

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Р. М. Бергман

(Баку)

Предлагается асимптотический метод интегрирования уравнений свободных колебаний некруговой цилиндрической оболочки, свободно опертой по криволинейным краям. Выясняются качественные особенности колебаний, связанные с тем, что оболочка существенно некруговая. Представлены численные результаты для частот и форм свободных колебаний коробовой оболочки, которые сопоставляются с результатами асимптотического анализа. Предполагается, что изменяемость напряженного и деформированного состояния велика.

1. Моментные уравнения колебаний цилиндрической оболочки произвольного очертания в перемещениях, при отбрасывании второстепенных членов, имеют вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (1-\sigma^2)\lambda \right] \xi + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = 0 \\ & \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} + \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (1-\sigma^2)\lambda \right] \eta - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\zeta}{R} \right) = 0 \\ & \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} - \left[\frac{1}{R^2} - (1-\sigma^2)\lambda + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)^2 \right] \zeta = 0 \\ & \left(\lambda = \frac{m\omega^2 r^2}{2Eh}, \quad \xi = 2Ehu, \quad \eta = 2Ehv, \quad \zeta = 2Ehw \right) \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения монографии [1], и считается, что α — безразмерная длина образующей оболочки, β — безразмерная длина периметра поперечного сечения, $R = R(\beta)$ — безразмерный радиус кривизны поперечного сечения, h — безразмерная полутолщина оболочки (считаем $h \ll 1$). Безразмерный параметр частоты λ и величины ξ , η , ζ определяются формулами (для краткости ξ , η , ζ будем называть перемещениями), приведенными в скобках в (1.1), где m — масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности, ω — частота колебаний, r — некоторое характерное для оболочки число, имеющее размерность длины. Все безразмерные величины, фигурирующие в задаче, отнесены к r . При написании уравнений (1.1) считается, что оболочка совершает гармонические колебания и множитель $\sin \omega t$ при искомым величинах отброшен.

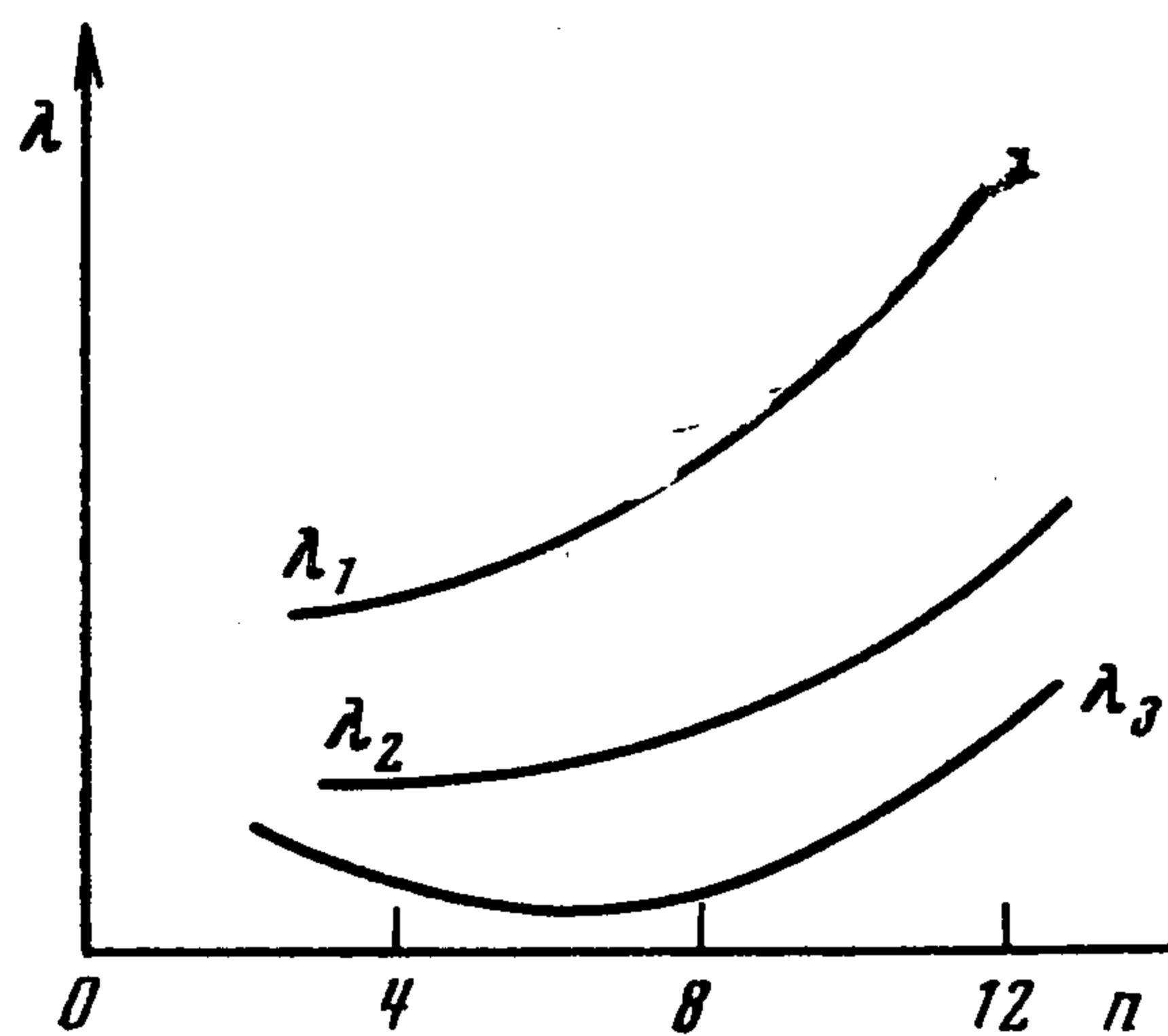
Рассмотрим сначала замкнутую круговую оболочку, свободно опертую по круговым краям. Решение ищем в виде

$$(1.2) \quad \xi = \xi_0 \cos k\alpha \sin n\beta, \quad \eta = \eta_0 \sin k\alpha \cos n\beta, \quad \zeta = \zeta_0 \sin k\alpha \sin n\beta$$

