Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.5 + 539.3

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассматриваются некоторые проблемы аналитической механики сплошных сред. Кинематические связи, стесняющие движение элементов сплошной среды, подразделяются на внутренние и внешние связи; внутренние поверхностные напряжения в сплошной среде трактуются как силы реакций внутренних связей. Так как работа последних на возможных перемещениях элементов сплошной среды в общем случае отлична от нуля, то внутренние связи в сплошной среде следует отнести к категории неидеальных связей. Рассматривается общее уравнение динамики сплошных сред, выражающее вариационный принцип Даламбера — Лагранжа и заключающее в себе все динамические законы. Фигурирующая в этом уравнении работа внутренних поверхностных напряжений может быть задана с помощью первого и второго законов термодинамики, благодаря чему общее уравнение динамики сплошных сред возможно представить в двух других формах. Далее дается обобщение на сплошные среды принципа Гаусса и принципа Четаева.

1. Будем рассматривать движение некоторой сплошной среды по отношению к инерциальной прямоугольной декартовой системе координат $O_1x_1x_2x_3$. Пусть сплошная среда занимает конечную область D пространства $x_1x_2x_3$, ограниченную замкнутой поверхностью Σ; в общем случае D и Σ изменяются со временем t. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор относительно начала O_1 какой-либо точки области или ее границы, а через $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ — плотность и поля скоростей и ускорений сплошной среды в момент времени t.

В области непрерывных движений, описываемых гладкими функциями, общие уравнения движения сплошной среды имеют вид [1]

$$\rho\mathbf{w} = \rho\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

Эти уравнения выражают, как известно, второй закон Ньютона и закон сохранения массы. Здесь $\mathbf{F}$ обозначает плотность массовых сил, $\mathbf{p}_i$ — плотность внутренних поверхностных сил напряжений на площадках, ортогональных осям x_i.

Уравнения (1.1) выводятся обычно [1,2] из интегрального соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \rho\mathbf{v}\, d\tau = \int_\tau \rho\mathbf{F}\, d\tau + \int_\sigma \mathbf{p}_n\, d\sigma \tag{1.3}$$

выражающего теорему о количестве движения применительно к произвольному объему τ, мысленно выделенному внутри области D, состоящему из одних и тех же частиц среды и ограниченного замкнутой поверхностью σ. При условии, что внутри объема τ компоненты тензора напряжений $\mathbf{P}$ являются гладкими функциями, справедлива формула Гаусса — Остроградского

$$\int_\sigma \mathbf{p}_n d\sigma = \int_\tau \left(\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3} \right) d\tau$$

из которой следует, что воздействия, определяемые поверхностной плотностью напряжений $\mathbf{p}_n$ на границе σ, эквивалентны воздействиям, определяемым объемной плотностью внутри τ [2]

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3} \tag{1.4}$$

Очевидно любая частица сплошной среды не является вполне свободной, так как окружающие ее другие частицы не позволят ей произвольно перемещаться в пространстве. Для каждой частицы окружающие ее частицы накладывают некоторые стеснения на перемещения (или скорости), которые можно выразить в виде достаточно общих условий сохранения сплошности среды и непрерывности поля перемещений (скоростей) частиц среды. Такие стеснения кинематического характера, не зависящие от действующих на среду сил и от законов ее движения, представляют собой, по существу, внутренние связи, наложенные на все соседние элементы среды [3]; уравнения связей могут быть записаны в виде условий достаточной гладкости перемещений (скоростей).

Поверхностные силы внутри сплошной среды возникают в результате воздействия на частицу среды окружающих ее соседних частиц, т. е. они представляют собою силы взаимодействия между частицами, возникающие благодаря наличию поверхностных сцеплений [2] между соседними элементами сплошной среды. При этом поверхностные напряжения с плотностью $\mathbf{p}_n$ или эквивалентные им воздействия с массовой плотностью 1.4) естественно трактовать как силы реакций внутренних связей сплошной среды.

Отметим, что помимо внутренних связей в механике сплошной среды имеются, вообще говоря, и внешние связи — различные кинематические граничные условия, которые могут быть заданы на границе Σ.

