Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3 : 534.1

О МЕТОДЕ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович, Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

Результаты [1] обобщаются на случай колебаний пологих и непологих вязко-упругих (и упругих) оболочек. Теорема единственности доказывается в несколько более широком классе функций, чем в [1].

1. **Общая постановка задачи**. Ниже приводятся с небольшим видоизменением основные используемые обозначения [1].

Пусть ω — элемент некоторого полного сепарабельного гильбертова пространства H_1 со скалярным произведением $(\omega_1 \cdot \omega_2)$. A_1 — линейный неограниченный оператор, заданный на некотором множестве E_1, всюду плотном в H_1, со следующими свойствами:

1) A_1 — симметричный положительно-определенный оператор.

2) Если $\omega \in E_1$, то $A_1\omega \in H_1$.

На E_1 вводятся скалярное произведение и норма

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)_2 = (A_1\omega_1 \cdot \omega_2), \qquad \|\omega\|_2^2 = (\omega \cdot \omega)_2$$

Пополнение E_1 в норме $\|\cdot\|_2$ есть пространство H_2.

3) A_1 обладает собственными векторами ψ_n, образующими полную систему векторов в пространстве H_2.

$E_2(a, b)$ — множество элементов $\omega(t)$, зависящих от параметра t, таких, что при любых $a \leqslant t \leqslant b$ $\omega \in E_1$, $\omega_t \in H_1$[1]; ω, как элемент H_2, а ω_t, как элемент H_1, — непрерывные функции параметра t на $[a, b]$.

$E_3(a, b)$ — подмножество элементов из $E_2(a, b)$, представимых в виде конечных сумм $\Sigma d_k(t)\chi_k$, где $d_k(t) \in C^{(1)}(a, b)$, $\chi_k \in H_2$.

Пространством $H_3(a, b)$ называется замыкание $E_2(a, b)$ в норме

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)_{3,a,b} = \int_a^b \{(\omega_{1t} \cdot \omega_{2t}) + (\omega_1 \cdot \omega_2)_2\}\, dt$$

4) Если $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H_3(a, b)$, то равномерно по всем $a \leqslant t \leqslant b$ $\omega_n \to \omega_0$ сильно в H_1.

В [1] показано, что $H_3(a, b)$ — сепарабельное пространство и $E_3(a, b)$ всюду плотно в $H_3(a, b)$.

D° — подмножество $H_3(0, T)$, образованное замыканием в норме $H_3(0, T)$ подмножества функций из $E_3(0, T)$, таких, что $d_k(T) = 0$.

Рассматривается уравнение следующего вида:

$$\omega_{tt} = -A_1\omega - A_2\omega - B^t(\omega, \omega) - K\omega_t + F(t) \tag{1.1}$$

[1] Нижние индексы t, α_k означают дифференцирование по t, α_k.

с начальными условиями

(1.2) $\quad \omega|_{t=0} = \mathrm{g}, \qquad \omega_t|_{t=0} = \mathrm{h}$

Уравнение (1.1) отличается от (1.10) [1] членом $\mathbf{B}^t(\mathbf{a}, \omega)$, который является нелинейным оператором от двух переменных и представляет собой действие внутренних «вязких» сил.

Предположения [1] относительно операторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{K}$ приводятся ниже с небольшими видоизменениями.

На E_1 имеет место соотношение $\mathbf{A}_1\omega + \mathbf{A}_2\omega = \mathrm{grad}_{H_1}\Phi(\omega)$, где Φ — функционал, заданный на H_2, причем

(1.3) $$\Phi(\omega_0 + \omega_1) - \Phi(\omega_0) = (\mathbf{A}_3\omega_0 \cdot \mathbf{A}_4\omega_1) + \alpha(\omega_0, \omega_1)$$

В формуле (1.3) $\omega_0, \omega_1 \in H_2$ и произвольны; оператор $\mathbf{A}_3$ — нелинейный; $\mathbf{A}_4$ — ограниченный линейный оператор из H_2 в H_1; функционал $\alpha(\omega_0, \omega_1)$ таков, что $\lim|\alpha|\,\|\omega_1\|_2^{-1} = 0$, если $\|\omega_1\|_2 \to 0$.

