УДК 531.31

К ОБОБЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ БОННЭ

Л. Н. Грудцын

(Саратов)

Известная теорема Боннэ [1] обобщается на случай движения материальных точек переменной массы, движущихся под действием квазипозиционной системы сил, т. е. системы, каждая сила которой — функция только параметров, определяющих положение точки на траектории.

Рассмотрим движение каждой из n свободных материальных точек переменной массы m_k, происходящее под действием активной силы $\mathbf{F}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, зависящей только от положения точки на траектории [2]. Массу каждой точки считаем непрерывно дифференцируемой функцией криволинейной координаты $m_k = m_k(s)$.

На каждую точку массы m_k действует реактивная сила $\mathbf{R}_k$. Если предположить, что

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{w}_k(s)\, v_k^{-1} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_k$ — абсолютная скорость отсоединения (или присоединения) частиц, $\mathbf{w}_k$ — непрерывная вектор-функция, то сила $\mathbf{R}_k$ будет квазипозиционной

$$\mathbf{R}_k = \frac{dm_k}{ds}\mathbf{w}_k(s) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

Допустим, что силы, действующие на материальные точки, и начальные условия таковы, что каждая из этих точек описывает одну и ту же траекторию — кривую AB.

Найдем условие, при котором материальная точка переменной массы $M = M(s)$ опишет траекторию AB или по крайней мере ее часть. Считаем $M(s)$ непрерывно дифференцируемой функцией.

Предположим, что существуют вещественные числа a_k, b_k, такие, что

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{F}_k, \qquad \mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{R}_k \tag{3}$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$ — силы, действующие на точку M. Следуя терминологии работы [2], назовем движение, вызываемое только силами $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{R}_k$ при каждом фиксированном k, частным движением, а движение, вызываемое силами $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$,— сложным движением.

Заранее нельзя утверждать, что точка массы M в сложном движении описывает кривую AB, поэтому введем восстанавливающую силу $\mathbf{N}$, нормальную к этой кривой в каждой точке [2], такую, что данная точка под действием силы $\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{N}$ будет описывать траекторию AB.

Уравнение сложного движения [3] имеет вид

$$d\mathbf{K}(dt)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{R}_k + \mathbf{N}, \qquad \mathbf{K} = M\mathbf{v} \tag{4}$$

Отсюда

$$dT = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta A_k(\mathbf{F}_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k \delta A_k(\mathbf{R}_k) - \frac{1}{2} v^2 dM \tag{5}$$

$$T = {}^1/_2 M v^2, \qquad d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$$

Здесь $\delta A_k(\mathbf{F}_k)$, $\delta A_k(\mathbf{R}_k)$ — элементарные работы.

Пусть $\mathbf{v}_k$ — скорости точек с массами m_k в частных движениях. Тогда для частных движений имеем

(6) $$dT_k^* = \delta A_k(\mathbf{F}_k) - \frac{1}{2}(v_k^*)^2\, dm_k^*, \quad T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2$$

(7) $$dT_k^\circ = \delta A_k(\mathbf{R}_k) - \frac{1}{2}(v_k^\circ)^2\, dm_k^\circ, \quad d\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}$$

В формулах (6), (7) и в дальнейшем звездочкой сверху обозначены величины, относящиеся к частным движениям точек с массами m_k при наложенных на них кинематических связях вида $\mathbf{w}_k = 0$; нуль сверху относится к величинам в частных движениях для материальных точек, изолированных от активных силовых воздействий.