В соответствии с принятым в аналитической механике определением под возможными перемещениями $\delta\mathbf{r}$ частиц сплошной среды будем понимать элементарные перемещения, допускаемые в данный момент времени связями, наложенными на систему. Тогда, исходя из принятого выше понимания связей, заключаем, что возможные перемещения представляют собою произвольные гладкие функции положений точек области D, не нарушающие сплошности среды и, кроме того, для точек границы Σ удовлетворяющие условиям, вытекающим из кинематических граничных условий.

Предполагая, что возможные перемещения $\delta\mathbf{r}$ имеют частные производные по x_i, интегрируемые в области D, подсчитаем работу сил (1.4) реакций внутренних связей на возможном перемещении системы

$$\int_D \left(\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right)\cdot \delta\mathbf{r}\, d\tau = \int_\Sigma \mathbf{p}_n \cdot \delta\mathbf{r}\, d\sigma + \delta A^i \tag{1.5}$$

где по определению работа внутренних поверхностных сил на возможном перемещении

$$\delta A^i = -\int_D \left(\mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial x_1} + \mathbf{p}_2 \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial x_2} + \mathbf{p}_3 \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial x_3}\right) d\tau \tag{1.6}$$

Равенство (1.5) означает, что работа сил с массовой плотностью (1.4) равна сумме работ внешних и внутренних поверхностных сил.

Далее для простоты будем предполагать, что тензор напряжений симметричен, т. е. его компоненты удовлетворяют условиям $p_{ij} = p_{ji}$. При этих условиях работа внутренних поверхностных сил [1,2]

$$\delta A^i = -\int_D p_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, d\tau = -\int_D \frac{p_{ij}}{\rho}\delta\varepsilon_{ij}\, dm \tag{1.7}$$

где

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta x_j}{\partial x_i}\right), \qquad dm = \rho d\tau \tag{1.8}$$

Заметим, что если возможные перемещения частиц среды представляют собою перемещения твердого тела, то $\delta\varepsilon_{ij} = 0$ и $\delta A^i = 0$.

В общем же случае из формулы (1.7) следует, что работа внутренних поверхностных сил на возможных перемещениях $\delta A^i \neq 0$. Это означает, что если рассматривать напряжения в сплошной среде как реакции внутренних связей, то последние следует отнести, вообще говоря, к категории неидеальных связей или связей с трением [4,5]. Поэтому для определения движения и напряжений сплошной среды, помимо уравнений (1.1) и (1.2), необходимо задание некоторых дополнительных соотношений, играющих ту же роль, что и закон трения в механике систем с конечным числом степеней свободы с неидеальными связями. Как известно, напряжения в сплошной среде тесно связаны с ее деформациями; соотношения между напряжениями и деформациями являются в общем случае теми соотношениями, которые должны быть заданы. Конкретная связь между напряжениями и деформациями определяется выбором той или иной модели сплошной среды [1].

Если же окажется, что $\delta A^i = 0$ для всяких возможных перемещений, то в этом случае внутренние связи относятся к категории идеальных связей. Примером модели сплошной среды с идеальными связями служит идеальная несжимаемая жидкость, для которой компоненты тензора напряжений $p_{ij} = -p\delta_{ij}$, где p — гидродинамическое давление, δ_{ij} — символ Кронекера, и плотность ρ каждой частицы постоянна. При этих условиях по формуле (1.7) получаем

$$\delta A^i = \int_D \frac{p}{\rho}\,\delta_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dm = \int_D \frac{p}{\rho}\,\delta\varepsilon_{ii}\, dm = 0,$$

так как для несжимаемой жидкости согласно уравнению (1.2)

$$\delta\varepsilon_{ii} = \operatorname{div}\delta\mathbf{r} = 0$$

Заметим, что для идеальной сжимаемой жидкости в общем случае

$$\delta A^i = \int_D p\delta\frac{1}{\rho}\,dm \neq 0$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на $\delta\mathbf{r}d\tau$ и проинтегрируем по области D или любой ее части τ. В результате получим уравнение

$$\int_D \rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\delta\mathbf{r}\,d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{r}\,d\sigma + \delta A^i = 0 \tag{1.9}$$

в котором работа внутренних поверхностных сил выражается равенствами (1.6) или (1.7). С учетом равенств (1.4) и (1.5) уравнение (1.9) можно записать также в эквивалентной форме

$$\int_D [\rho(\mathbf{F}-\mathbf{w}) + \mathbf{C}(\mathbf{r})]\cdot\delta\mathbf{r}\,d\tau = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение (1.9) получено с помощью уравнения (1.1). Можно, наоборот, принять уравнение (1.9) (или (1.10)) за исходное и вывести из него уравнение (1.1). Более того, из уравнения (1.9) можно получить все общие теоремы динамики сплошной среды, применяя его к произвольному объему τ внутри области D, состоящему из одних и тех же частиц среды, и учитывая уравнение (1.2).