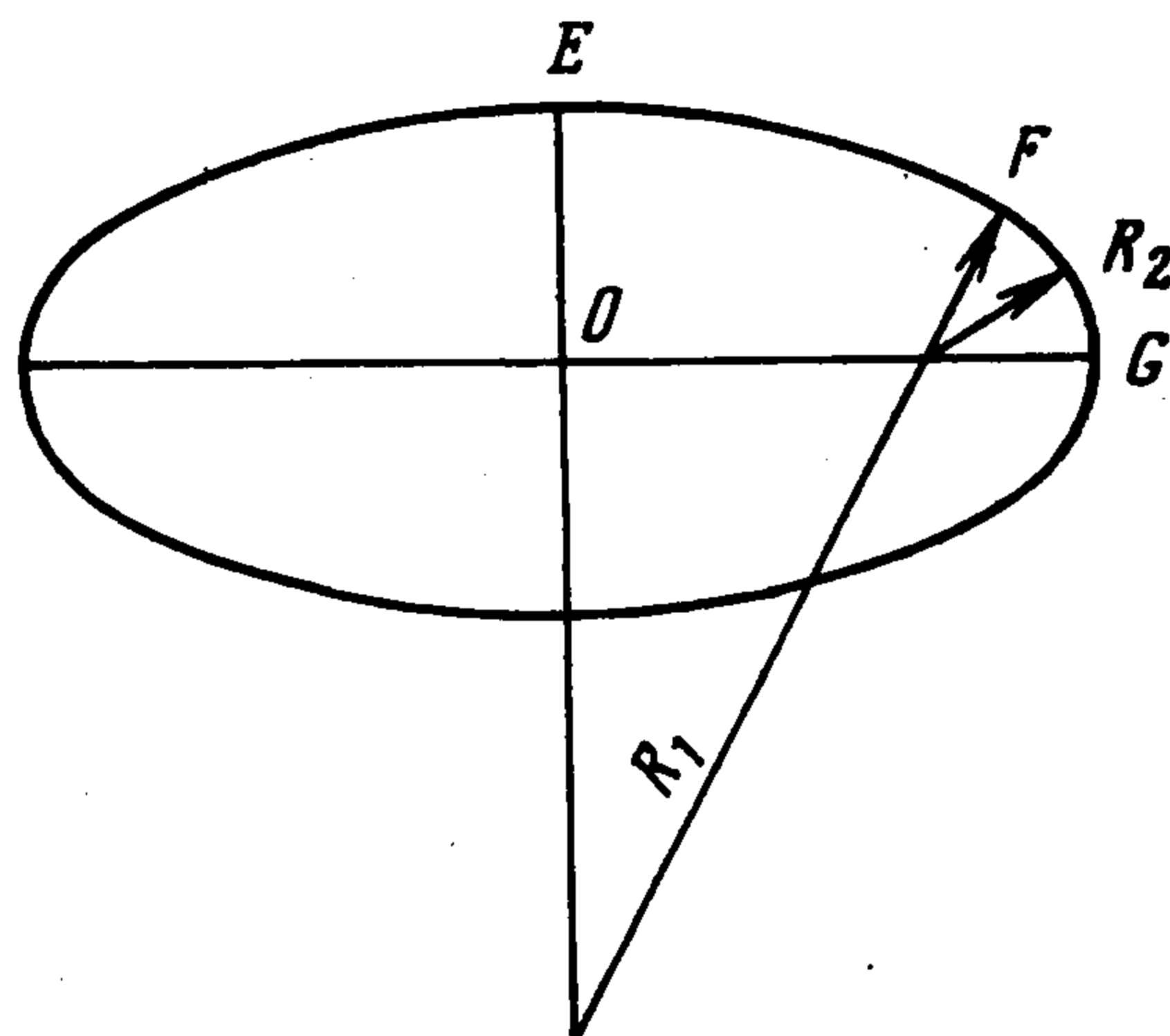
Здесь n — целое, а ξ_0 , η_0 , ζ_0 — постоянные, подлежащие определению. Так как n — целое, то условие того, что оболочка замкнутая, выпол-

няется автоматически, если считать для круговой оболочки, что r — радиус ее сечения.

Предполагаем, что вдоль образующей укладывается одна полуволна, так как в случае нескольких полуволн оболочка разбивается ими на секции, каждая из которых ведет себя одинаково. Тогда условие свободного опирания на краях $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ дает уравнение $kl = \pi$ для определения k . В дальнейшем, в том числе и для некруговой оболочки, будем считать, что l , а значит и k — величины порядка единицы.



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем рассматривать колебания с достаточно большой изменчивостью, поэтому полагаем

$$(1.3) \quad h^{-1} \gg n \gg 1$$

Левое неравенство дает область применимости исходных уравнений (1.1).

