометрией тела, внешним давлением.

Качественный характер влияния этих факторов на значение величины скорости различен. Основной вклад в профиль продольной составляющей скорости оказывают те же члены, что и в двумерном течении (θ_{01}^*, $(P_1^* + N_1^*)\,\theta_{11}$, $N_1^*\theta_1^*$). Член $P_2^*\theta_2^*$ характеризует основное влияние вторичного течения на величину продольной скорости. Член $(P_2^* + N_3^*) \times \theta_{21}^*$ в первом уравнении выражения (1.6) является результатом взаимодействия течений в продольном и поперечном направлениях. Член $N_2^*\theta_{22}^*$ показывает нелинейное влияние вторичного течения на профиль скорости.

Основной вклад в величину поперечной составляющей скорости. оказывают члены θ_{02}^*, $M_1^*\,(\theta_{11}^* + \theta_1^*)$. Если величина M_1^* равна нулю, то вторичное течение исчезает. Если величина M_1^* сравнительно небольшая, то и вторичное течение мало. Члены $(P_1^* + M_3^*)\,\theta_{21}^*$, $(P_2^* + M_2^*) \times \theta_{22}^*$ характеризуют взаимодействие течений в продольном и поперечном направлениях. Результаты конечно-разностных расчетов течения в пограничном слое, выполненные ранее (см. [2]) для ряда задач (эллипсоидов под углом атаки, прямых и обратных конусов под углом атаки и др. тел), показывают, что величины θ_{01}^*, θ_{02}^*, θ_{11}^*, θ_{22}^*, θ_{21}^*, θ_{12}^*, θ_1^*, θ_2^* и величины θ_{11}, θ_{22}, θ_{21}, θ_{12}, θ_1, θ_2 меняются сравнительно слабо вдоль поверхности тела, хотя профиль скорости меняется довольно заметно. Кроме того, интегралы θ_{22}^*, θ_{21}^*, θ_{12}^*, θ_2^* и интегралы θ_{22}, θ_{21}, θ_{12}, θ_2 намного меньше, чем интегралы θ_{11}^*, θ_1^* и θ_{11}, θ_1 в области «безотрывного» пограничного слоя.

2. Для решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.6) применим метод последовательных приближений [3]. В дальнейшем будем рассматривать задачу в локально-автомодельном случае, основанном на предположении о том, что производные от функций E и G вдоль координат ξ и η при использовании автомодельных переменных малы и этими производными в выражении (1.6) можно пренебречь, т. е. координаты ξ и η будут входить в решение задачи как параметры, зависящие от внешнего потока и геометрии тела.

Граничное условие при $\lambda = 0$, как следует из уравнений (1.6), удовлетворяется автоматически. Для того, чтобы граничные условия на внешней границе пограничного слоя ($\lambda \to \infty$) выполнялись в процессе последовательных приближений, введем неизвестные управляющие функции $c^{(n)}(\xi, \eta)$ и $b^{(n)}(\xi, \eta)$ следующим образом:

$$E^{(n)} = E\,(\xi, \eta, c^{(n)}(\xi, \eta)\,\lambda),$$

$$G^{(n)} = b^{(n)}(\xi, \eta)\,G\,(\xi, \eta, c^{(n)}(\xi, \eta)\,\lambda)$$

При предлагаемом подходе на каждом n-м шаге итерационного процесса получаем при $\lambda \to \infty$ уравнения для $c^{(n)}$ и $b^{(n)}$. Если итерационный процесс сходится при $n \to \infty$, то величины $c^{(n)}$ и $b^{(n)}$ будут стремиться к единице.