В самом деле, среди возможных перемещений частиц рассмотрим поступательные перемещения объема τ как одного твердого тела, полагая $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_0$; при этом $\delta A^i = 0$. Вынося вектор $\delta\mathbf{r}_0$ из-под знаков интегралов в уравнении (1.9) и сокращая на него, получаем равенство (1.3), выражающее теорему о количестве движения.

Рассмотрим теперь среди возможных перемещений вращательные перемещения объема τ, как одного твердого тела, вокруг точки O_1, полагая $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}$. Учитывая, что при этом $\delta A^i = 0$, применяя формулу $\mathbf{a}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$, вынося из-под знаков интегралов вектор $\delta\boldsymbol{\varphi}$ и сокращая на него, получаем из уравнения (1.9) теорему о моменте количества движения

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}\,d\tau = \int_\tau \mathbf{r}\times\rho\mathbf{F}\,d\tau + \int_\sigma \mathbf{r}\times\mathbf{p}_n\,d\sigma \tag{1.11}$$

Пусть, наконец, возможные перемещения $\delta\mathbf{r}$ совпадают с действительными перемещениями за время dt. Полагая $\delta\mathbf{r} = d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, из уравнения (1.9) получаем теорему о кинетической энергии

$$dE = \int_\tau \rho\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,d\tau + \int_\sigma \mathbf{p}_n\cdot d\mathbf{r}\,d\tau + dA^i, \qquad E = \frac{1}{2}\int_\tau \rho\mathbf{v}^2\,d\tau \tag{1.12}$$

Здесь dA^i означает работу внутренних поверхностных сил на действительном перемещении, определяемую равенствами (1.6) или (1.7), если в последних заменить δ на d.

Отметим, что действительные перемещения находятся среди возможных только в случае стационарных связей. Внутренние связи в сплошной среде являются стационарными. Что касается внешних связей, то они могут быть и нестационарными. При наличии нестационарных связей их можно мысленно отбросить, заменяя их реакциями, представляющими собою заранее неизвестные поверхностные напряжения $\mathbf{p}_n$, и, полагая $\delta\mathbf{r} = d\mathbf{r}$, получить уравнение (1.12), в правую часть которого войдет, как и в случае внешних стационарных неидеальных связей, работа внешних поверхностных сил напряжений $\mathbf{p}_n$ — воздействий внешних связей на сплошную среду.

Таким образом, уравнение (1.9) заключает в себе все динамические законы, вследствие чего оно представляет собою общее уравнение динамики сплошных сред с симметричным тензором напряжений.

Обычно в динамике сплошных сред исходят из уравнений (1.3) и (1.11), а затем с помощью уравнений (1.1) и (1.2) получают теорему (1.12). Логичнее, однако, исходить из уравнения (1.9), содержащего всю динамику сплошных сред. Следует иметь в виду также и то обстоятельство, что в отличие от уравнения (1.1) уравнение (1.9) и вытекающие из него уравнения (1.3) и (1.11) верны для любых движений, в том числе и для разрывных движений, при условии, что фигурирующие в этих уравнениях интегралы имеют конечные значения [1].

Отметим, что в книге [2] уравнение вида (1.9) или (1.10) представлено в форме теоремы возможных мощностей.

Следует подчеркнуть, что в отличие от изложенного в работе [3], в общем уравнении динамики сплошных сред (1.9) фигурирует работа δA^i внутренних поверхностных напряжений, а также работа внешних поверхностных напряжений $\mathbf{p}_n$, среди которых могут быть и реакции внешних связей. Наличие в общем уравнении динамики членов, выражающих работу реакций связей на возможных перемещениях, вообще характерно для систем с неидеальными связями как с конечным [5], так и с бесконечным числом степеней свободы. Из-за неидеальности связей знания активных сил, приложенных к системе, недостаточно в отличие от систем с идеальными связями для определения ее движения, а также реакций связей: кроме активных сил должна быть задана, по крайней мере, работа сил реакций связей на возможных перемещениях [4].