Подставляя выражения (1.2) в уравнения (1.1), получаем для ξ_0, η_0, ζ_0 однородную линейную систему трех уравнений с тремя неизвестными. Приравниваем ее определитель нулю и получаем кубическое уравнение для $\lambda_0 = (1 - \sigma^2) \lambda$

$$(1.4) \quad \lambda_0^3 - \frac{3-\sigma}{2} n^2 \lambda_0^2 + \frac{1-\sigma}{2} n^4 \lambda_0 - \frac{(1-\sigma)^2(1+\sigma)}{2} k^4 - \frac{h^2}{6} (1-\sigma) n^6 = 0$$

в котором удержаны только существенные члены в предположении (1.3). (Заметим, что к уравнению (1.4) можно прийти и при помощи формул, которые получаются из формул (1.2) заменой в них $\sin n\beta$ на $\cos n\beta$ и $\cos n\beta$ на $\sin n\beta$.) Можно показать непосредственно, имея в виду предположения относительно порядков h, k, n , что с точностью до малых величин порядка $O(\max\{n^{-6}; h^2 n^2\})$ уравнение (1.4) распадается на квадратное и линейное, а значит, с такой же точностью получаем для корней уравнения (1.4)

$$(1.5) \quad \lambda_{01} \approx n^2, \quad \lambda_{02} \approx \frac{1-\sigma}{2} n^2, \quad \lambda_{03} \approx (1-\sigma^2) \frac{k^4}{n^4} + \frac{h^2}{3} n^4$$

На фиг. 1 изображен схематический график λ как функции n при фиксированных h и k .

Вычисляя перемещения, соответствующие λ_1 и λ_2 , можно убедиться, что для них справедливо неравенство $\zeta \ll \max(\xi, \eta)$ (квазитангенциальные колебания [2]), а для перемещений, соответствующих λ_3 — неравенство $\zeta \gg \max(\xi, \eta)$ (квазипоперечные колебания [2]). Будем различать квазипоперечные колебания со средней ($1 \ll n \ll h^{-1/4}$), промежуточной ($n \sim h^{-1/4}$) и большой ($n \gg h^{-1/4}$) изменчивостями. Для оболочек неположительной гауссовой кривизны наименьшая частота колебаний достигается при квазипоперечных колебаниях с промежуточной изменчивостью [2]. Поэтому из формулы (1.5) для $\lambda_{0,3}$ получаем, что для рассматриваемых здесь цилиндрических круговых оболочек наименьший параметр частоты λ имеет порядок h .

2. Прежде чем рассмотреть цилиндрические оболочки произвольного очертания, приведем численные результаты, относящиеся к нахождению частот и форм свободных колебаний коробовых оболочек.

Были рассмотрены коробовые оболочки, представляющие собой в сечении симметричные овалы (фиг. 2). Ввиду симметрии рассмотрим участок EFG . Пусть дуги EF и FG имеют радиусы кривизны R_1 и R_2 соответственно. Если отношение полуосей овала OG к OE обозначить γ , то, меняя надлежащим образом R_1 и R_2 и угловую меру дуг EF и FG , можно получить гладкие овалы с различными γ и одним и тем же периметром. Предполагается, что на торцах коробова оболочка свободно оперта. Имея это в виду, а также постоянство коэффициентов системы (1.1) по α , можем искать для коробовой оболочки решение в виде

$$(2.1) \quad \xi = \xi_*(\beta) \cos k\alpha, \quad \eta = \eta_*(\beta) \sin k\alpha, \quad \zeta = \zeta_*(\beta) \sin k\alpha \quad (k = \pi/l)$$

Радиус кривизны овала — кусочно-постоянная функция β , поэтому для каждого R_v ($v = 1, 2$) можно искать решение в виде $\{\xi_*, \eta_*, \zeta_*\} = \exp(\theta, \beta) \{\xi_0, \eta_0, \zeta_0\}$.

Характеристические уравнения для θ , восьмого порядка, и для каждого R_v получаем восемь решений. Ограничимся нахождением симметричных форм колебаний. Тогда частотное уравнение получается из условия гладкости решения в точке разрыва F радиуса кривизны симметричного овала, причем как на EF , так и на FG берутся по четыре решения, соответствующие симметричным формам колебаний.

На основании описанной схемы была составлена программа нахождения частот и соответствующих им симметричных форм колебаний коробовых оболочек, сечения которых — симметричные овалы и получены численные результаты на БЭСМ-4. Расчеты проводились для некоторых значений h и γ , причем во всех случаях $\sigma = 0.3$, $l = \pi$, $p = 4\pi/3$, где p — безразмерный периметр поперечного сечения оболочки] (полагаем $r = 1$).

Ниже приведены значения наименьших λ , отвечающих симметричным формам колебаний.

Видно, что при сплющивании оболочки λ_{\min} убывают; это объясняется уменьшением жесткости оболочки. Видно также, что для коробовых оболочек, формы колебаний которых симметричны, как и для круговых

h	γ		
	1.5	2	3
10^{-2}	—	$0.7876 \cdot 10^{-2}$	—
10^{-3}	$1.155 \cdot 10^{-3}$	$0.7532 \cdot 10^{-3}$	$0.3704 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	—	$0.7404 \cdot 10^{-4}$	—

оболочек, $\lambda_{\min} \sim h$. Счет показал, что колебания, соответствующие приведенным значениям λ_{\min} , являются квазипоперечными.

