Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Получено точное решение осесимметричной контактной задачи о вдавливании круглого штампа в упругое полупространство с модулем упругости, меняющимся по закону $E = E_\nu z^\nu$ $(0 \leqslant \nu < 1)$, при наличии полного сцепления.

1. Для формулировки осесимметричной контактной задачи о вдавливании круглого штампа в любое линейно-деформируемое основание, очевидно, достаточно знать вертикальные и радиальные смещения поверхностных точек основания от воздействия вертикальной и радиальной нагрузок вида

$$p_0(r) = \delta(r-\rho), \qquad q_0(r) = \delta(r-\rho) \qquad (r,\ \rho \geqslant 0) \tag{1.1}$$

где $\delta(x)$ — импульсная функция Дирака, описывающая в данном случае сосредоточенную по линии окружности (радиуса ρ) нагрузку.

Правило знаков для нагрузок и перемещений примем следующее. Вертикальная нагрузка и соответствующее перемещение считаются положительными, если они направлены сверху вниз, радиальная нагрузка и смещение положительны, если они направлены в сторону роста значений r.

Пусть известны вертикальные $\theta_0{}^*\rho K_{00}(r, \rho)$ и радиальные $-\theta_1{}^*\rho K_{10}(r, \rho)$ смещения от нагрузки $p_0(r)$ и вертикальные $-\theta_1{}^*\rho K_{01}(r, p)$ и радиальные $\theta_2{}^*\rho K_{11}(r, \rho)$ смещения от нагрузки $q_0(r)$.

(Здесь знаки для смещений взяты такие же, как в случае классического основания, представляющего собой однородное изотропное полупространство.)

Тогда, если обозначить искомые нормальные и касательные контактные напряжения под круговым штампом (радиуса a) соответственно через $p(r)$ и $q(r)$, то придем к следующей системе интегральных уравнений:

$$\theta_0{}^* \int_0^a K_{00}(r, \rho)\,\rho p(\rho)\,d\rho - \theta_1{}^* \int_0^a K_{01}(r, \rho)\,\rho q(\rho)\,d\rho = f(r) \tag{1.2}$$

$$\theta_2{}^* \int_0^a K_{11}(r, \rho)\,\rho q(\rho)\,d\rho - \theta_1{}^* \int_0^a K_{10}(r, \rho)\,\rho p(\rho)\,d\rho = g(r)$$

Здесь $f(r)$ и $g(r)$ — заданные функции (определяющие смещения в зоне контакта), причем первая из них задана с точностью до аддитивной постоянной (осадка штампа), а вторая в нуле равна нулю.

Отметим, что в случае классического основания функции влияния K_{mn} определяются формулами ($J_n(z)$ — функция Бесселя).

$$K_{mn}(r, \rho) = W_{mn}^0(r, \rho), \qquad \theta_0^* = \theta_2^* = 2E^{-1}(1-\mu^2) \tag{1.3}$$

$$\theta_1^* = (1-2\mu)(1+\mu)E^{-1}, \qquad W_{mn}^{\nu}(r, \rho) = \int_0^\infty t^\nu J_m(tr) J_n(t\rho)\, dt$$

Займемся построением функций влияния для полупространства с модулем упругости в виде $E = E_\nu z^\nu$. Воспользуемся тем, что в плоском случае аналогичные функции легко построить, используя результаты работ [1,2]. В результате обнаружим, что при действии вертикальной (сверху вниз) нагрузки $p(x)$ на границу полуплоскости с указанным модулем упругости смещения вертикальные $w_p(x)$ и горизонтальные $u_p(x)$ (ось x направляем вправо) граничных точек полуплоскости представимы в виде

$$w_p(x) = \theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(y)\, dy}{\nu\, |x-y|^\nu}, \qquad u_p(x) = -\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)\, p(y)\, dy}{|x-y|^\nu} \tag{1.4}$$

$$\theta_0 = \frac{(1-\mu^2)\gamma C_\nu \sin {}^1/_2 \gamma\pi}{(1+\nu)E_\nu}, \qquad \theta_1 = -\frac{(1-\mu^2)C_\nu \cos {}^1/_2 \gamma\pi}{\nu E_\nu}$$

$$C_\nu = \frac{2^{\nu+1}\Gamma[{}^1/_2(\nu+\gamma+3)]\,\Gamma[{}^1/_2(\nu-\gamma+3)]}{\pi\Gamma(\nu+2)}, \qquad \gamma^2 = (1+\nu)\left(1 - \frac{\nu\mu}{1-\mu}\right)$$

При действии горизонтальной (слева направо) нагрузки $q(x)$ на границу полуплоскости соответствующие смещения имеют вид

$$w_q(x) = \theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)\, q(y)\, dy}{|x-y|^\nu}, \qquad u_q(x) = \theta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(y)\, dy}{\nu\, |x-y|^\nu} \tag{1.5}$$

$$\theta_2 \gamma E_\nu = (1-\mu^2)(1+\nu) C_\nu \sin {}^1/_2 \gamma\pi$$

Приведенные формулы (1.4), (1.5) позволяют построить нужные функции влияния. Для этого следует воспользоваться формулами перехода от плоских к осесимметричным состояниям, указанными в работе [3]. Применительно к смещениям поверхностных точек они имеют вид

$$w^\circ(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{dw^*(x)}{\sqrt{x^2-r^2}}, \qquad u^\circ(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{x\, du^*(x)}{r\sqrt{x^2-r^2}} \tag{1.6}$$

Здесь $w^\circ(r)$ и $u^\circ(r)$ — вертикальные и радиальные смещения поверхностных точек основания при осесимметричном состоянии, $w^*(x)$, $u^*(x)$ — вертикальные и горизонтальные смещения соответствующего плоского состояния.

