нако если контуры отверстий оболочки совпадают с изометрически сопряженными линиями на срединной поверхности, то такое состояние, безусловно, реализуется.

Поступила 20 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрик П. И.* Об одном достаточном условии существования дополнительной нагрузки, вызывающей в оболочке безмоментное состояние. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1965.
2. *Кудрик П. И.* Об одной задаче оптимального нагружения оболочек. Доповіді АН УРСР. Сер. А. 1969, № 1.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.

УДК 536.24.01

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ОБЛАСТЕЙ»

Г. А. Гринберг, В. А. Косс

(Ленинград)

Точные решения, приведенные в [1], обобщаются на случай цилиндрических и сферических секторов, вращающихся по азимуту относительно начала координат либо равномерно, либо равноускоренно (равнозамедленно). Расширен тип уравнений движения границ полупространства (в декартовых координатах), приводящих к точным решениям уравнения Фурье, определенного в этих областях.

1. **Декартовы координаты.** Пусть область, в которой определено уравнение Фурье, по координате x_i ($i = 1$ или $i = 1,2$, или $i = 1, 2, 3$) полуограничена: $x_i \in (R_i^0(t), \infty)$ и пусть функция η_i в формуле (1.3) работы [1] — некоторая вспомогательная функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно.

Тогда формулами (1.4) — (1.6) из [1] указывается тот вид функции η_i в зависимости от закона движения границы $R_i^{(0)}$, при которых уравнение теплопроводности, записываемое в декартовых координатах, допускает точное решение путем разделения переменных.

2. **Цилиндрические координаты.** Точные решения, приведенные в п. 2 работы [1], допускают обобщение на цилиндрические секторы, вращающиеся равномерно или равноускоренно (равнозамедленно). При этом движение по оси z может либо отсутствовать, либо принадлежать к одному из типов, определяемых формулами (1.4) — (1.6) работы [1].

Действительно, введем в уравнении

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial U}{\partial t}-f(r,\varphi,z,t)$$

$$r\in(R_1(t),\,\alpha R_1(t)),\qquad \varphi\in(R_2^{(0)}(t),\,R_2^{(1)}(t)),\qquad z\in(R_3^{(0)}(t),\,R_3^{(1)}(t))$$

где $\alpha = \mathrm{const}$ (в частности нуль или ∞), $R_2^{(1)} - R_2^{(0)} = \mathrm{const}$, новые координаты

$$y_1 = r / R_1,\ \ y_2 = \varphi - R_2^{(0)},\ \ y_3 = (z - R_3^{(0)}) /$$

причем $\eta = R_3^{(1)} - R_3^{(0)}$, если $|R_3^{(1)}|_{t<\infty} < \infty$, или η — некоторая вспомогательная функция, если $R_3^{(1)} \equiv \infty$, и новую функцию V

$$U = qV, \qquad q = (R_1 \sqrt{\eta})^{-1} \exp \Big[-\frac{1}{4} (y_1^2 R_1 R_1^{\cdot} + 2y_2 R_2^{(0)\cdot} + y_3 \eta \eta^{\cdot} + 2y_3 \eta R_3^{(0)\cdot} + \int^t [R_2^{(0)\cdot 2} + R_3^{(0)\cdot 2}]\, dt \Big]$$

(q определено по методу работы [2]). Тогда придем к следующему уравнению относительно V:

$$\frac{1}{R_1^2} \left[\frac{1}{y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(y_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} \right) + \frac{1}{4} y_1^2 R_1^3 R_1^{\cdot\cdot} V + \frac{1}{y_1^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} + \frac{1}{2} y_2 R_2^{(0)\cdot\cdot} V \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_3^2} + \frac{1}{4} (y_3^2 \eta^3 \eta^{\cdot\cdot} + 2y_3 \eta^3 R_3^{(0)\cdot\cdot}) V \right] =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{q} f (y_1 R_1, y_2 + R_2^{(0)}, y_3 \eta + R_3^{(0)})$$

Это уравнение допускает точное решение по методу разделения переменных, если одновременно выполняются условия

$$R_1^3 R_1^{\cdot\cdot} = \text{const}, \ R_2^{(0)\cdot\cdot} = \text{const}, \ \eta^3 \eta^{\cdot\cdot} = \text{const}, \ \eta^3 R_3^{(0)\cdot\cdot} = \text{const}$$

Из второго условия и вытекает сделанное утверждение.

3. **Сферические координаты.** 3.1. Пусть уравнение теплопроводности зависит только от одной пространственной координаты r. Тогда, как известно, введя новую функцию $W = rU$ (U — искомая функция), получим относительно W уравнение, аналогичное уравнению Фурье в декартовых координатах. Следовательно, в этом случае применимы результаты, приведенные выше в п. 1.

3.2. Пусть область представляет собой сферический сектор

$$r \in (R_1(t),\ \alpha R_1(t)), \quad \varphi \in (R_2(t),\ R_2(t) + \beta), \quad \vartheta \in (\gamma, \delta)$$

где α, β, γ, δ — постоянные.

Выполнив действия, аналогичные сделанным в п. 2, можно убедиться, что исходное уравнение допускает, как и ранее, точное решение, если сектор изменяет свои размеры по радиусу в соответствии с уравнением $R_1^3 R_1^{\cdot\cdot} = \text{const}$, вращаясь по углу φ вокруг начала координат равномерно или равноускоренно (равнозамедленно), т. е. при $R_2(t) = Mt^2 + At + B$ (M, A, B — const).

Поступила 12 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринберг Г. А., Косс В. А.* О некоторых точных решениях уравнения Фурье для изменяющихся со временем областей. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
2. *Гринберг Г. А.* О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.