В локально-автомодельном случае алгоритм последовательных приближений имеет такой вид ($\sqrt{\delta^{(n)}} = 1 / c^{(n)}$):

$$(2.1) \qquad -E_a^{(n+1)} = \delta^{(n)}\,(A_{1a}^{(n)} + b^{(n)} B_{1a}^{(n)} + b^{(n)2} C_{1a}^{(n)})$$

$$-G_a^{(n+1)} = \delta^{(n)}\,(A_{2a}^{(n)} + b^{(n)} B_{2a}^{(n)} + b^{(n)2} C_{2a}^{(n)})$$

Здесь

$$A_{1a}^{(n)} = -P_1^* \int_0^\zeta (1 - E^{(n)}) f_1 d\zeta + (P_1^* + N_1^*)\, \theta_{11}^{*(n)} + N_1^* \theta_1^{*(n)} \tag{2.2}$$

$$B_{1a}^{(n)} = -P_2^* \int_0^\zeta (1 - E^{(n)}) f_2 d\zeta + (P_2^* + N_3^*)\, \theta_{21}^{*(n)} - P_2^* \theta_2^{*(n)}$$

$$C_{1a}^{(n)} = N_2^* \theta_{22}^{*(n)}, \quad A_{2a}^{(n)} = M_1^* (\theta_{11}^{*(n)} + \theta_1^{*(n)})$$

$$B_{2a}^{(n)} = P_1^* \int_0^\zeta G^{(n)} f_1 d\zeta + (P_1^* + M_3^*)\, \theta_{21}^{*(n)}$$

$$C_{2a}^{(n)} = P_2^* \int_0^\zeta G^{(n)} f_2 d\zeta + (P_2^* + M_2^*)\, \theta_{22}^{*(n)}$$

$$f_1 = \int_0^\zeta E d\zeta, \qquad f_2 = \int_0^\zeta G d\zeta \qquad (\zeta = c^{(n)}\lambda)$$

Безразмерные компоненты трения на стенке находятся по формулам

$$-\left.\frac{\partial E^{(n+1)}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(n)}}\, \{[N_1^* (\theta_{11.0}^{(n)} + \theta_{1.0}^{(n)}) + P_1^* \theta_{11.0}^{(n)}] + \tag{2.3}$$
$$+ b^{(n)} [(P_2^* + N_3^*)\, \theta_{21.0}^{(n)} - P_2^* \theta_{2.0}^{(n)}] + b^{(n)2} N_2^* \theta_{22.0}^{(n)}\}$$
$$-\left.\frac{\partial G^{(n+1)}}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(n)}}\{M_1^* (\theta_{11.0}^{(n)} + \theta_{1.0}^{(n)}) + b^{(n)} (P_1^* + M_3^*)\, \theta_{21.0}^{(n)} +$$
$$+ b^{(n)2} (P_2^* + M_2^*)\, \theta_{22.0}^{(n)}\}$$

Значения управляющих функций $b^{(n)}$ и $\delta^{(n)}$ находятся из выражений

$$\delta^{(n)} = (A_{1a\infty}^{(n)} + b^{(n)} B_{1a\infty}^{(n)} + b^{(n)2} C_{1a\infty}^{(n)})^{-1} \tag{2.4}$$
$$b^{(n)2} C_{2a\infty}^{(n)} + b^{(n)} B_{2a\infty}^{(n)} + A_{2a\infty}^{(n)} = 0$$

Из второго уравнения (2.4) найдем

$$b^{(n)} = (-B_{2a\infty}^{(n)} \pm (B_{2a\infty}^{(n)2} - 4A_{2a\infty}^{(n)} C_{2a\infty}^{(n)})^{1/2}) / 2C_{2a\infty}^{(n)} \tag{2.5}$$

Знак в выражении для $b^{(n)}$ выбираем таким образом, чтобы в осесимметрическом случае $b^{(n)} \equiv 0$, т. е. следует выбрать знак плюс, так как в осесимметрическом случае $A_{2a\infty} = 0$.