5) Если $\omega \in H_3(a, b)$, то

$$0 \leqslant \int_a^b (\mathbf{K}\omega_t \cdot \omega_t)\,dt < \infty, \qquad a < b.$$

6) Φ — неотрицательный в H_2 функционал такой, что из $\Phi(\omega) \leqslant r$ следует $\|\omega\|_2 \leqslant \varphi_1(r)$. Здесь и далее $\varphi_k(r)$ — функции, ограниченные на каждом конечном отрезке изменения r.

7) Если $\omega_0, \omega_1 \in H_3(0, T)$, то $(\mathbf{A}_3\omega_0 \cdot \mathbf{A}_4\omega_1)$ — суммируемая на $[0, T]$ функция. Если $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H_3(0, T)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (\mathbf{A}_3\omega_n \cdot \mathbf{A}_4\omega_1)\,dt = \int_0^T (\mathbf{A}_3\omega_0 \cdot \mathbf{A}_4\omega_1)\,dt$$

$$\lim \int_0^T |\alpha|\,dt\,\|\omega_1\|_{3,0,T}^{-1} = 0, \quad \text{если } \|\omega_1\|_{3,0,T} \to 0$$

Для исследования уравнения (1.1), помимо принятых в [1], требуются дополнительные условия.

8) Если $\omega \in E_3(a, b)$, то $\Phi(\omega)$ суммируема на $[a, b]$.

Оператор $\mathbf{B}^t(\mathbf{a}, \omega)$ с областью определения $\mathbf{a} \in E_2(0, T)$, $\omega \in E_1$ имеет вид $\mathbf{B}^t(\mathbf{a}, \omega) = \mathrm{grad}_{H_1(\omega)}(\mathbf{C}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}\omega)$.

Здесь $\mathbf{C}^t$, $\mathbf{D}$ — нелинейные операторы, действующие при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ в пространство H_1 из $H_3(0, t)$ и H_2 соответственно. Кроме того, для любых $\mathbf{a} \in H_3(0, t)$ и $\omega_0, \omega_1 \in H_2$ справедливо соотношение

$$(\mathbf{C}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\omega_0 + \omega_1)) - (\mathbf{C}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}\omega_0) = (\mathbf{C}^t\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_5(\omega_0, \omega_1)) + \beta(\mathbf{a}, \omega_0, \omega_1)$$

где оператор $A_5(\omega_0, \omega_1)$ линеен и ограничен по переменной ω_1 из H_2 в H_1, причем $\lim|\beta|\,\|\omega_1\|_2^{-1} = 0$, если $\|\omega_1\|_2 \to 0$.

9) Отрезок времени $[0, T]$ можно разбить на $n(T)$ частей $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ так, что оператор $\mathbf{C}^t$ имеет вид $\mathbf{C}^t\mathbf{a} = \mathbf{C}_1{}^t\mathbf{a} + \ldots + \mathbf{C}_n{}^t\mathbf{a}$.

Здесь оператор C_k^t а зависит лишь от значений элемента $a \in H_3(0, T)$ на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$; $C_k^t\,a \equiv 0$, если $t < t_{k-1}$. Кроме того, для любого элемента $\omega \in E_3(0, t_k)$ выполняются неравенства

$$(1.4)\qquad \left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\left(C_k^\tau\omega\cdot\frac{\partial D\omega(\tau)}{\partial\tau}\right)d\tau dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Phi(\omega)\,d\tau$$

$$\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{k}\left(C_j^\tau\omega\cdot\frac{\partial D\omega}{\partial\tau}\right)d\tau dt\right| \leqslant \varphi_2(\|\omega\|_{3,0,t_{k-1}})\left\{\int\limits_0^{t_k}\Phi(\omega)\,dt\right\}^{1/2}$$