В рассматриваемом случае сплошных сред работа внутренних поверхностных сил может быть найдена из уравнения притока тепла

$$\delta u = \frac{p_{ij}}{\rho}\,\delta\varepsilon_{ij} + \delta q^{(e)} + \delta q^{xx} \qquad (1.13)$$

если известны изменение δu внутренней энергии и элементарные притоки внешнего тепла $\delta q^{(e)}$ и других, отличных от работы макроскопических механических сил, нетепловых видов энергии δq^{xx}, рассчитанные на единицу массы. При наличии динамических уравнений (1.2) уравнение (1.13) равносильно, как известно [1], первому закону термодинамики — закону сохранения энергии.

С учетом уравнений (1.7) и (1.13) общее уравнение динамики (1.9) можно представить в виде

$$\int_D \rho\,[(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\delta\mathbf{r}-\delta u+\delta q^{(e)}+\delta q^{xx}]\,d\tau+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{r}\,d\sigma=0 \tag{1.14}$$

если предположить, что внутренняя энергия системы обладает свойством аддитивности. Если известны $\mathbf{F}$, u, $q^{(e)}$ и q^{xx} в каждой точке внутри области D и $\mathbf{p}_n$ на поверхности Σ, то уравнение (1.14) позволяет определить движение сплошной среды при заданных начальных и граничных условиях, а также внутренние напряжения.

Согласно второму закону термодинамики, элементарный приток внешнего тепла связан с изменением энтропии δs и некомпенсированным теплом $\delta q' \geqslant 0$ соотношением

$$T\delta s=\delta q^{(e)}+\delta q' \tag{1.15}$$

где T — абсолютная температура. С учетом этого соотношения общее уравнение динамики можно представить также в форме

$$\int_D \rho\,[(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\delta\mathbf{r}-\delta u+T\delta s-\delta q'+\delta q^{xx}]\,d\tau+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{r}\,d\tau=0 \tag{1.16}$$

При заданных $\mathbf{F}$, u, q' и q^{xx} из уравнения (1.16) можно получить замкнутую систему уравнений движения и состояния сплошной среды [6]. В этом смысле уравнения (1.14) или (1.16) играют в механике сплошных сред ту же роль, что и общее уравнение динамики систем с конечным числом степеней свободы, стесненных идеальными связями.

Уравнение (1.9) выражает вариационный принцип Даламбера — Лагранжа в динамике сплошных сред. В нем рассматриваются бесконечно малые перемещения из заданного действительного движения системы. Этот принцип не связан, однако, с экстремумом некоторого функционала, но его можно так модифицировать, что он будет выражать экстремум некоторого выражения.

Рассмотрим две такие модификации принципа Даламбера — Лагранжа, обобщая на сплошные среды принцип Гаусса [7] и принцип Четаева [8,9].

2. Дадим сначала обобщение на сплошные среды теоремы Четаева и принципа Гаусса.

Наряду с действительными движениями сплошной среды будем рассматривать мыслимые по Гауссу [7] движения частиц среды, имеющих в данный момент t те же самые значения радиус-векторов $\mathbf{r}$ и скоростей $\mathbf{v}$, что и в действительном движении, и удовлетворяющих условиям наложенных связей. Иначе говоря, мыслимые движения отличаются в момент t от действительного движения лишь ускорениями, которые должны удовлетворять условиям сохранения сплошности и неразрывности (1.2) и кинематическим граничным условиям.

Рассмотрим какое-либо мыслимое движение среды за бесконечно малый интервал времени от t до $t + dt$. Возможные перемещения $\delta\mathbf{r}$ частиц связаны при этом с изменениями ускорений

$$\Delta\mathbf{w} = \delta\mathbf{v} / dt - \mathbf{w} \tag{2.1}$$

соотношениями [8]

$$\delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{w}\frac{(dt)^2}{2} \tag{2.2}$$

Здесь $\delta\mathbf{v}$ — изменение за время dt скорости в мыслимом движении.

