Так как N выбрана ортогонально Φ, Φ_k, то на основании формул (11), (13) имеем $N = 0$ и, кроме того, из уравнения (20), как следствие, получаем

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$$

Из полученных результатов, как частные случаи, можно получить соответствующую теорему для точек постоянной массы [2], а также собственно теорему Боннэ [1]. Аналогично тому, как это было сделано в работе [2], полученные результаты можно применить к исследованию движения точек переменной массы в гравитационном поле двух неподвижных центров.

Поступила 7 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonnet O.* Note sur un théorème de Méchanique. J. Math., 1844, t. 9, p. 113—115; Solutions de guelgues problémes de mécanique. J. Math., t. 9, p. 217—238.
2. *Егоров В. А.* О теореме Боннэ. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
3. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М., Гостехиздат, 1952, стр. 96—101.

УДК 539.3

О БЕЗМОМЕНТНОМ СОСТОЯНИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

П. И. Кудрик

(Киев)

Исследуются условия реализации безмоментного напряженного состояния равновесия многосвязных оболочек положительной гауссовой кривизны, находящихся под действием поверхностных и контурных сил; вводятся понятия корректности и устойчивости безмоментных состояний. Терминология и обозначения соответствуют принятым в [1, 2].

1. Отнесем срединную поверхность S многосвязной оболочки положительной гауссовой кривизны к изометрически сопряженной криволинейной системе координат x^1, x^2 и запишем ее уравнение в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$. Относительно регулярности оболочки предполагаем, что $S \in D_{k+3,p}$, $p > 2$, $k \geqslant 0$. Гомеоморфным образом срединной поверхности S и ее контура $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ в координатной плоскости $\zeta = x^1 + ix^2$ является область G с границей $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_m$. Линии отверстий в оболочке $L_0, L_1, \ldots, L_m$ представляют собой замкнутые, пространственные, непересекающиеся кривые класса Ляпунова. Системой координат x^1, x^2 всегда можно распорядиться так, чтоб точка $\zeta = 0$ принадлежала внутренности области G, а контур Γ_0 охватывал все другие кривые $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Наконец, вторая квадратичная форма поверхности S в изометрически сопряженной системе координат x^1, x^2 имеет канонический вид: $\sqrt{gK}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$, т. е. коэффициенты этой формы связаны соотношениями: $b_{11} = b_{22} = \sqrt{gK}$, $b_{12} = b_{21} = 0$. Здесь g и K — соответственно дискриминант первой квадратичной формы поверхности S и ее гауссова кривизна.

Система уравнений безмоментной теории оболочек имеет в тензорной символике следующий вид [3]:

$$\sqrt{gK}\,(T^{11}+T^{22})+Z=0$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}T^{\lambda\beta}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma}+X^{\beta}=0 \qquad (\beta=1,2)$$

где $T^{\alpha\beta}$ — контравариантный тензор усилий, X^{β} — контравариантные компоненты поверхностной нагрузки X, Z — ее нормальная составляющая, $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля второго рода поверхности S.

Если из этой системы исключить усилие T^{22} и ввести в рассмотрение комплексную функцию напряжений по формуле $W(\xi)=\sqrt{g}\,(T^{11}-iT^{12})$, то для нее получим уравнение типа Карлемана

$$\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}W-A(\zeta)W-\overline{B(\zeta)}\,\overline{W}=F(\zeta),\qquad \zeta\in G \tag{1.1}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}W=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial W}{\partial x^2}\right)$$

$$A=\frac{1}{4}(\Gamma_{22}{}^1-\Gamma_{11}{}^1-2\Gamma_{12}{}^2)+\frac{i}{4}(\Gamma_{11}{}^2-\Gamma_{22}{}^2-2\Gamma_{12}{}^1)$$

$$B=\frac{1}{4}(\Gamma_{22}{}^1-\Gamma_{11}{}^1+2\Gamma_{12}{}^2)-\frac{i}{4}(\Gamma_{11}{}^2-\Gamma_{22}{}^2+2\Gamma_{12}{}^1)$$

$$F=\frac{1}{2}\sqrt{K}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{Z}{K}\right)-\frac{\sqrt{g}}{2}(X^1-iX^2)$$

Решения уравнения (1.1) будем искать в классе непрерывных в $G+\Gamma$ обобщенных аналитических функций.