Используя соотношения (6), (7), построим базисную комбинацию

(8) $$D = \sum_{k=1}^{n} a_k dT_k^* + \sum_{k=1}^{n} b_k dT_k^\circ$$

На основании равенства квазипозиционных активных и реактивных сил в сложном и в частных движениях, а также в силу равенства $d\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}$ из соотношений (5), (8) следует

(9) $$dT + \frac{1}{2} v^2 dM = \sum_{k=1}^{n} a_k dT_k^* + \sum_{k=1}^{n} b_k dT_k^\circ + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k (v_k^*)^2\, dm_k^* + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k (v_k^\circ)^2\, dm_k^\circ$$

Примем, что

(10) $$v^2 dM = \sum_{k=1}^{n} a_k (v_k^*)^2\, dm_k^* + \sum_{k=1}^{n} b_k (v_k^\circ)^2\, dm_k^\circ$$

Интегрируя равенство (9) с учетом (10), получаем

(11) $$T = T_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k^* + \sum_{k=1}^{n} b_k T_k^\circ$$

(12) $$2T_0 = M_0 v_0^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{*}{m}_{0k} (\overset{*}{v}_{0k})^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k \overset{\circ}{m}_{0k} (\overset{\circ}{v}_{0k})^2$$

Нуль снизу соответствует значениям величин при $t = 0$.

Если принять, что

(13) $$M_0 v_0^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{*}{m}_{0k} (\overset{*}{v}_{0k})^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \overset{\circ}{m}_{0k} (\overset{\circ}{v}_{0k})^2 > 0$$

то $T_0 = 0$, и величина T существенно положительна по крайней мере в некоторой полуокрестности точки A.

Покажем, что в любой внутренней точке траектории AB восстанавливающая сила $\mathbf{N} = 0$. Проектируя обе части уравнения (4) на нормальную плоскость P естественного трехгранника, получаем

(14) $$Mv^2\rho^{-1}\mathbf{n} = \sum_{k=1}^{n} a_k (\mathbf{F}_k)_P \sum_{k=1}^{n} b_k (\mathbf{R}_k)_P + N$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали; ρ — радиус кривизны траектории; нижний индекс P означает проекцию вектора на одноименную плоскость.

Для частных движений

$$m_k^*(v_k^*)^2\rho^{-1}\mathbf{n}=(\mathbf{F}_k)_P,\qquad m_k^\circ(v_k^\circ)^2\rho^{-1}\mathbf{n}=(\mathbf{R}_k)_P \tag{15}$$

Построив базисную комбинацию для равенств (15) и используя тождественность сил $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{R}_k$ в частных и сложном движениях, а также равенство $\mathbf{N}=N\mathbf{n}$, из соотношений (14), (15) получаем

$$T=\sum_{k=1}^n a_kT_k^*+\sum_{k=1}^n b_kT_k^\circ+\frac{1}{2}\rho N \tag{16}$$

Исключая значения $\rho=0$, ∞ и сравнивая соотношения (16) и(11), при выполнении условия (13) получаем $\mathbf{N}=0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть каждая из материальных точек с переменными массами m_k $(k=1,\ldots,n)$, имеющими квазипозиционный характер изменения, описывает одну и ту же траекторию AB под действием квазипозиционных активных $\mathbf{F}_k$ и реактивных $\mathbf{R}_k$ сил. Если выполняются условия (1), (3), (10), (13), то материальная точка массы M, на которую действуют силы $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$, имеющая скорость $\mathbf{v}_0$ того же направления, что и каждая из $\mathbf{v}_{0k}$, опишет по крайней мере часть траектории AB, примыкающую к точке A.

Аналогично тому, как это было сделано в работе [2], можно показать, что имеет место обратная теорема.

Теорема 2. При условиях теоремы 1, если кривая AB — траектория материальной точки массы M, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_0$ под действием сил (3), то вдоль кривой AB выполняются условия (1), (10), (13).

Действительно, убеждаемся, что в этом случае также справедливы соотношения (14), (15), причем, в силу условий данной теоремы $\mathbf{N}=0$.

Используя равенство соответствующих квазипозиционных сил в соотношениях (14), (15), получаем равенство, эквивалентное системе соотношений (11), (12).