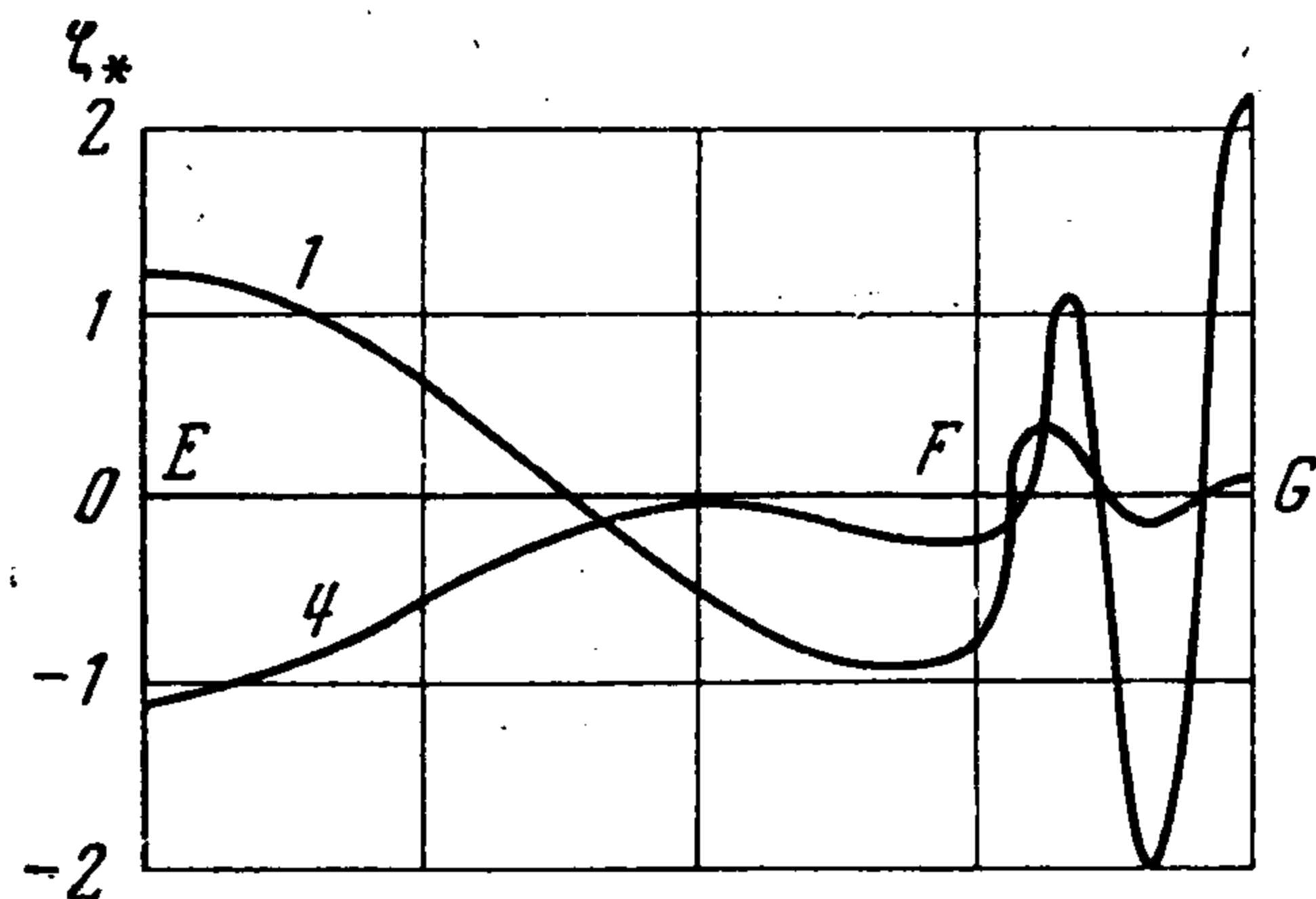
Для оболочки с $h = 10^{-3}$ и $\gamma \approx 2$ были найдены следующие 49 первых значений λ :

0.000753	0.00137	0.00275	0.00367	0.00599	0.00660	0.0106
0.01154	0.0194	0.03191	0.04921	0.06853	0.07556	0.1049
0.1455	0.1964	0.2609	0.3388	0.4326	0.5467	0.6795
0.7000	0.8349	0.8951	1.019	1.228	1.468	1.746
2.047	2.114	2.409	2.804	3.243	3.730	4.282
4.653	4.904	5.555	6.280	6.636	7.084	7.956
8.904	9.938	11.06	12.27	13.20	13.59	15.00

Первым 23 частотам соответствуют квазипоперечные колебания; для следующих значений λ квазипоперечные колебания чередуются с квазитангенциальными и колебаниями общего вида (т. е. колебаниями, в которых нет преобладания какой-либо компоненты вектора перемещений). Видно, что плотность частот колебаний убывает с ростом номера частоты.

Приведем графики для преобладающего перемещения ζ_* , соответствующего первой, четвертой, пятой и семнадцатой частотам (см. фиг. 3 и 4, где числа у кривых соответствуют номерам частот; кривая 5 для ясности дана пунктиром).

Графики даны для участка EFG оболочки, так как на остальную часть они могут быть продолжены по симметрии, причем масштаб длин для участков EF и FG один и тот же.