С учетом (2.2) уравнение (1.9) примет вид

$$\int_D \rho(\mathbf{F} - \mathbf{w})\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\sigma + \frac{2}{(dt)^2}\delta A^i = 0 \tag{2.3}$$

где δA^i определяется по формуле (1.6) с учетом равенства (2.2).

Освободим (мысленно) сплошную среду от части (или от всех) наложенных на нее связей, например от внешних кинематических связей. Возможные перемещения исходной системы находятся среди возможных перемещений освобожденной системы, поэтому справедливо уравнение

$$\int_D \rho\left(\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{v}}{dt}\right)\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n{}^\partial\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\sigma + \frac{2}{(dt)^2}\partial A^i = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $\partial\mathbf{v}$ — изменение скорости за время dt в действительном освобожденном движении, $\mathbf{p}_n{}^\partial$ — поверхностные напряжения в освобожденной от части связей системе; ∂A^i определяется формулой вида (1.6) с заменой $\mathbf{p}_i$ на $\mathbf{p}_i{}^\partial$ и учетом (2.2).

Вычитая уравнение (2.4) из уравнения (2.3), получаем уравнение

$$\int_D \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{w}\right)\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\tau + \int_\Sigma (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n{}^\partial)\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\sigma + \frac{2}{(dt)^2}(\delta A^i - \partial A^i) = 0$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} + \int_\Sigma (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n{}^\partial)\cdot\Delta\mathbf{w}\,d\sigma + \frac{2}{(dt)^2}(\delta A^i - \partial A^i) = 0 \tag{2.5}$$

где величины

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\mathbf{w} - \frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau, \qquad A_{d\partial} = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\mathbf{w} - \frac{\partial\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau$$

$$A_{\partial\delta} = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{dt} - \frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau$$

характеризуют меры отклонений между действительным (d), действительным освобожденным (∂) и мыслимым (δ) движениями среды за время dt. С учетом формул (1.6) и (2.2) видно, что выражение

$$\frac{2}{(dt)^2}(\delta A^i - \partial A^i) = -\int_D (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i{}^\partial)\cdot\frac{\partial\Delta\mathbf{w}}{\partial x_i}\,d\tau$$

представляет собою разность работ внутренних поверхностных сил напряжений в действительном и освобожденном движениях среды на «перемещениях» $\Delta\mathbf{w}$.

Так как величины $A_{\partial\partial}$ и $A_{d\delta}$ при несовпадении движений (∂) и (δ) с движением (d) являются существенно положительными величинами, из уравнения (2.5) получаем следующие два неравенства:

$$A_{d\delta} + \int_\Sigma (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n^\partial)\cdot\Delta\mathbf{w}\, d\sigma - \int_D (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^\partial)\cdot\frac{\partial\Delta\mathbf{w}}{\partial x_i}\, d\tau < A_{\partial\delta} \tag{2.6}$$

$$A_{d\partial} + \int_\Sigma (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n^\partial)\cdot\Delta\mathbf{w}\, d\sigma - \int_D (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^\partial)\cdot\frac{\partial\Delta\mathbf{w}}{\partial x_i}\, d\tau < A_{\partial\delta}$$

выражающие теорему:

Мера отклонения действительного (d) движения сплошной среды от какого-либо мыслимого (δ) (действительного освобожденного (∂)) движения, увеличенная на разность работ внешних и внутренних поверхностных сил напряжений в действительном и освобожденном движениях на перемещении (2.1) меньше меры отклонения мыслимого (δ) движения от действительного освобожденного (∂) движения.

Эта теорема представляет собою обобщение на сплошную среду теоремы Четаева [8] для систем с идеальными связями.