10) Если ω, $a \in H_3(0, T)$, то $(C^t\omega\cdot A_5(\omega, a))$ — суммируемая на $[0, T]$ функция, равномерно ограниченная, если на $[0, T]$ равномерно ограничены $\|\omega\|_2$, $\|a\|_2$ и если $\omega_n \to \omega_0$ слабо в $H_3(0, T)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T(C^t\omega_n\cdot A_5(\omega_n, a))\,dt = \int\limits_0^t C^t\omega_0\cdot A_5(\omega_0, a))\,dt$$

11) $\lim\int\limits_0^T|\beta(a, \omega_0, \omega_1)|\,dt\,\|\omega_1\|_{3,0,T}^{-1} = 0, \quad$ если $\|\omega_1\|_{3,0,T} \to 0$

12) Для произвольного элемента $\omega \in E_3(0, T)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\left|\int\limits_0^t\left(C^\tau\omega\cdot\frac{\partial D\omega}{\partial\tau}\right)d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2}\Phi(\omega(t)) + \varphi_3\left(\int\limits_0^t\Phi(\omega)\,d\tau\right)$$

Как и в [1], вводится понятие обобщенного решения.

Определение 1.1. Обобщенным решением уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) называется элемент $\omega \in H_3(0, T)$, удовлетворяющий для произвольного $\omega_1 \in D^\circ$ интегральному соотношению

$$\int\limits_0^T\{-(\omega_t\cdot\omega_{1t}) + (A_3\omega\cdot A_4\omega_1) + (C^t\omega\cdot A_5(\omega, \omega_1)) +$$
$$+ (K\omega_t\cdot\omega_1) - (F\cdot\omega_1)\}\,dt - (h\cdot\omega_1)|_{t=0} = 0$$

и первому из начальных условий (1.2) в следующем смысле:

$$(1.5)\qquad \lim\|\omega - g\|_1 = 0 \quad \text{при } t \to 0$$

Обобщенное решение ищется приближенно методом Бубнова — Галеркина из системы дифференциальных уравнений

$$(1.6)\qquad (\omega_{mtt}\cdot\chi_l) + (A_3\omega_m\cdot A_4\chi_l) + (C^t\omega_m\cdot A_5(\omega_m, \chi_l)) +$$
$$+ (K\omega_{mt}\cdot\chi_l) - (F\cdot\chi_l) = 0, \qquad l = 1, \ldots, m$$

$$\omega_m = \sum_{l=1}^{m} q_{ml}(t)\,\chi_l$$

с начальными условиями

$$(1.7)\qquad q_{ml}(0) = (g\cdot\chi_l), \qquad q_{ml}^{\cdot}(0) = (h\cdot\chi_l)$$

Здесь χ_l — некоторая полная система в H_2, которая для удобства считается ортонормированной в H_1.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия 1) — 12). В этом случае уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) имеет по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле определения 1.1 на отрезке $[0, T]$, каково бы ни было T, если только

$$\mathbf{h} \in H_1, \quad \mathbf{g} \in H_2, \quad \int_0^T \|\mathbf{F}\|_1^2 \, dt < \infty$$

Как и в [1], теорема 1.1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1 и пусть χ_l — некоторая полная в H_2 и ортонормированная в H_1 система. В этом случае система дифференциальных уравнений (1.6) при начальных условиях (1.7) имеет для каждого m по меньшей мере одно решение на всем отрезке $[0, T]$. Множество приближенных решений ω_m слабо компактно в $H_3\,(0, T)$ и содержит бесконечное подмножество ω_m, каждая предельная точка которого есть обобщенное решение уравнения (1.1) в смысле определения 1.1.