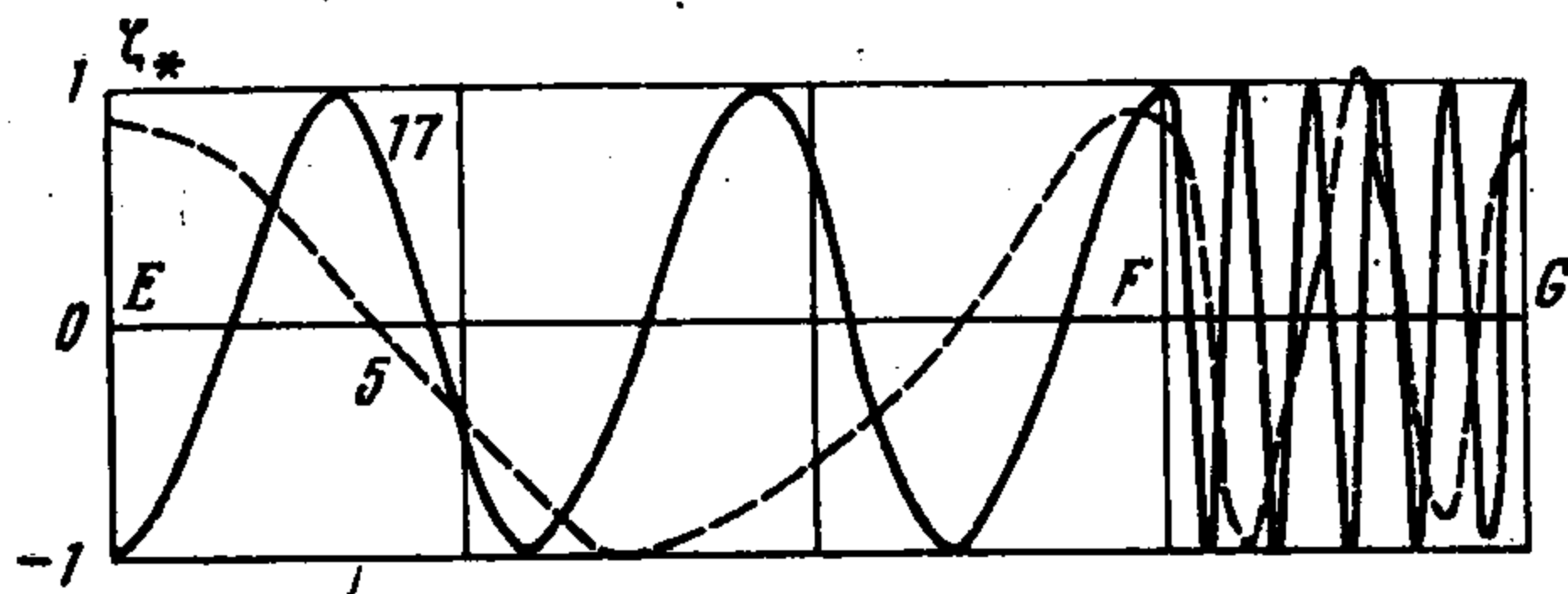
Фиг. 3

Заметим, что угловая мера дуги FG вдвое больше, чем дуги EF . Из графика ζ_* , соответствующего низшей частоте, следует, что на FG функция ζ_* , осциллируя, затухает, при этом на участке EF для θ_1 имеются две пары чисто мнимых корней, а на FG для θ_2 все восемь корней — полные комплексные. Таким же свойством обладают формы колебаний и корни θ_4 для второй и третьей частот, хотя затухание функций ζ_* на FG здесь менее резко. График формы ζ_* , соответствующий четвертой частоте, показывает, что на участке FG функция ζ_* не затухает; этому соответствует то обстоятельство,

что на FG для θ_2 уже появляются две пары чисто мнимых корней (остальные четыре корни — полные комплексные). Характер корней характеристического уравнения для пятой частоты такой же, что и для четвертой.

По числу узловых линий можно заключить, что изменяемость формы ζ_* , соответствующей λ_1 , больше, чем формы ζ_* , отвечающей λ_4 , и меньше изменяемости ζ_* , соответствующей λ_5 . Форма ζ_* для λ_{17} обладает такой изменяемостью, что для нее переменность

радиуса кривизны не существенна (здесь для θ_1 и θ_2 имеется по две пары чисто мнимых корней и по четыре действительных). Отметим, что форма ζ_* , отвечающая λ_1 , имеет качественное отличие от формы колебаний круговой оболочки, соответствующей высшей частоте, так как для круговых оболочек нет зон, где колебания затухают. Явление



Фиг. 4

ние затухания, обнаруженное здесь, существенно связано с переменностью радиуса кривизны оболочки и, как показали расчеты, затухание тем резче, чем больше γ отличается от единицы.

3. Предположим теперь, что $R^{-1}(\beta)$ — произвольная, положительная достаточно гладкая функция. Будем по-прежнему считать, что оболочка свободно оперта по криволинейным краям, поэтому решение можно искать в виде (2.1), полагая, что k находится из формулы в (2.1). Рассмотрим колебания открытых оболочек, т. е. колебания с однородными граничными условиями на прямолинейных краях $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$.

Для ξ_* , η_* , ζ_* при подстановке (2.1) в систему (1.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с коэффициентами, зависящими от β . Интересуясь напряженным состоянием с достаточно большой изменчивостью, будем искать решение этой системы методом экспоненциального представления

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \xi_* &= \exp(f/\varepsilon) (\varepsilon^2 \xi_1 + \varepsilon^3 \xi_2 + \dots), & \eta_* &= \exp(f/\varepsilon) (\varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots) \\ \zeta_* &= \exp(f/\varepsilon) (\zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \dots), & \lambda &= \varepsilon^4 \lambda_1 + \varepsilon^6 \lambda_2 + \varepsilon^7 \lambda_3 + \dots \end{aligned}$$

Малый параметр ε , фигурирующий в формулах (3.1), определим так:

$$(3.2) \quad \varepsilon = (h / \sqrt{3(1 - \sigma^2)})^{1/4}$$

В формулах (3.1) f , ξ_v , η_v , ζ_v — искомые функции β , а λ_v — искомые постоянные. Параметр ε , определяемый по формуле (3.2), и степени ε при ξ_1 , η_1 , ζ_1 в формулах (3.1) выбраны так, что получается соответствие искомого решения с квазипоперечными колебаниями с промежуточной изменчивостью в том смысле, что формы и частоты квазипоперечных колебаний с промежуточной изменчивостью круговых оболочек обладают такими же асимптотическими порядками, что и главные члены в ξ_* , η_* , ζ_* и λ формул (3.1). Однако такое соответствие не означает, что формулы (3.1) имеют место всюду, о чем будет сказано ниже. Величина f называется функцией изменчивости, а ξ_v , η_v , ζ_v — коэффициентами интенсивности.