Условие существования вторичных течений приводит к соотношениям такого вида:

$$B_{2a\infty}^{(n)2} - 4A_{2a\infty}^{(n)} C_{2a\infty}^{(n)} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Коэффициенты $A_{1a\infty}^{(n)}$, $B_{1a\infty}^{(n)}$, $C_{1a\infty}^{(n)}$ и $A_{2a\infty}^{(n)}$, $B_{2a\infty}^{(n)}$, $C_{2a\infty}^{(n)}$ суть функции ξ и η. Соотношения (2.6) связывают коэффициенты, входящие в исходную систему уравнений, и определяются характером внешнего течения и геометрией тела. Из соотношений (2.6) получаем связь между параметрами внешнего потока и геометрией тела, для которых можно построить решение указанным способом.

Приведенный алгоритм последовательных приближений можно реализовать разными способами, в частности с помощью ЭВМ. Поскольку трудности численной реализации этого алгоритма такого же порядка, а возможно, и больше, чем конечно-разностного метода, то основная цель настоящего подхода заключается в том, чтобы получить решение в виде формул. С этой целью рассмотрим первое приближение. При решении таких сложных задач метод последовательных приближений в аналитическом варианте будет оправдан в том случае, если он дает решение, близкое к искомому, уже в первом приближении.

3. Будем задавать нулевое приближение в классе следующих функций $\{Z_m\}$ (см. [4]):

$$Z_m(y) = \frac{A_m}{m!}\int\limits_{\infty}^{y}(y-\xi)^m e^{-\xi^2}\,d\xi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Коэффициенты A_m выбираются таким образом, что $Z_m(0) = 1$. Тогда

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad A_1 = 2, \quad A_{2k} = -\frac{2^{k+1}}{\sqrt{\pi}}(2k)!! \tag{3.2}$$

$$A_{2k-1} = (2k-1)!!\,2^k, \qquad A_k = 2kA_{k-2}$$

Эта система функций удовлетворяет соотношениям

$$Z_m = Z_{m-2} + \frac{A_m}{mA_{m-1}^{*}}yZ_{m-1} \quad (Z_{-1}(y) = e^{-y^2}), \quad \frac{d^kZ_m}{dy^k} = \frac{A_m}{A_{m-k}}Z_{m-k} \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\infty}^{y}Z_m(y)\,dy = \frac{A_m}{A_{m+1}}Z_{m+1}, \quad \int\limits_{0}^{y}Z_m(y)\,dy = \frac{A_m}{A_{m+1}}(Z_{m+1}-1)$$

Отметим, что система функций $\{Z_m\}$ обладает также свойствами, позволяющими вычислять интегралы вида

$$I_{p,q} = \int\limits_{0}^{y}Z_p(y)\,Z_q(y)\,dy \tag{3.4}$$

через исходную систему функций. Имеем

$$I_{p,q} = -\frac{A_p}{A_{q+1}}(1 - Z_pZ_{q+1}) - \frac{A_pA_q}{A_{p-1}A_{q+1}}I_{p-1,q+1}$$

Причем

$$\int\limits_{0}^{y}Z_mZ_{m-1}dy = \frac{A_{m-1}}{2A_m}(Z_m^2 - 1) \tag{3.5}$$

Зададим нулевое приближение для функций $E^{(0)}$ и $G^{(0)}$ в виде

$$E^{(0)} = 1 - Z_0(\zeta), \quad G^{(0)} = b^{(0)}[Z_0(\zeta) - Z_{-1}(\zeta)], \quad \zeta = \lambda/\sqrt{\delta^{(0)}} \tag{3.6}$$

Тогда в локально-автомодельном случае первое приближение будет следующим:

$$\begin{aligned} -E_a^{(1)} &= \delta^{(0)}(A_{1a}^{(0)} + b^{(0)}B_{1a}^{(0)} + b^{(0)2}C_{1a}^{(1)}) \\ -G_a^{(1)} &= \delta^{(0)}(A_{2a}^{(0)} + b^{(0)}B_{2a}^{(0)} + b^{(0)2}C_{2a}^{(0)}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\delta^{(0)}$ и $b^{(0)}$ определяются из выражений