Доказательство теоремы 1.2 по структуре совпадает с доказательством теоремы II [1]: система уравнений (1.6), (1.7) сводится к операторному уравнению с вполне непрерывным оператором, а затем применяется теорема Шаудера о неподвижных точках вполне непрерывного оператора. Таким способом доказывается существование решения системы (1.6), (1.7) на некотором конечном отрезке времени $[0, T_1]$, а потом, конечным же числом шагов, распространяется на весь отрезок $[0, T]$. Из априорных оценок решения системы вытекает, что последовательность приближенных решений есть слабо компактное множество в $H_3\,(0, T)$. Используя условия 7) и 10), как и в [1], можно показать, что каждый слабый предел этого множества есть обобщенное решение задачи.

Основной момент всего доказательства — получение следующих априорных оценок:

$$\|\omega_{mt}\|_1 \leqslant m_1, \quad \|\omega_m\|_2 \leqslant m_2, \quad \|\omega_m\|_{3,0,T} \leqslant m_3 \tag{1.8}$$

Здесь и далее m_k — некоторые положительные постоянные.

Для доказательства применяется метод математической индукции: считая оценки выполненными на отрезке $[0, t_{k-1}]$, необходимо их распространить на отрезок $[0, t_k]$. Доказательство оценок на отрезке $[0, t_1]$ получается из доказательства на $[0, t_k]$ при $k = 1$.

Систему (1.6) можно записать в следующем виде:

$$q_{ml}^{\cdot\cdot} = -\frac{\partial\Phi(\omega_m)}{\partial q_{ml}} - \left(\mathbf{C}^t\omega_m \cdot \frac{\partial \mathbf{D}\omega_m}{\partial q_{ml}}\right) - (\mathbf{K}\omega_{mt} \cdot \chi_l) + (\mathbf{F} \cdot \chi_l) \tag{1.9}$$
$$l = 1, \ldots, m$$

l-е уравнение (1.9) умножается на $q_{ml}^{\cdot}$, полученные равенства складываются и интегрируются по времени в пределах от нуля до t, а затем по параметру t в пределах от нуля до t_k. В этом равенстве выделяется часть, зависящая от значений ω_m на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, и учитывается условие

5). В результате

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \{\|\omega_{mt}\|_1^2 + 2\Phi(\omega_m)\}\, dt + 2 \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \left(C_k^\tau \omega_m \cdot \frac{\partial D\omega_m}{\partial \tau}\right) d\tau dt \leqslant$$

$$\leqslant L(\omega_m) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t} (\mathbf{F} \cdot \omega_{m\tau})\, d\tau dt - 2 \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{0}^{t} \sum_{i=1}^{k-1} \left(C_i^\tau \omega_m \cdot \frac{\partial D\omega_m}{\partial \tau}\right) d\tau dt$$

В выражении $L(\omega_m)$ присутствуют значения ω_m лишь на отрезке $[0, t_{k-1}]$. Используя условие 9), из полученного выше неравенства можно вывести оценку

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(\omega_m(\tau))\, d\tau \leqslant m_4 \tag{1.10}$$

Для доказательства оценок (1.8) повторяются все проделанные выше преобразования, кроме второго интегрирования по параметру t. Из полученного таким способом неравенства эти оценки выводятся, как в [1], с учетом уже доказанного неравенства (1.10) и условий 9), 12).

2. Задача о колебаниях оболочки. Будет рассматриваться следующий вариант нелинейной теории вязко-упругих оболочек [2]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\psi_1^2 = \frac{u_{1\alpha_1}}{A_1} + \frac{A_{1\alpha_2} u_2}{A_1 A_2} + k_{11} u_3 + \frac{1}{2}\psi_1^2 \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{2.1}$$

$$2\varepsilon_{12} = 2e_{12} + \psi_1\psi_2 = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)_{\alpha_2} + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)_{\alpha_1} - 2k_{12} u_3 + \psi_1\psi_2$$

$$\varkappa_{11} = -A_1^{-1}\psi_{1\alpha_1} - A_{1\alpha_2}\psi_2 (A_1 A_2)^{-1} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