Подставляя выражения (3.1) в упомянутую выше систему обыкновенных дифференциальных уравнений и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в каждом из уравнений системы, получаем набор рекуррентных систем линейных алгебраических уравнений для коэффициентов интенсивности ξ_v , η_v , ζ_v ($v = 1, 2, \dots$). Система для ξ_1

η_1, ζ_1 — однородная и имеет следующий вид (штрих означает производную по β):

$$(3.3) \quad \frac{1-\sigma}{2} f'^2 \xi_1 + k \frac{1+\sigma}{2} f' \eta_1 - \frac{k\sigma}{R} \zeta_1 = 0$$

$$f'^2 \eta_1 - \frac{f'}{R} \zeta_1 = 0, \quad \frac{f'}{R} \eta_1 - \frac{\zeta_1}{R^2} = 0$$

Определитель системы (3.3) обращается в нуль при любой функции изменяемости f .

Алгебраические системы для $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ ($\nu > 1$) — неоднородные, с той же матрицей коэффициентов в левой части, что и система (3.3), а в правые части этих систем входят λ_ν , а также ξ_j, η_j, ζ_j ($j < \nu$). Выполняя условие совместности этих систем и выражая из них ξ_ν и η_ν через ζ_ν , получаем уравнение для функции изменяемости f и уравнения для коэффициентов интенсивности ζ_ν .

Уравнение для f имеет вид

$$(3.4) \quad f'^8 - \lambda_1 f'^4 + \frac{k^4}{R^2} = 0$$

Отсюда получаем

$$(3.5) \quad f = \int_0^\beta \left(\frac{\lambda_1}{2} \pm \sqrt{D} \right)^{1/4} d\beta, \quad D = \frac{\lambda_1^2}{4} - \rho^4, \quad \rho = \frac{k}{\sqrt{R}}$$

Для ζ_ν получаются линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение для ζ_1 — однородное и имеет вид

$$(3.6) \quad 2 \left(\frac{k^4}{f'^4 R} - R f'^4 \right) \frac{d\zeta_1}{d\beta} - \left(\frac{k^4 R'}{f'^4 R^2} + \frac{3k^4 f''}{f'^5 R} + 5R f'^3 f'' \right) \zeta_1 = 0$$

Уравнения для ζ_ν ($\nu = 2, 3, \dots$) — неоднородные, с теми же левыми частями, что и уравнение (3.6), а в правые части входят λ_ν линейным образом, и уже известные и при вычислении ζ_ν функции β . Из этих уравнений для ζ_ν^1 получаем

$$(3.7) \quad \zeta_1 = c_1 (f')^{1/2} D^{-1/4}, \quad \zeta_\nu = c_\nu (f')^{1/2} D^{-1/4} + \lambda_\nu F_\nu(\beta) + \Phi_\nu(\beta)$$

Здесь F_ν и Φ_ν — уже известные при вычислении ζ_ν функции, а c_ν — произвольные постоянные. Уравнение для f' восьмого порядка, поэтому для каждого из восьми значений f получаем восемь линейно-независимых решений (3.1), причем λ_ν предполагаются вещественными и одинаковыми для каждого из решений. Из формулы (3.5) следует, что в зависимости от знака D функция f может принимать действительные, чисто мнимые и комплексные значения, соответственно этому меняются свойства решений (3.1).

Беря вещественную комбинацию восьми решений, приступим к решению краевых задач. Остановимся для определенности на условии жесткой заделки на краях $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$

$$(3.8) \quad \xi = \eta = \zeta = d\zeta/d\beta = 0$$

хотя рассуждения будут справедливы и для других краевых условий. Процесс нахождения λ_ν и произвольных постоянных $c_{\nu j}$ (j означает номер решения и изменяется от единицы до восьми) существенно зависит от знака D .

Предположим, что $D > 0$ на $[0, \beta_0]$. Тогда f из формулы (3.5) имеет четыре действительных и две пары чисто мнимых значений на $[0, \beta_0]$. Подставляя вещественную комбинацию восьми решений в условия (3.8) и приравнявая в полученных восьми рядах коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем бесконечный набор систем восьми линейных алгебраических уравнений для $c_{\nu j}$ с параметрами λ_ν . Система для c_{1j} однородная, приравнявая определитель нулю, получаем трансцендентное уравнение для λ_1 , и выбираем его решение λ_1 , которое порядка единицы, причем $D > 0$ на $[0, \beta_0]$. Левые части алгебраических систем для $c_{\nu j}$ ($\nu > 1$) такие же, как и для c_{1j} , а в правые части линейно входят λ_ν , поэтому, выполняя условия совместности этих систем, находим однозначным образом λ_ν , а затем, решая эти системы, находим произвольные постоянные.

В связи с тем, что уравнение (3.4) при условии $D > 0$ имеет две пары чисто мнимых корней f' , два положительных и два отрицательных корня, из формул (3.1), (3.5) и (3.7) следует, что формы колебаний представляют собой линейную комбинацию «искривленных» синусоид. Из изображенных на фиг. 3.4 форм колебаний коробовой оболочки этим колебаниям соответствуют формы для четвертой и пятой частот.

Пусть $D < 0$ на $[0, \beta_0]$. Тогда из формулы (3.5) следует, что все восемь значений f — полные комплексные. Если попытаться, как и в случае для $D > 0$, построить для условий (3.8) процесс нахождения $c_{\nu j}$ и λ_ν , то нетрудно убедиться, что уравнение для λ_1 имеет лишь единственный вещественный корень, равный нулю. Следовательно, при условии $D < 0$ на $[0, \beta_0]$ еще не достигнута низшая частота собственных колебаний. Такой же вывод можно сделать, если условия (3.8) заменить условиями свободного опирания при $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$. (Заметим, что счет для коробовой оболочки показал, что если корни характеристических уравнений как на EF , так и на FG все полные комплексные, то оболочка не колеблется.)