В работе [3] показано, что если вдоль контура L безмоментной оболочки приложено усилие $\mathbf{T}_L$, то оно выражается через граничные значения искомой функции W по формуле

$$\mathbf{T}_L=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}W(\tau)\frac{d\tau}{ds}(\mathbf{r}_1+i\mathbf{r}_2)\right]-\frac{Z}{2\sqrt{K}}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}\frac{d\tau}{ds}(\mathbf{r}_1+i\mathbf{r}_2)\right] \tag{1.2}$$

$$\tau\in\Gamma$$

Здесь s — натуральный параметр контура L, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — векторы основного базиса на срединной поверхности S.

Обозначим через n и s соответственно орт нормали в произвольной точке поверхности S и орт касательной контура L. Тогда ортом тангенциальной нормали вдоль контура L оболочки будет вектор $\mathbf{l}=[\mathbf{s}\times\mathbf{n}]$.

2. Рассмотрим следующую задачу из теории оболочек. Пусть на оболочку действует наперед заданная поверхностная нагрузка $\mathbf{X}=X^{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha}+Z\mathbf{n}$ и некоторое контурное усилие $\mathbf{T}_L$, относительно которого известна лишь составляющая по направлению орта λ, образующего угол $\varphi(s)$ с ортом касательной s к линии L. Не определяя второй составляющей усилия $\mathbf{T}_L$, требуется установить, находится ли оболочка в безмоментном состоянии под действием заданных таким образом внешних сил. Задачи такого рода часто встречаются в инженерной практике. Конечно, на практике учитывают то обстоятельство, что в определенной зоне возле отверстий в оболочке возникает концентрация напряжений, для определения которой имеется ряд эффективных методов [4].

Покажем, что сформулированная задача приводится к решению краевой задачи Римана — Гильберта в классе обобщенных аналитических функций. Действительно, умножим обе части (1.2) скалярно на λ и обозначим через $f=\mathbf{T}_L\lambda$ заданную составляющую контурного усилия $\mathbf{T}_L$. Тогда (1.2) преобразуется к такому виду:

$$\operatorname{Re}\left[W\frac{d\tau}{ds}\frac{d\tau}{d\lambda'}\right]=h,\qquad \tau\in\Gamma \tag{2.1}$$

$$h=-\frac{1}{\sqrt{g}}f-\frac{Z}{2\sqrt{K}}\operatorname{Re}\left[\frac{d\tau}{ds}\frac{d\tau}{d\lambda'}\right]$$

Здесь λ' — сопряженный с λ единичный вектор, касательный к срединной поверхности S, причем $[\lambda\lambda'] = \mathbf{n}$. Для вывода (2.1) была использована формула

$$\frac{\sqrt{g}}{i}\frac{d\tau}{d\lambda'} = \lambda_1 + i\lambda_2$$

где λ_1, λ_2 — ковариантные составляющие λ.

Таким образом, получена следующая краевая задача Римана — Гильберта: найти обобщенную аналитическую функцию W из уравнения (1.1), которая непрерывна в $G + \Gamma$ и на границе Γ области G удовлетворяет краевому условию (2.1).

Для исследования этой краевой задачи привлечем вспомогательную, сопряженную краевую задачу Римана — Гильберта: найти обобщенную аналитическую функцию U, удовлетворяющую в области G уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}U + A(\zeta)U + B(\zeta)\bar{U} = 0, \qquad \zeta \in G \qquad (U = u_1 + iu_2) \tag{2.2}$$

которая непрерывно продолжима на границу Γ и на самой границе Γ удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d\tau}{d\lambda'}U(\tau)\right] = 0, \qquad \tau \in \Gamma \tag{2.3}$$

Краевой задаче (2.2), (2.3) можно дать следующую геометрическую интерпретацию: это есть задача о нахождении бесконечно малых изгибаний первого порядка для поверхности S, когда вдоль ее контура L ковариантные составляющие поля смещения u_1, u_2 связаны соотношением (2.3).

3. Обозначим через n, χ и n', χ' соответственно числа линейно независимых решений и индексы краевых задач (1.1), (2.1)—(2.3). Воспользуемся теоремами И. Н. Векуа (см. [3], стр. 252—257) применительно к сформулированным выше краевым задачам. Так, имеет место равенство: $n - n' = \chi - \chi' = 2\chi + 1 - m$, где целое число m указывает на порядок связности оболочки. Если индекс задачи (1.1), (2.1) отрицательный: $\chi < 0$, то она допускает решение только тогда, когда выполнены так называемые условия разрешимости

$$\int\limits_L fU_\lambda^{(j)}\,ds + \iint\limits_S \mathbf{U}^{(j)}\mathbf{X}\,dS = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n') \tag{3.1}$$

где $\mathbf{U}^{(1)}, \ldots, \mathbf{U}^{(n')}$ — полная система линейно независимых полей смещений срединной поверхности при ее бесконечно малых изгибаниях.