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} &= -(A_{1a\infty}^{(0)} + b^{(0)}B_{1a\infty}^{(0)} + b^{(0)2}C_{1a\infty}^{(0)})^{-1} \\ b^{(0)} &= [-B_{2a\infty}^{(0)} + (B_{2a\infty}^{(0)2} - 4A_{2a\infty}^{(0)}\cdot C_{2a\infty}^{(0)})^{1/2}]/2C_{2a\infty}^{(0)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь

$$(3.9)\qquad A_{1a}^{(0)}=-P_1^*\frac{A_0}{A_1}\left[\frac{A_1}{A_2}(Z_2-1)-\frac{A_{-1}}{A_0}(Z_0-1)-I_{1.0}+\frac{A_0}{A_1}(Z_1-1)\right]+$$
$$+(P_1^*+N_1^*)\left(J_{0.0}+\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)\right)+N_1^*\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)$$

$$B_{1a}^{(0)}=P_2^*\left(\frac{A_{-1}}{A_0}I_{0.0}-\frac{A_0}{A_1}I_{1.0}+\left(\frac{A_0}{A_1}-\frac{A_{-1}}{A_0}\right)\frac{A_0}{A_1}(Z_1-1)\right)+$$
$$+(P_2^*+N_3^*)\left(\frac{A_{-1}}{A_1}(Z_1-1)-\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)-J_{0.0}+J_{0.-1}\right)-$$
$$-P_2^*\left(\frac{A_{-1}}{A_1}(Z_1-1)-\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)\right)$$

$$C_{1a}^{(0)}=N_2^*(J_{0.0}-2J_{0.-1}+J_{-1,-1})$$

$$J_{0.0}=\frac{A_0^2}{2A_1^2}(1-Z_1^2)-\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{A_0}{A_1}\right)\frac{A_{-1}}{2A_0}(1-Z_0^2)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{A_0}{A_1}(Z_1(\sqrt{2})-1)$$

$$J_{0.-1}=-\frac{A_{-1}}{2A_0}I_{0.0},\qquad J_{-1,-1}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{A_0}{A_1}(Z_1(\sqrt{2})-1)$$

(Запись $Z_1(\sqrt{2})$ означает, что аргумент умножается на величину $\sqrt{2}$.)

Аналогично находим величины $A_{2a}^{(0)}$, $B_{2a}^{(0)}$, и $C_{2a}^{(0)}$

$$(3.10)\qquad A_{2a}^{(0)}=M_1^*\left(J_{0.0}+2\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)\right)$$

$$B_{2a}^{(0)}=P_1^*\left(\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)-2\frac{A_{-1}}{A_1}(Z_0-1)+\frac{1}{2}(Z_{-1}-1)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2(Z_1-1)-\frac{A_0}{A_1}(I_{1.0}-I_{1,-1})\right)+(P_1^*+M_3^*)\times$$
$$\times\left(\frac{A_{-1}}{A_1}(Z_1-1)-\frac{A_0}{A_2}(Z_2-1)-J_{0.0}+J_{0.-1}\right)$$

$$C_{2a}^{(0)}=P_2^*\left\{\left[I_{0.-1}\frac{A_{-1}}{A_0}-I_{0.0}\frac{A_{-1}}{A_0}+I_{1.0}\frac{A_{-1}}{A_1}-I_{1.-1}\frac{A_0}{A_1}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{A_0}{A_1}-\frac{A_{-1}}{A_0}\right]\left[\frac{A_0}{A_1}(Z_1-1)-\frac{A_{-1}}{A_0}(Z_0-1)\right]\right\}+$$
$$+(P_2^*+M_2^*)(J_{0.0}-2J_{0.-1}+J_{-1,-1})$$

Таким образом, в первом приближении получено решение в общем случае для произвольного внешнего течения и геометрии тела.