$$2\varkappa_{12} = -A_1 A_2^{-1} (\psi_1 A_1^{-1})_{\alpha_2} - A_2 A_1^{-1} (\psi_2 A_2^{-1})_{\alpha_1}$$

$$T_{ij} = T_{ijy} + T_{ijB} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \int\limits_0^t C_{ijkl}(t, \tau)\, \varepsilon_{kl}(\tau)\, d\tau$$

$$M_{ij} = M_{ijy} + M_{ijB} = D_{ijkl}\varkappa_{kl} + \int\limits_0^t B_{ijkl}(t, \tau)\, \varkappa_{kl}(\tau)\, d\tau$$

Здесь используются] следующие обозначения: $\omega = (u_1, u_2, u_3)$ — смещения точек срединной поверхности S^* оболочки с внутренними координатами α_1, α_2; A_i^2, $2C = 0$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S^*; k_{ij} — кривизны S^*; ε_{ij} — деформации растяжения и сдвига; $\varkappa_{ij}$ — изменения кривизн; ψ_i — углы поворота координатных линий; T_{ij} — тангенциальные усилия; M_{ij} — моменты; $2h(\alpha_1, \alpha_2)$ — толщина оболочки; $E_{ijkl}, C_{ijkl}, D_{ijkl}, B_{ijkl}$ — упругие и вязкие характеристики оболочки

$$E_{ijkl} = E_{klij}, \qquad C_{ijkl} = C_{klij}, \qquad D_{ijkl} = {}^1/_3 h^2 E_{ijkl}, \qquad B_{ijkl} = {}^1/_3 h^2 C_{ijkl}$$

В случае «пологой» теории (вариант В. З. Власова) $\psi_1 = A_1^{-1} u_{3\alpha_1}$ $(1 \rightleftarrows 2)$. В случае «непологой» теории $\psi_1 = A_1^{-1} u_{3\alpha_1} - k_{11} u_1$ $(1 \rightleftarrows 2)$ $(k_{12} = k_{21} = 0)$.

Принцип Гамильтона — Остроградского диктует следующее определение обобщенного решения:

$$\int_0^T\int_\Omega \{T_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + M_{ij}\delta\varkappa_{ij}\} A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt = \int_0^T\int_\Omega \{F_i\delta u_i + 2\rho h u_{it}\delta u_{it}\} \times \tag{2.2}$$
$$\times A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \int_\Omega h_i \delta u_i A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Big|_{t=0}$$

если граничные условия имеют вид

$$\omega\,|_\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

Здесь $\delta\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij} + {}^1/_2\,(\psi_i\delta\psi_j + \psi_j\delta\psi_i)$; Ω — область с границей Γ, занимаемая оболочкой в плане; знак вариации δ означает, что вместо вектор-функции ω надо подставить возможное перемещение $\delta\omega$, которое считается равным нулю при $t = T$; F_i — распределенная нагрузка; ρ — плотность.

Начальные условия следующие:

$$u_i\,|_{t=0} = g_i, \qquad u_{it}\,|_{t=0} = h_i \tag{2.4}$$

Пусть выполняются условия:

а) Ω — связная ограниченная область, являющаяся конечной суммой звездных областей; ее граница Γ состоит из конечного числа замкнутых контуров класса Ляпунова $Л_1(m, 0)$;

б) A_i, $A_{i_{\alpha_k}}$, k_{ij}, $k_{ij_{\alpha_l}}$, ρ, h — измеримые ограниченные на Ω функции, причем $0 < m_5 \leqslant A_i$, ρ, $h \leqslant m_6$;

в) для всех симметричных тензоров ε_{ij} выполняется энергетическое неравенство $E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geqslant m_7\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, $\quad m_7 > 0$;

