УДК 531.31

ОБОБЩЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

А. А. Богоявленский

(Москва)

Рассматриваются обобщенные циклические перемещения голономных механических систем с конечным числом степеней свободы и их применение для интегрирования уравнений движения.

Н. Г. Четаев обратил внимание [1] на постановку задач об общих свойствах механических систем, связанных с группами преобразований, оставляющими инвариантами основные механические функции. Им было введено [2] понятие циклического перемещения механической системы с наложенными на нее гладкими голономными связями. Это понятие было расширено в работе [3] при рассмотрении одного частного случая движения механической системы с тремя степенями свободы.

1. Рассмотрим механическую систему, которая стеснена гладкими голономными связями и имеет k степеней свободы.

Пусть положение системы определяется вещественными зависимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > k)$.

Возможные перемещения механической системы определяются некоторой интранзитивной, k-членной группой инфинитезимальных операторов

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_\alpha{}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

Построение групп возможных перемещений исследовано в работе [4].

Изменение функции $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ на возможном (δf) и на действительном (df) перемещении системы определяется так:

$$\delta f = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha f, \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha f\right) dt \tag{1.1}$$

Здесь ω_α и η_α — независимые между собой параметры возможного и действительного перемещения соответственно.

Если возможные перемещения X_α удовлетворяют условиям

$$X_\alpha (L) = 0 \qquad (X_\alpha, X_\beta) = 0$$

то такие перемещения Четаев определил как циклические перемещения [2]. Пример таких перемещений рассмотрен в работе [5]. Вводя вместо параметров Пуанкаре переменные

$$y_\alpha = \partial T / \partial \eta_\alpha \tag{1.2}$$

Четаев установил канонические уравнения и уравнение в частных производных для функции действия V в следующей форме:

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum c_{\alpha s \beta} \eta_\alpha y_\beta - X_s(H), \quad \eta_s = \frac{\partial H}{\partial y_s} \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_1, \ldots x_n, X_1 V, \ldots, X_k V) = 0 \tag{1.4}$$

$$H = \sum_{i=1}^{k} \eta_i y_i - L = H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$$

$$V = V(t, x_1, \ldots, x_n, x_1{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ)$$

Здесь H — функция Гамильтона, $L = T + U$ — функция Лагранжа, U — силовая функция системы.

2. Скорости x_i' — линейные функции переменных $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Поэтому кинетическую энергию T можно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_2 = \Sigma g_{\alpha\beta}\, \eta_\alpha\, \eta_\beta, \quad T_1 = \Sigma a_\alpha\, \eta_\alpha$$

Поскольку T_2 — форма вещественная, то, не уменьшая общности, можно считать ее заданной в симметричном виде, т.е. $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Величины T_0 и U не зависят от η_α.

Введем обобщенные циклические перемещения X_s ($s = r, \ldots, k$; $r < k$), которые удовлетворяют следующим условиям:

1) кинетическая энергия системы путем известных преобразований приведена к такому виду, когда $g_{ij} = \delta_{ij}\, g_i$ ($i, j = 1, \ldots, k$);

2) $(X_s, X_i) = 0$

3) $X_s\, (\partial L \,/\, d\eta_i) = 0$

4) $X_i\, X_s\, (U) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k; \;\; i \neq s)$

Для простоты рассмотрим случай, когда $\partial L / \partial t = 0$.