Найдем величины $A_{1a\infty}^{(0)}$, $B_{1a\infty}^{(0)}$, $C_{1a\infty}^{(0)}$ и $A_{2a\infty}^{(0)}$, $B_{2a\infty}^{(0)}$, $C_{2a\infty}^{(0)}$. Имеем

$$(3.11)\qquad -A_{1a\,\infty}^{(0)}=\frac{1}{4}P_1^*+\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)N_1^*,$$
$$-B_{1a\,\infty}^{(0)}=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)P_2^*+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2\pi}\right)N_3^*$$
$$-C_{1a\infty}^{(0)}=-N_2^*\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2}-\frac{1}{2\pi}\right]$$

Аналогично находятся величины $A_{2a\infty}^{(0)}$ $B_{2a\infty}^{(0)}$ и $C_{2a\infty}^{(0)}$

$$-A_{2a\infty}^{(0)} = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}\right) M_1^* \tag{3.12}$$

$$-B_{2a\infty}^{(0)} = -3\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) P_1^* + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\pi}\right) M_3^*$$

$$-C_{2a\infty}^{(0)} = -P_2^*\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} - 1\right) - M_2^*\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)$$

В окончательном виде формулы для безразмерных компонент трения на стенке запишутся в таком виде:

$$\left.\frac{\partial E^{(1)}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}}\{0.2337P_1^* + 0.7978N_1^* + \tag{3.13}$$

$$+ b^{(0)}(0.2095N_3^* - 0.1125P_2^*) - 0.071b^{(0)2}N_2^*\}$$

$$\left.\frac{\partial G^{(1)}}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(0)}}\{0.7978M_1^* + b^{(0)}0.2095(P_1^* + M_3^*) -$$

$$- 0.071b^{(0)2}(P_2^* + M_2^*)\}$$

где величины $\delta^{(0)}$ и $b^{(0)}$ вычисляются по формулам

$$b^{(0)} = [0.31P_1^* + 0.194M_3^* - ((0.31P_1^* + 0.194M_3^*)^2 + \tag{3.14}$$

$$+ 1.636M_1^*(0.1P_2^* + 0.047M_2^*))^{1/2}]/(0.199P_2^* + 0.095M_2^*)$$

$$\delta^{(0)} = (0.25P_1^* + 0.409N_1^* + b^{(0)}(0.194N_3^* - 0.103P_2^*) -$$

$$- b^{(0)2}0.048N_2^*)^{-1}$$

Компоненты величин трения на стенке определяются по формулам ($g_{12} = 0$).

$$\tau_1 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = \mu\sqrt{\frac{u_e^3}{\nu\alpha}}\left(\frac{\partial E}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}$$

$$\tau_2 = \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = \mu\beta\sqrt{\frac{u_e^3}{\nu\alpha}}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0} + \varphi\left(\frac{\partial E}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}\right)$$

$$(\alpha = \xi,\ \beta = \eta)$$

4. Рассмотрим течение около критической точки трехмерного тела с двоякой кривизной. Пусть M — критическая точка (точка торможения потока) на поверхности гладкого тела. Предположим, что внешнее течение — безвихревое. Около точки M поверхность тела может быть представлена касательной плоскостью. Выберем прямоугольную систему координат (ξ, η, ζ) таким образом, что оси ξ, η лежат в этой плоскости, а ось ζ перпендикулярна касательной плоскости. Компоненты скорости внешнего течения имеют вид

$$u_e = a\xi, \qquad w_e = b\eta$$

Выберем, следуя [2], $\beta = \eta / \xi$, $\alpha = \xi$. Тогда $\varphi = b / a$. Если $\varphi = 0$, то этот случай соответствует двумерным течениям; если $\varphi = 1$, то это соответствует течению около тела вращения, расположенного симметрически в потоке. Будем рассматривать случай, когда $-1 < \varphi \leqslant 1$.