Рассмотрим случай, когда λ_1 такое, что D меняет знак на $[0, \beta_0]$. Пусть для определенности $D > 0$ на $[0, \beta_*)$, $D = 0$ при $\beta = \beta_*$ и $D < 0$ на $(\beta_*, \beta_0]$. В точке β_* из формулы для f следует, что уравнение (3.4) имеет четыре пары кратных корней

$$f'_{1,2} = i \left(\frac{\lambda_1}{2} \right)^{1/4}, \quad f'_{3,4} = -i \left(\frac{\lambda_1}{2} \right)^{1/4}, \quad f'_{5,6} = \left(\frac{\lambda_1}{2} \right)^{1/4}, \quad f'_{7,8} = - \left(\frac{\lambda_1}{2} \right)^{1/4} \quad (i^2 = -1)$$

Точка, в которой уравнение (3.4) для f' имеет кратные корни, называется точкой поворота. Поведение решений при наличии точки поворота изучено, например, в монографии [3]; в связи с задачей свободных колебаний оболочек вращения точки поворота исследованы в работах П. Е. Товстика (см. [4] и др.) В точке поворота восемь решений (3.1) — (3.7) уже не являются линейно-независимыми. В окрестности этой точки надо строить решение по схеме, данной, например, в монографии [3], и склеивать его с решениями (3.1) — (3.7), имеющими силу слева и справа от этой окрестности. Из краевых условий после выполнения склейки можно найти искомую собственную частоту в первом приближении и выяснить характер поведения форм колебаний в самой окрестности. Зная характер значений f слева и справа от окрестности, можно сделать вывод, что формы колебаний слева от точки поворота представляют собой «искривленные» синусоиды, а справа — осциллируя, затухают. Отсюда следует, что если точка поворота расположена не слишком близко к β_0 , то решения успеют достаточно сильно затухнуть при подходе к этому краю, а, значит, собственная частота не зависит в первом приближении от граничных условий на этом краю. При наличии точки поворота колебания сосредоточены, в основном, на участке, где $D > 0$, а участок, где $D < 0$ играет роль гасителя колебаний.

Колебания при наличии точки поворота соответствуют для показанных форм колебаний ζ_* коробовой оболочки колебаниям с первой частотой. Точка F на фиг. 2 не

является точкой поворота и соответствует ей только в том смысле, что слева от нее корни θ_1 имеют две пары чисто мнимых значений, а справа — все корни θ_2 — полные комплексные.

4. Рассмотрим вопрос о построении решения краевых задач для квазиоперечных колебаний со средней изменяемостью. Обратимся к уравнению (3.4). Если в нем λ_1 формально увеличить, то оно распадается на два уравнения. Для относительно малых корней получаем уравнение

$$(4.1) \quad -\lambda_1 f'^4 + \rho^4 = 0$$

Отсюда следует

$$(4.2) \quad f_{1,2} = \pm \lambda_1^{-1/4} \int_0^\beta \rho d\beta, \quad f_{3,4} = \pm i \lambda_1^{-1/4} \int_0^\beta \rho d\beta$$

Для относительно больших корней

$$(4.3) \quad f'^8 - \lambda_1 f'^4 = 0$$

Отсюда

$$(4.4) \quad f_{1,2} = \pm \beta \lambda_1^{1/4}, \quad f_{3,4} = \pm i \beta \lambda_1^{1/4}$$

К уравнению (4.1) приходим, если вместо формул (3.1), (3.2) искать решение в виде ($a, q/2$ — целые)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \xi_* &= \exp(f/\varepsilon^a) (\varepsilon^{2a} \xi_1 + \varepsilon^{2a+1} \xi_2 + \dots) \\ \eta_* &= \exp(f/\varepsilon^a) (\varepsilon^a \eta_1 + \varepsilon^{a+1} \eta_2 + \dots) \\ \zeta_* &= \exp(f/\varepsilon^a) (\zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \dots) \\ \lambda &= \varepsilon^{4a} \lambda_1 + \varepsilon^{4a+1} \lambda_2 + \dots, \quad \varepsilon = (h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^{1/q}, \quad a/q < 1/4 \end{aligned}$$

Процесс нахождения коэффициентов интенсивности строится, как и в п. 3. Выражение для ζ_1 здесь такое (c_1 — произвольная постоянная):

$$(4.6) \quad \zeta_1 = c_1 \rho^{1/2}$$

Для каждого из четырех значений f из формул (4.2) получаем четыре линейно-независимых решения (4.5) рассматриваемой системы уравнений, которых недостаточно для выполнения восьми краевых условий (эти четыре решения назовем основными интегралами). Построим еще четыре решения, которые имеют тот же асимптотический порядок λ , что и основные интегралы, но бóльшую изменяемость (эти четыре решения назовем дополнительными интегралами, соответствующими основным).