Представим себе теперь, что частицы среды в момент t освобождены от всех связей, как внешних, так и внутренних, т. е. стали совершенно свободными. При этом их ускорения $\partial\mathbf{v}/dt$ будут равными $\mathbf{F}$, все напряжения обратятся в нуль $\mathbf{p}_i^\partial = 0$, и второе из неравенств (2.6) примет вид

$$A_{d\partial} + \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\Delta\mathbf{w}\, d\sigma - \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\Delta\mathbf{w}}{\partial x_i}\, d\tau < A_{\partial\delta} \tag{2.7}$$

причем

$$A_{d\partial} = \frac{1}{2}\int_D \rho(\mathbf{w}-\mathbf{F})^2\, d\tau, \qquad A_{\partial\delta} = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\mathbf{F} - \frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau \tag{2.8}$$

Неравенство (2.7) получено как следствие из второго неравенства (2.6). Его можно, однако, установить независимо от (2.6). В самом деле, перенесем член $A_{\partial\delta}$ в левую часть неравенства, подставим выражения (2.8), приведем подобные члены и сделаем очевидное преобразование; в результате получим неравенство

$$\int_D \left[\rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\Delta\mathbf{w} - \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\Delta\mathbf{w}}{\partial x_i}\right] d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\Delta\mathbf{w}\, d\sigma < \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\mathbf{w} - \frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau \tag{2.9}$$

Используя уравнение (1.1) и формулу Гаусса — Остроградского, убеждаемся, что левая часть неравенства (2.9) равна нулю, что и доказывает справедливость последнего.

С учетом выражения (2.1) перепишем неравенство (2.7) в виде

$$A_{d\partial} - \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{w}\, d\sigma + \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_i}\, d\tau < A_{\partial\delta} - \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\, d\sigma + \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\, d\tau \tag{2.10}$$

в котором величины $A_{d\partial}$ и $A_{\partial\delta}$ определены равенствами (2.8).

Неравенство (2.10) выражает обобщение принципа Гаусса на сплошные среды:

Мера отклонения действительного движения сплошной среды от движения свободных частиц, уменьшенная на работу внешних и внутренних напряжений на действительных ускорениях, меньше меры отклонения любого мыслимого движения от движения свободных частиц, уменьшенной на работу внешних и внутренних напряжений на ускорениях мыслимого движения.

Эта теорема обобщает на сплошные среды принцип Гаусса [5] для систем с конечным числом степеней свободы, стесненных неидеальными связями.

Данный принцип можно сформулировать несколько иначе. В самом деле, подставим в неравенство (2.10) выражения (2.8) и приведем подобные члены. В результате получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_D \rho\,(\mathbf{w}^2 - 2\mathbf{F}\cdot\mathbf{w})\,d\tau - \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{w}\,d\sigma + \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_i}\,d\tau < R \tag{2.11}$$

$$R = \frac{1}{2}\int_D \rho\left[\left(\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 - 2\mathbf{F}\cdot\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right]d\tau - \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\,d\sigma + \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\,d\tau \tag{2.12}$$

выражающее теорему:

В каждый момент времени среди всех ускорений $\delta\mathbf{v}/dt$ частиц сплошной среды, обусловленных связями, действительными ускорениями будут такие ускорения $\mathbf{w}$, которые минимизируют функционал (2.12).

Отметим, что величина R равна разности между энергией ускорений сплошной среды в мыслимом движении

$$S = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\right)^2 d\tau$$

и работой всех массовых и поверхностных сил

$$\int_D \rho\mathbf{F}\cdot\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\,d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\,d\sigma - \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\delta\mathbf{v}}{dt}\,d\tau$$

на ускорениях мыслимого движения.

Равновесие является частным случаем движения; оно имеет место, когда все частицы среды покоятся, т. е. когда $\mathbf{v} = \mathbf{w} = 0$. Следовательно, среди всех кинематически допустимых [2] перемещений $\mathbf{u}'$, обусловленных связями, действительные перемещения $\mathbf{u}$ минимизируют функционал

$$V = \int_D \mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial x_i}\,d\tau - \int_D \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}'\,d\tau - \int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{u}'\,d\sigma$$

Из этой теоремы следует как частный случай первая теорема потенциальной энергии [2].

Замечание. Неравенство (2.11) близко (но не вполне совпадает) к неравенству (2.2) работы [10].

3. Принципу Гаусса для сплошной среды можно дать интересное видоизменение [8].