Подсчитаем теперь индексы исследуемых краевых задач. Имеем

$$\chi = m - 1 - \chi_{\lambda'}, \qquad \chi' = \chi_{\lambda'}, \qquad \chi_{\lambda'} = \mathrm{Ind}\frac{d\tau}{d\lambda'}$$

Следовательно, когда $\chi_{\lambda'} < 0$, тогда $n' = 0$, $n = m - 1 - 2\chi_{\lambda'}$. Отсюда следует, что задача (1.1), (2.1) всегда разрешима, и ее решение дается формулой

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + \sum_{k=1}^{m-1-2\chi_{\lambda'}} C_k W_k(\zeta)$$

Здесь C_k — произвольные вещественные постоянные, $W_1, \ldots W_{m-1-2\chi_{\lambda'}}$ — линейно независимые решения соответствующей (1,1), (2,1) однородной задачи, W_0 — частное решение неоднородной задачи.

Вид решения краевой задачи показывает, что при заданной системе внешних сил в оболочке можно реализовать $m - 1 - 2\chi_{\lambda'}$ безмоментных напряженных состояний равновесия. О такой ситуации будем говорить, что физическая задача поставлена квазикорректно. Однако путем наложения дополнительных условий точечного характера всегда можно добиться того, чтобы в оболочке возникло лишь одно определенное состояние безмоментности. Для этого достаточно задать значение двух составляющих вектора усилия $\mathbf{T}_L$ в k внутренних точках $m_1, m_2, \ldots, m_k$ оболочки и значение одной составляющей усилия $\mathbf{T}_L$ в k' точках $m_1', m_2', \ldots, m_{k'}'$ на контуре L; при этом должны быть соблюдены три следующие условия: 1) на каждом контуре L_j ($j = 1, \ldots, m$) нужно взять нечетное число точек; 2) $2k + k' = 2n + 1 - m$; 3) $k' \geqslant m$. Тогда, как показывают исследования И. Н. Векуа и Б. В. Боярского [3], краевая задача Римана — Гильберта (1.1), (2.1) имеет единственное решение, и сама задача корректна. Корректность задачи означает, что при незначительных изменениях геометрии оболочки (ее формы и размеров, гауссовой кривизны, расположения отверстий и т. д.) и вариации внешних сил оболочка будет работать в определенном безмоментном состоянии. Это обстоятельство влечет своеобразную устойчивость безмоментности оболочки.

Пусть теперь $\chi_{\lambda'} > m - 1$, тогда $n = 0$, $n' = 2\chi_{\lambda'} + 1 - m$, и краевая задача (1.1), (2.1) имеет отрицательный индекс. Следовательно, для ее разрешимости должны выполняться $2\chi_{\lambda'} + 1 - m$ условий вида (3.1). Может случиться, что в (3.1) входят лишь тривиальные поля изгибания; тогда получаем обычные условия равновесия оболочки, которые по условию задачи имеют место. Если же оболочка ослаблена более чем пятью отверстиями, то в (3.1) обязательно войдет, по крайней мере, одно нетривиальное изгибающее поле и, следовательно, реализация безмоментного состояния в оболочке не всегда возможна.

Наконец, рассмотрим случай, когда $0 \leqslant \chi_{\lambda'} \leqslant m - 1$. Это возможно лишь тогда, когда оболочка ослаблена двумя или более отверстиями ($m > 0$). Для $\chi_{\lambda'} = m - 1$ имеются две возможности: 1) $n = 0$ или 2) $n = 1$. Тогда соответственно: 1) $n' = m - 1$ или 2) $n' = m$. Это означает, что если оболочка ослаблена более чем двумя отверстиями ($m > 1$), то краевая задача (1.1), (2.1) некорректна в обоих случаях. Но оболочка с двумя отверстиями ($m = 1$) в первом случае ($n = 0$) всегда реализует безмоментное состояние (и притом единственное), во втором случае ($n = 1$) соответствующая задача некорректна.

4. Назовем два касательных к поверхности S направления λ и λ^* направлениями одного и того же класса, если $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^*}$. Если угол φ^* между двумя векторами λ и λ^* в каждой точке контура L, такой, что $|\varphi^*| < \pi$, то эти векторы, очевидно, принадлежат одному классу. Если, например, вектор λ принадлежит классу касательных s к контуру L, то $\chi_\lambda = \chi_{\lambda^*} = \chi_s = 1 - m$. Если, кроме того, угол φ^* является непрерывной по Гёльдеру функцией: $\varphi^* \in C_\alpha(L)$ и его норма в метрике $C_\alpha(L)$ удовлетворяет условию $\|\varphi - \varphi^*\|_{C_\alpha} < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, то говорят, что направление λ^* — нормальное возмущение направления λ.