Дополнительные интегралы ищем в виде

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \xi_* &= \exp(f/\varepsilon^b) (\varepsilon^{2b} \xi_1 + \varepsilon^{2b+1} \xi_2 + \dots) \\ \eta_* &= \exp(f/\varepsilon^b) (\varepsilon^b \eta_1 + \varepsilon^{b+1} \eta_2 + \dots) \\ \zeta_* &= \exp(f/\varepsilon^b) (\zeta_1 + \varepsilon \zeta_2 + \dots) \\ \lambda &= \varepsilon^{4a} \lambda_1 + \varepsilon^{4a+1} \lambda_2 + \dots, \quad \varepsilon = (h/\sqrt{3(1-\sigma^2)})^{1/q}, \quad b = (1/2)q - a \end{aligned}$$

Формулы (4.7) приводят к уравнению (4.3) для f , о котором говорилось выше. Для ζ_1 из формул (4.7) получаем, что эта величина является произвольной постоянной, а, значит, принимая во внимание (4.4), можно

сделать вывод, что дополнительные интегралы в первом приближении не зависят от кривизны оболочки, в то время как формулы (4.2) и (4.6) показывают, что кривизна оболочки влияет уже на первое приближение основных интегралов.

Из формул (4.2) и (4.4) следует, что для решения краевых задач при помощи основных и дополнительных интегралов для f имеется две пары чисто мнимых значений (остальные значения действительные), как и в случае $D > 0$ на $[0, \beta_0]$ (см. п. 3).

В работе [5] для круговых оболочек, когда $a = 0$ и $b/q = 1/2$, было показано, что существуют два типа колебаний. Колебания двух типов имеют место и для некруговых оболочек для λ из (4.5) при выполнении неравенства из (4.5).

Покажем это. Если обозначить действительную комбинацию основных интегралов P_1 , а дополнительных — P_2 , то краевые условия будем выполнять при помощи решения P_3 , которое определим так:

$$(4.8) \quad P_3 = P_1 + \varepsilon^g P_2$$

где g зависит от вида краевых условий и от типа рассматриваемых колебаний. Подстановка решений (4.8) в краевые условия (3.8) после приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях ε в каждом из полученных уравнений дает бесконечный набор линейных алгебраических систем для произвольных постоянных $c_{\nu j}$ ($\nu = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, \dots, 8$), в которые λ_ν входят как параметры. Система для c_{1j} однородная. Эта система не разбивается на подсистемы, в которых число уравнений больше или меньше числа неизвестных, при двух значениях показателя: $g = 0$, $g = -b + a$. Определитель восьмого порядка для c_{1j} является произведением двух определителей четвертого порядка.

В случае $g = 0$ величина λ_1 находится из условия равенства нулю определителя четвертого порядка из коэффициентов при тех произвольных постоянных, которые соответствуют основным интегралам и тангенциальным граничным условиям $\xi = \eta = 0$. Уравнение для λ_1 имеет вид

$$\cos(\lambda_1^{-1/4} \varepsilon^{-a} J) = 0 \quad \left(J = \int_0^{\beta_0} \rho d\beta \right)$$

откуда $\lambda_1 = ((N + 1/2) \pi \varepsilon^a / J)^{-4}$, где N — целое число порядка ε^{-a} . Получившиеся невязки в нетангенциальных условиях $\zeta = d\zeta / d\beta = 0$ устраняются при помощи c_{1j} ($j = 5, \dots, 8$), соответствующих дополнительным интегралам, в предположении, что определитель при этих c_{1j} не близок к нулю.

В случае $g = -b + a$ величина λ_1 находится при выполнении дополнительными интегралами нетангенциальных условий, откуда получаем такое уравнение для λ_1 : $\cos(\lambda_1^{1/4} \varepsilon^{-b} \beta_0) = 0$, откуда $\lambda_1 = ((T + 1/2) \pi \varepsilon^b / \beta_0)^4$, где T — целое число порядка ε^{-b} . Невязки в тангенциальных граничных условиях устраняются при помощи основных интегралов в предположении, что определитель при c_{1j} ($j = 1, \dots, 4$) не близок к нулю.

Следуя работе [5], назовем колебания с $g = 0$ колебаниями типа 1, а с $g = -b + a$ — типа 2. Заметим, что для колебаний типа 1, хотя в первом приближении частота находится из безмоментной задачи, преобладающее перемещение ζ_* существенно подправляется на всем $[0, \beta_0]$ (благодаря тому, что два значения f из (4.4) чисто мнимые) дополнительными интегралами. Для колебаний типа 2 как первое приближение частоты, так и перемещение ζ_* в первом приближении хорошо определяются при выполнении дополнительными интегралами нетангенциальных граничных условий. Для колебаний обоих типов можно найти и последующие λ_ν ($\nu > 1$), а также $c_{\nu j}$ ($\nu > 1$) после выполнения условий совместности и решения систем уравнений для $c_{\nu j}$ ($\nu > 1$). Для колебаний обоих типов уже нет точек поворота и связанного с ними явления преимущественно местных колебаний.

Отметим, что если рассмотреть замкнутую плавно искривленную оболочку, то взаимодействие основных и дополнительных интегралов нарушится, а получится два самостоятельных вида колебаний: одно строится на базе решений вида (4.5) с чисто мнимыми значениями f из (4.2), а другое — на базе решений вида (4.7) с чисто мнимыми значениями f из (4.4) (это можно показать, заменив краевые условия восемью условиями периодичности перемещения и усилий).

В работе [2] показано, что как квазипоперечные колебания с большой изменяемостью, так и квазитангенциальные колебания слабо зависят от кривизны оболочки, поэтому здесь их рассматривать не будем.

Для решения задач о колебаниях некруговых цилиндрических оболочек с малой изменяемостью метод экспоненциального представления решения не применим, такие колебания требуют особого рассмотрения.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за руководство работой.

Поступила 26 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
4. Товстик П. Е. Неосесимметричные колебания оболочек вращения с небольшим числом волн по параллели. В сб.: Исследование по упругости и пластичности, № 8. Изд-во ЛГУ, 1971.
5. Шестаков Н. А. Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрических оболочек. Строительная механика и расчет сооружений, М., 1969, № 2.