Теорему 1 можно распространить и на случай несвободного движения, когда траектория AB расположена на некоторой гладкой поверхности Q. Силы нормальных реакций $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}_k$ поверхности Q в сложном и частных движениях нормальны к плоскости Q_τ, касательной к поверхности Q в точках кривой AB, а восстанавливающую силу $\mathbf{N}$ можно выбрать лежащей в плоскости Q_τ. Тогда уравнение сложного движения будет [3]

$$d\mathbf{K}\,(dt)^{-1}=\sum_{k=1}^n a_k\mathbf{F}_k+\sum_{k=1}^n b_k\mathbf{R}_k+\mathbf{N}+\mathbf{\Phi} \tag{17}$$

В этом случае равенства (11), (13) остаются справедливыми, а вместо (15) получаем

$$m_k^*(v_k^*)^2\rho^{-1}\mathbf{n}=(\mathbf{F}_k)_P+\mathbf{\Phi}_k,\qquad m_k^\circ(v_k^\circ)^2\rho^{-1}\mathbf{n}=(\mathbf{R}_k)_P+\mathbf{\Phi}_k \tag{18}$$

Уравнение (17) в проекции на плоскость P будет

$$Mv^2\rho^{-1}\mathbf{n}=\sum_{k=1}^n a_k(\mathbf{F}_k)_P+\sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{R}_k)_P+\mathbf{N}+\mathbf{\Phi} \tag{19}$$

Если, аналогично предыдущему, построить базисную комбинацию с помощью равенств (18) и подставить ее в правую часть (19), то получим

$$2\left(T-\sum_{k=1}^n a_kT_k^*-\sum_{k=1}^n b_kT_k^\circ\right)\rho^{-1}\mathbf{n}=\mathbf{N}+\mathbf{\Phi}-\sum_{k=1}^n c_k\mathbf{\Phi}_k\qquad(c_k=a_k+b_k) \tag{20}$$

Так как N выбрана ортогонально Φ, Φ_k, то на основании формул (11), (13) имеем N = 0 и, кроме того, из уравнения (20), как следствие, получаем

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k$$

Из полученных результатов, как частные случаи, можно получить соответствующую теорему для точек постоянной массы [2], а также собственно теорему Боннэ [1]. Аналогично тому, как это было сделано в работе [2], полученные результаты можно применить к исследованию движения точек переменной массы в гравитационном поле двух неподвижных центров.

Поступила 7 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonnet O.* Note sur un théorème de Méchanique. J. Math., 1844, t. 9, p. 113—115; Solutions de guelgues problémes de mécanique. J. Math., t. 9, p. 217—238.
2. *Егоров В. А.* О теореме Боннэ. ПММ, 1958, т. 22, вып. 6.
3. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М., Гостехиздат, 1952, стр. 96—101.

УДК 539.3

О БЕЗМОМЕНТНОМ СОСТОЯНИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

П. И. Кудрик

(Киев)

Исследуются условия реализации безмоментного напряженного состояния равновесия многосвязных оболочек положительной гауссовой кривизны, находящихся под действием поверхностных и контурных сил; вводятся понятия корректности и устойчивости безмоментных состояний. Терминология и обозначения соответствуют принятым в [1, 2].

1. Отнесем срединную поверхность S многосвязной оболочки положительной гауссовой кривизны к изометрически сопряженной криволинейной системе координат x^1, x^2 и запишем ее уравнение в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$. Относительно регулярности оболочки предполагаем, что $S \in D_{k+3,p}$, $p > 2$, $k \geqslant 0$. Гомеоморфным образом срединной поверхности S и ее контура $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ в координатной плоскости $\zeta = x^1 + ix^2$ является область G с границей $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_m$. Линии отверстий в оболочке $L_0, L_1, \ldots, L_m$ представляют собой замкнутые, пространственные, непересекающиеся кривые класса Ляпунова. Системой координат x^1, x^2 всегда можно распорядиться так, чтоб точка $\zeta = 0$ принадлежала внутренности области G, а контур Γ_0 охватывал все другие кривые $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Наконец, вторая квадратичная форма поверхности S в изометрически сопряженной системе координат x^1, x^2 имеет канонический вид: $\sqrt{gK}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$, т. е. коэффициенты этой формы связаны соотношениями: $b_{11} = b_{22} = \sqrt{gK}$, $b_{12} = b_{21} = 0$. Здесь g и K — соответственно дискриминант первой квадратичной формы поверхности S и ее гауссова кривизна.