Наряду с задачей (1.1), (2.1) будем рассматривать нормально возмущенную задачу, которая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}W - A^*(\zeta)W - \overline{B^*(\zeta)}\,\overline{W} = F^*(\zeta), \qquad \zeta \in G$$

$$\operatorname{Re}\left[W\frac{d\tau}{ds}\frac{d\tau}{d\lambda^*}\right] = h^*$$

$$\|A - A^*\|_{L_p} < \varepsilon, \qquad \|B - B^*\|_{L_p} < \varepsilon, \qquad \|F - F^*\|_{L_p} < \varepsilon$$

$$\|\varphi - \varphi^*\|_{C_\alpha} < \varepsilon, \qquad \|h - h^*\|_{C_\alpha} < \varepsilon$$

Ясно, что если краевая задача (1.1), (2.1) квазикорректна, то и нормально возмущенная задача также квазикорректна для достаточно малых ε.

Рассмотрим в заключение случай, когда вектор λ принадлежит классу s. Тогда $\chi = 2(m - 1)$. Следовательно, для односвязных оболочек $\chi = -2$, $n = 0$, $n' = 3$. Это означает, что для реализации безмоментного состояния в оболочке с одним отверстием должны выполняться три условия вида (3.1). Если контур L срединной поверхности проходит вдоль изометрически сопряженной линии, то соответствующие изгибания поверхности будут тривиальными [2], и поставленная задача имеет единственное решение. Для оболочек с тремя и более отверстиями безмоментное напряженное состояние будет квазикорректным, так как $n = 0$, а $n' = 3m - 3$. Для двухсвязных оболочек положительной кривизны безмоментное состояние не всегда можно реализовать; однако если контуры отверстий оболочки совпадают с изометрически сопряженными линиями на срединной поверхности, то такое состояние, безусловно, реализуется.

Поступила 20 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрик П. И.* Об одном достаточном условии существования дополнительной нагрузки, вызывающей в оболочке безмоментное состояние. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1965.
2. *Кудрик П. И.* Об одной задаче оптимального нагружения оболочек. Доповiдi АН УРСР. Сер. А. 1969, № 1.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.

УДК 536.24.01

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ОБЛАСТЕЙ»

Г. А. Гринберг, В. А. Косс

(Ленинград)

Точные решения, приведенные в [1], обобщаются на случай цилиндрических и сферических секторов, вращающихся по азимуту относительно начала координат либо равномерно, либо равноускоренно (равнозамедленно). Расширен тип уравнений движения границ полупространства (в декартовых координатах), приводящих к точным решениям уравнения Фурье, определенного в этих областях.

1. Декартовы координаты. Пусть область, в которой определено уравнение Фурье, по координате x_i ($i = 1$ или $i = 1,2$, или $i = 1, 2, 3$) полуограничена: $x_i \in (R_i^0(t), \infty)$ и пусть функция η_i в формуле (1.3) работы [1] — некоторая вспомогательная функция, имеющая непрерывные производные до второго порядка включительно.

Тогда формулами (1.4) — (1.6) из [1] указывается тот вид функции η_i в зависимости от закона движения границы $R_i^{(0)}$, при которых уравнение теплопроводности, записываемое в декартовых координатах, допускает точное решение путем разделения переменных.

2. Цилиндрические координаты. Точные решения, приведенные в п. 2 работы [1], допускают обобщение на цилиндрические секторы, вращающиеся равномерно или равноускоренно (равнозамедленно). При этом движение по оси z может либо отсутствовать, либо принадлежать к одному из типов, определяемых формулами (1.4) — (1.6) работы [1].

Действительно, введем в уравнении

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial U}{\partial t}-f(r,\varphi,z,t)$$

$$r\in(R_1(t),\alpha R_1(t)),\qquad \varphi\in(R_2^{(0)}(t),R_2^{(1)}(t)),\qquad z\in(R_3^{(0)}(t),R_3^{(1)}(t))$$

где $\alpha = \mathrm{const}$ (в частности нуль или ∞), $R_2^{(1)} - R_2^{(0)} = \mathrm{const}$, новые координаты

$$y_1 = r / R_1,\ \ y_2 = \varphi - R_2^{(0)},\ \ y_3 = (z - R_3^{(0)}) /$$