г) функции

$$C_{ijkl}(t,\tau), \quad B_{ijkl}(t,\tau), \quad \frac{\partial}{\partial t}C_{ijkl}(t,\tau), \quad \frac{\partial}{\partial t}B_{ijkl}(t,\tau)$$

измеримы по совокупности переменных t, τ на треугольнике $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, и при всех $t \in [0, T]$ суммируемы на $[0, t]$ по переменной τ, а при всех $\tau \in [0, T]$ суммируемы на $[\tau, T]$ по переменной t, причем

$$\int_{t-\lambda}^{t} |C_{ijkl}(t,s)|\,ds + \int_{\tau}^{\tau+\lambda} \left|C_{ijkl}(s,\tau)\right| ds \leqslant \varphi_4(\lambda), \qquad |C_{ijkl}(t,t)| \leqslant m_8$$

$$\int_{t-\lambda}^{t} \left|\frac{\partial}{\partial t}C_{ijkl}(t,s)\right| ds + \int_{\tau}^{\tau+\lambda} \left|\frac{\partial}{\partial s}C_{ijkl}(s,\tau)\right| ds \leqslant \varphi_5(\lambda)$$

$$\varphi_4(\lambda) \to 0, \quad \text{если } \lambda \to 0 \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau + \lambda \leqslant t \leqslant T$$

Ниже указывается соответствие обозначений в уравнениях (1.1) и (2.2). Пространство H_1 в данном случае есть пространство $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Оператор A_1 определяется из равенства

$$(\mathbf{A}_1\omega\cdot\delta\omega) = \int_\Omega \{T_{ijy}(e_{kl})\,\delta e_{ij} + M_{ijy}(\varkappa_{kl})\,\delta\varkappa_{ij}\}\,A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

Здесь $T_{ijy}(e_{kl})$ означает, что в выражении T_{ijy} (2.1) нужно взять лишь линейную по ω часть. Как и в [3], можно показать, что соответствующее пространство H_2 есть подпространство $\mathbf{W} = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$, причем на H_2 нормы H_2 и $\mathbf{W}$ эквивалентны

$$\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \{T_{ijy}\varepsilon_{ij} + M_{ijy}\varkappa_{ij}\} A_1 A_2 \, d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

Вязкие члены уравнения (2.2) соответствуют оператору $\mathbf{B}^t$.

Определение 2.1. Обобщенным решением уравнения (2.2) с граничными и начальными условиями (2.3), (2.4) называется вектор-функция $\boldsymbol{\omega} \in H_3(0, T)$, удовлетворяющая соотношению (2.2) для любой вектор-функции $\delta\boldsymbol{\omega} \in D^\circ$ и первому из начальных условий (2.4) в смысле (1.5).

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия а) — г). В этом случае задача о колебаниях вязко-упругой пологой (и непологой) оболочки имеет по меньшей мере одно обобщенное решение в смысле определения 2.1, если

$$\mathbf{h} \in H_1, \quad \mathbf{g} \in H_2, \quad \int\limits_0^T \|\mathbf{F}\|_1^2 \, dt < \infty$$

Доказательство теоремы 2.1 заключается в проверке всех условий абстрактной теоремы 1.1 при выполнении условий теоремы 2.1. Условия 1) — 7) теоремы 1.1 перенесены дословно из [1] и проверяются, как в [1]. Необходимо лишь отметить, что при проверке шестого условия роль w_x, w_y (см. [1], стр. 780) должны выполнять функции ψ_1, ψ_2, как в случае пологой, так и непологой оболочки. Справедливость остальных условий, кроме условий 9) и 12), устанавливается теми же методами, что и справедливость подобной им части условий 1) — 7) теоремы 1.1.