Введем систему канонических переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ по формулам (1.2) и функцию Гамильтона H. Полный интеграл уравнения в частных производных (1.4), согласно известной подстановке Имшенецкого, является суммой $V = -ht + W$, где h — постоянная интеграла энергии, W — полный интеграл уравнения

$$H\,(x_1, \;\ldots, x_n,\; X_1 W, \;\ldots,\; X_k\, W) = h \tag{2.1}$$

Это уравнение получается из общего интеграла энергии Якоби, в котором исключены переменные $\eta_i, \ldots, \eta_k$ посредством системы уравнений (1.2) через переменные y_i ($i = 1, \ldots, k$), и вместо y_i подставлены выражения $X_i\,(W)$. Указанные преобразования отметим звездочкой у функции T_2. Таким образом, функция H в уравнении (2.1) равна

$$H = T_2{}^* - T_0 - U$$

$$T_2{}^* = T_2{}^*\,(x_1, \ldots, x_n, X_1 W, \ldots, X_k W) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{g_i}\,(X_i W)^2$$

Согласно каноническим уравнениям (1.3), изменения функций $T_0 + U$ и W на действительном перемещении в канонической системе переменных в силу (1.1)

$$d\,(T_0 + U) = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\, X_\alpha\, (T_0 + U) \right\} dt \tag{2.2}$$

$$dW = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\, X_\alpha\, (W) \right\} dt \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) в силу (2.2) может быть записано в форме

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{g_i}\,(X_i W)^2 - \int \left\{ \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\, X_\alpha\, (T_0 + U) \right\} dt = h \tag{2.4}$$

Условие 3) в силу условия 1) в канонической системе переменных равносильно условию

$$X_s\, (\partial H \,/\, \partial y_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k;\; s = r, \ldots, k;\; s \neq i)$$

Согласно последнему условию и условию 4), имеем из (2.2)

$$X_s\,[d\,(T_0 + U)] = X_s \left[\frac{\partial H}{\partial y_s}\, X_s\, (T_0 + U) \right] dt$$

Это дает разделение части переменных в уравнении (2.4). Будем полагать, что

$$W = \sum_{s=r}^{k} W_s + W_0 + \text{const}$$

$$X_\alpha(W_s) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, k;\ s = r, \ldots, k;\ s \neq \alpha)$$

Тогда в силу (2.3)

$$dW_s = \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s(W_s)\,dt, \quad dW_0 = \left\{\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha(W_0)\right\} dt \ (s = r, \ldots, k) \tag{2.5}$$

$$dW = \sum_{s=r}^{k} dW_s + dW_0 = \left\{\sum_{s=r}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s(W_s) + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha(W_0)\right\} dt$$

Введем подстановку, аналогичную известной подстановке Имшенецкого, для уравнения (2.4) следующим образом: все члены уравнения, не уничтожающиеся на перемещении X_s, положим равными постоянным l_s $(s = r, \ldots, k)$

$$\frac{1}{2g_s}\left[X_s(W_s)\right]^2 - \int \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s(T_0 + U)\,dt = l_s$$

В силу соотношений (2.5) имеем

$$W_s = \int \frac{\partial H}{\partial y_s}\left[2g_s \int \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s(T_0 + U)\,dt + 2g_s l_s\right]^{1/2} dt$$

Функция W_0 удовлетворяет уравнению в частных производных

$$T_2^*(x_1, \ldots, x_n, X_1 W_0, \ldots, X_{r-1} W_0) - \int\left\{\sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{\partial H}{\partial y_\nu} X_\nu(T_0 + U)\right\} dt = h - \sum_{s=r}^{k} l_s \tag{2.6}$$

Если переменные разделяются полностью, т. е. $r = 1$, то решение задачи получается из теоремы Четаева

$$X_\alpha(V) = y_\alpha, \quad X_\alpha^\circ(V) = -y_\alpha^\circ \quad (\alpha = 1, \ldots k)$$

Последняя группа уравнений дает в неявном виде закон движения.

Пример обобщенных циклических перемещений рассмотрен в работе [3].

Поступила 21 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об оптико-механической аналогии. В кн.: Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 393—403.
2. *Четаев Н. Г.* Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
3. *Богоявленский А. А.* Обобщенные циклические перемещения для гироскопа в кардановом подвесе в частном случае движения. Тр. Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Казань, 1962.
4. *Аминов М. Ш.* Построение групп возможных перемещений. Тр. Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Казань, 1962.
5. *Богоявленский А. А.* Циклические перемещения для обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.