Рассмотрим некоторое мыслимое по Гауссу движение сплошной среды за время от t до $t + dt$. За это время частица среды совершит в мыслимом движении бесконечно малое перемещение

$$\mathbf{r}(t+dt)-\mathbf{r}(t)=\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt+\ldots$$

где $\delta\mathbf{v}$ — изменение скорости за время dt в мыслимом движении. Выражение для работы массовых и поверхностных сил на бесконечно малом перемещении мыслимого движения имеет вид

$$\int_D \rho\mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt\,d\tau+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt\,d\sigma+\delta'A^i+\ldots$$

где $\delta'A^i$ определяется по формуле (1.6) с заменой $\delta\mathbf{r}$ на $(\mathbf{v}+{}^1/_2\delta\,\mathbf{v})\,dt$ Из этого выражения вычтем выражение работы на рассматриваемом бесконечно малом перемещении сил $\rho\mathbf{w}$, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы частицы среды были свободными

$$\int_D \rho\mathbf{w}\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt\,d\tau+\ldots$$

В результате получим выражение

$$A_\mu=\int_D \rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt\,d\tau+ \tag{3.1}$$

$$+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{v}\right)dt\,d\sigma+\delta'A^i+\ldots$$

работы на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого движения в поле заданных сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы все частицы среды были совершенно свободными.

Для аналогичного цикла, построенного для действительного движения среды, работа

$$A=\int_D \rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}d\mathbf{v}\right)dt\,d\tau+ \tag{3.2}$$

$$+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot\left(\mathbf{v}+\frac{1}{2}d\mathbf{v}\right)dt\,d\sigma+d'A^i+\ldots$$

где $d'A^i$ определяется по формуле (1.6) с заменой $\delta\mathbf{r}$ на $(\mathbf{v}+{}^1/_2d\mathbf{v})\,dt$.

Вычитая равенство (3.2) из (3.1), получаем

$$A_\mu-A=\int_D \rho(\mathbf{F}-\mathbf{w})\cdot(\delta\mathbf{v}-d\mathbf{v})\frac{dt}{2}d\tau+$$

$$+\int_\Sigma \mathbf{p}_n\cdot(\delta\mathbf{v}-d\mathbf{v})\frac{dt}{2}d\sigma+\delta'A^i-d'A^i$$

Обозначим через Δ изменение при переходе от действительного движения к мало отличному мыслимому движению. Это выражение с учетом

(2.1) можно представить в виде

$$\Delta A = \int_D \rho (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \cdot \Delta \mathbf{w} \frac{(dt)^2}{2} d\tau + \int_\Sigma \mathbf{p}_n \cdot \Delta \mathbf{w} \frac{(dt)^2}{2} d\sigma + \Delta \delta' A^i \tag{3.3}$$

$$\Delta \delta' A^i = - \int_D \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{w}}{\partial x_i} \frac{(dt)^2}{2} d\tau$$

Принимая во внимание (2.2), из уравнения (1.9) находим, что

$$\Delta A = 0$$

Применяя к равенству (3.3) еще раз операцию Δ и учитывая, что для сил и напряжений, не зависящих от ускорений, $\Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{p}_i = 0$, получаем

$$\Delta^2 A = - \frac{(dt)^2}{2} \int_D \rho (\Delta \mathbf{w})^2 d\tau < 0$$

Следовательно, для сплошной среды установлен [8, 9]

Принцип Четаева. Работа на элементарном цикле, состоящем из прямого движения сплошной среды в поле массовых и поверхностных сил и движения обратного в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы частицы среды были совершенно свободными, для действительного движения имеет (по меньшей мере относительный) максимум в классе мыслимых по Гауссу движений.

Этот принцип подобно принципу Даламбера — Лагранжа можно выразить также с учетом первого и второго законов термодинамики.

Поступила 29 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.
2. *Жермен П.* Механика сплошных сред. М., «Мир», 1965.
3. *Кильчевский Н. А., Никулинская С. Н.* Принцип Гаусса в механике сплошной среды. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 2.
4. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М., Гостехиздат, 1954.
5. *Румянцев В. В.* О системах с трением. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
6. *Седов Л. И.* Об основных концепциях механики сплошной среды. В сб.: Некоторые проблемы математики и механики. Изд-во СО АН СССР, 1961.
7. *Гаусс К.* Об одном новом общем принципе механики. В сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959.
8. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
9. *Румянцев В. В.* О принципе Четаева. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 4.
10. *Тамуж В. П.* Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.