Безразмерная величина трения в критической точке находится по формулам (3.13) и в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial E^{(1)}}{\partial\lambda} = \sqrt{\delta^{(0)}}\,(1.0315 + 0.2337\varphi - 0.1125b^{(0)}) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial G^{(1)}}{\partial\lambda} = \sqrt{\delta^{(0)}}\,(-0.7978\varphi\,(1-\varphi) + 0.2095\,(1+3\varphi)\,b^{(0)} - 0.142b^{(0)2})$$

Здесь величины $\delta^{(0)}$ и $b^{(0)}$ вычисляются по формулам

$$\delta^{(0)} = (0.659 + 0.25\varphi - 0.103b^{(0)})^{-1} \tag{4.2}$$

$$b^{(0)} = (0.31 + 0.698\varphi \pm ((0.31 + 0.698\varphi)^2 + (\varphi^2 - \varphi)0.24)^{1/2})/0.295$$

Заметим, что для $b^{(0)}$ получаем два значения. Величина под радикалом для $-1 < \varphi \leqslant 1$ строго положительна, т. е. для каждого значения в данном интервале существуют два различных решения, удовлетворяющие всем требуемым условиям. Одно решение, которое имеет физический смысл, легко выбрать из условия отсутствия вторичных течений в осесимметрическом случае ($b^{(0)} \equiv 0$). Другое можно получить, выбирая знак плюс перед радикалом. Это решение представляет, вероятно, математический интерес. При численных расчетах существование второго решения может привести к тому, что, задавая определенный начальный профиль, можно неправильно найти решение в критической точке. В процессе итераций при численном решении задачи можно получить два разных решения. Но коль скоро в качестве начального профиля задается профиль из осесимметрической задачи, процесс итераций быстро сходится к требуемому решению. Ниже приведено сравнение результатов работы [1], полученных численным интегрированием системы, аналогичной системе уравнений (1.3) с граничными условиями (1.4), с результатами первого приближения.

φ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$E'(0)$	1.233	1.247	1.267	1.288	1.312
$E_a'(0)$	1.270	1.276	1.290	1.307	1.327
$G'(0)$	0.570	0.805	0.998	1.164	1.312
$G_a'(0)$	0.610	0.832	1.017	1.180	1.327

Результаты с индексом a получены по приближенным аналитическим формулам (4.1) и (4.2) данной работы. Следует отметить хорошее совпадение компонент трения уже в первом приближении во всем диапазоне изменения параметра φ от нуля до единицы.

Ограничимся только этим диапазоном изменения параметра φ, так как для остальных значений ($\varphi < 0$ и $\varphi > 1$) имеем такие соотношения ($E = f'$, $G = g'$):

$$f(\lambda, -\varphi) = f(\lambda, \varphi), \qquad f'(\lambda, -\varphi) = f'(\lambda, \varphi)$$
$$g(\lambda, -\varphi) = -g(\lambda, \varphi), \qquad g'(\lambda, -\varphi) = g'(\lambda, \varphi)$$

и

$$f(\lambda, 1/\varphi) = f^{1/2}(\lambda/\varphi^{1/2}, \varphi), \quad f'(\lambda, 1/\varphi) = -g'(\lambda/\varphi^{1/2}, \varphi)$$
$$g(\lambda, 1/\varphi) = f^{1/2}, \ (\lambda/\varphi^{1/2}\, \varphi), \quad g'(\lambda, 1/\varphi) = f'(\lambda/\varphi^{1/2}, \varphi) \ (\varphi > 0)$$

Пользуясь значениями функций $\{Z_m\}$, можно построить профили скорости в продольном, поперечном и нормальном к стенке направлениях.

Поступила 9 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Howarth L.* The Boundary Layer in Three-Dimensional Flow, p. II. The Flow near a Stagnation Point. Philos. Mag., 1951, vol. 43, No 335, p. 1433—1440.
2. *Шевелев Ю. Д.* Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, вып. 1. Течения в пограничном слое. М., Изд-во МГУ, 1971.
3. *Ковач Э. А., Тирский Г. А.* Применение метода последовательных приближений для интегрирования уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 1.
4. *Zeytounian R. Kh.* Contribution a l'etude de la couche limite tridimensionnelle laminaire incompressible en régime instationnaire. Note techn. O.N.E.R.A., 1968, No 131.