Первая часть условия 9) теоремы 1.1 относительно вида оператора $\mathbf{C}^t$ следует из интегрального по времени t вида оператора. Необходимо лишь проверить соответствующие оценки (1.4). Для примера оценивается характерный член левой части первого неравенства (1.4) ($\lambda_k = t_k - t_{k-1}$)

$$\left| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \int\limits_\Omega \left\{ \int\limits_{t_{k-1}}^{\tau} C(\tau, \theta)\, \varepsilon(\theta)\, d\theta \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \right\} d\Omega \, d\tau \, dt \right| =$$

$$= \left| - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \int\limits_\Omega C(\tau, \tau)\, \varepsilon^2(\tau)\, d\Omega \, d\tau \, dt - \right.$$

$$- \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \int\limits_\Omega \int\limits_{t_{k-1}}^{\tau} C_\tau(\tau, \theta)\, \varepsilon(\theta)\, d\theta \varepsilon(\tau)\, d\Omega \, d\tau \, dt +$$

$$\left. + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_\Omega \int\limits_{t_{k-1}}^{t} C(t, \theta)\, \varepsilon(\theta)\, d\theta \varepsilon(t)\, d\Omega \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ m_8 \lambda_k + \frac{1}{2}\varphi_4(\lambda_k) + \frac{1}{2}\lambda_k \varphi_5(\lambda_k) \right\} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_\Omega \varepsilon^2 \, d\Omega \, d\tau$$

В выкладках применялись интегрирование по частям, перестановка порядка интегрирования, элементарные интегральные неравенства и условие г) теоремы 2.1. Из условия в) теоремы 2.1 вытекает положительная определенность функционала Φ относительно переменных ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$. Следствием этого факта и условия г) является первая оценка (1.4), если λ_k достаточно мало.

Вторая оценка (1.4) так же, как и условие 12) теоремы 1.1, проверяется аналогично.

Теорема 1.2 непосредственно переносится на случай вязко-упругой оболочки.

Теорема 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1 и пусть χ_l — некоторая полная в H_2 и ортонормированная в H_1 система вектор-функций. В этом случае система дифференциальных уравнений метода Бубнова — Галеркина (строится аналогично системе (1.6), (1.7)) в каждом приближении имеет по меньшей мере одно решение на всем отрезке $[0, T]$. Множество приближенных решений слабо компактно в $H_3(0, T)$, и каждая его предельная точка есть обобщенное решение уравнения (2.2) в смысле определения 2.1.

Примечание 1. В случае пологой теории можно рассмотреть уравнения, в которых пренебрегают влиянием инерции продольных движений оболочки, т. е. в уравнениях (2.2) отсутствуют члены ρu_{itt}, $i = 1, 2$,. Уравнения (2.2) естественным образом распадаются на линейную относительно u_1, u_2 систему уравнений и еще одно уравнение. Из этой системы, которая относительно функций u_1, u_2 представляет собой плоскую задачу линейной квазистатической вязко-упругости в криволинейных координатах, перемещения u_1, u_2 находятся через u_3 функциональным методом и подставляются в новое уравнение. Аналогично [1] вводится понятие обобщенного решения. Для этих уравнений оказываются справедливыми теоремы типа 2.1, 2.2, но, кроме того, выполняется следующая теорема единственности.

Теорема. Пусть выполняются все условия теоремы 2.1. В этом случае обобщенное решение уравнений колебаний пологой вязко-упругой оболочки, записанных без учета инерции продольных движений оболочки, единственно в классе функций из $H_3^*(0, T)$ (соответствующая норма в H_2^* представляет собой только энергию упругого изгиба оболочки), для которых при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ конечны

$$\|u_{3\alpha_i\alpha_j}\|_{L_{2+\varepsilon}(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0, \quad i, j = 1, 2$$

если характеристики оболочки (срединная поверхность, контур Γ, толщина h) достаточно гладкие и если при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ конечны $\|F_i\|_{L_{2+\varepsilon(\Omega)}}$, $\varepsilon > 0$, $i = 1, 2$.

Примечание 2. Все полученные выше результаты справедливы и в частном случае — случае колебаний упругих оболочек.

Поступила 16 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, № 6.
2. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. Изд-во МГУ, 1969.
3. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.