Обозначим, например, через $u_{10}^\circ(r)$ радиальные смещения поверхностных точек основания от нагрузки $p_0(r)$. Согласно [3], соответствующие им горизонтальные смещения $u_{10}^*(x)$ плоского состояния с учетом (1.4) будут определяться формулой

$$u_{10}^*(x) = -2\rho\theta_1 \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)\,dy}{|x-y|^{\nu}\sqrt{\rho^2-y^2}} \tag{1.7}$$

Сведя здесь интегрирование к интервалу $(0, \rho)$ и, воспользовавшись формулой 3.762(2) [4], после изменения порядка интегрирования и дифференцирования получим

$$\frac{du_{10}^*(x)}{dx} = -\frac{2\rho\pi\theta_1}{\Gamma(\nu)\sin{}^1/_2\nu\pi}\int_0^{\infty} t^{\nu}\cos xt J_0(\rho t)\,dt = \tag{1.8}$$

$$= \frac{2\rho\pi\theta_1}{x\Gamma(\nu)\sin{}^1/_2\nu\pi}\int_0^{\infty}\sin xt\, d\,[t^{\nu}J_0(\rho t)$$

Второе равенство получено интегрированием по частям. Подставив (1.8) во вторую формулу (1.6) после изменения порядка интегрирования, использования формулы 3.753(3) [4] и интегрирования по частям, найдем

$$u_{10}^{\circ}(r) = -\theta_1\pi\rho\,[\sin{}^1/_2\nu\pi\Gamma(\nu)]^{-1}W_{10}^{\nu}(r, \rho) \tag{1.9}$$

Поступая таким же путем при отыскании других смещений, обнаружим, что применительно к полупространству с $E = E_{\nu}z^{\nu}$ содержащиеся в (1.2) функции влияния и параметры имеют вид

$$K_{mn}(r, \rho) = W_{mn}^{\nu}(r, \rho), \qquad \theta_1^* = \pi\theta_1[\sin{}^1/_2\nu\pi\Gamma(\nu)]^{-1} \tag{1.10}$$
$$\theta_{0,2}^* = \pi\theta_{0,2}[\cos{}^1/_2\nu\pi\Gamma(\nu+1)]^{-1}$$

т.е. как и в случае классического основания, функции влияния выражаются через интегралы Вебера — Сонина (1.3).

2. Сведем систему интегральных уравнений (1.2) применительно к случаю (1.10) к одному интегральному уравнению, допускающему точное решение. Рассмотрим интегралы

$$P(t) = \int_0^a J_0(t\rho)\rho p(\rho)\,d\rho, \qquad Q(t) = \int_0^a J_1(t\rho)\rho q(\rho)\,d\rho \tag{2.1}$$

Если воспользоваться известными представлениями [4]

$$J_0(t\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\rho}\frac{\cos ts\,ds}{\sqrt{\rho^2-s^2}}, \qquad \rho J_1(t\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\rho}\frac{s\sin ts\,ds}{\sqrt{\rho^2-s^2}} \tag{2.2}$$

то после изменения порядка интегрирования вместо (2.2) будем иметь

$$P(t) = \int_0^a \sigma(s)\cos ts\,ds, \qquad Q(t) = \int_0^a \tau(s)\sin ts\,ds \tag{2.3}$$

$$\sigma(s) = \frac{2}{\pi}\int_s^a\frac{\rho p(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{2s}{\pi}\int_s^a\frac{q(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-s^2}} \tag{2.4}$$

Функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ при необходимости будем продолжать на отрицательные значения аргумента соответственно четным и нечетным образом, т. е.

$$\sigma(-s)=\sigma(s), \qquad \tau(-s)=-\tau(s) \tag{2.5}$$

Приняв во внимание (1.10) и (1.3), изменим в (1.2) порядок интегрирования и учтем (2.1), (2.3), (2.4). После этого к первому и второму уравнениям (1.2) применим соответственно операторы

$$\Gamma[\varphi(x)]=\int_0^x\frac{\varphi(r)\,r\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}, \qquad J^{\cdot}[\varphi(x)]=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}\int_0^y\varphi(r)\,dr \tag{2.6}$$

Последующее использование известных формул Н. Я. Сонина [4]

$$\int_0^x\frac{J_0(tr)\,r\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}=\frac{\sin xt}{t}, \quad \frac{d}{dx}\int_0^x\frac{J_0(tr)-1}{\sqrt{x^2-r^2}}\,r\,dr=\cos xt-1 \tag{2.7}$$

приведет уравнения (1.2) к виду

$$\theta_2^*\int_0^a\sigma(s)\,ds\int_0^\infty\frac{\sin tx\cos ts}{t^{1-\nu}}\,dt-\theta_1^*\int_0^a\tau(s)\,ds\int_0^\infty\frac{\sin tx\sin ts}{t^{1-\nu}}\,dt=\Gamma[f(x)] \tag{2.8}$$

$$-\theta_2^*\int_0^a\tau(s)\,ds\int_0^\infty\frac{(\cos tx-1)\sin ts}{t^{1-\nu}}\,dt+$$

$$+\theta_1^*\int_0^a\sigma(s)\,ds\int_0^\infty\frac{(\cos tx-1)\cos ts}{t^{1-\nu}}\,dt=J^{\cdot}[g(x)]$$

Воспользовавшись формулами 3.762, 3.761(4), 3.761(9) [4], допущением (2.5), а также формулами (1.10), (1.4) и (1.5), вместо (2.8) будем иметь

$$\int_{-a}^a\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\,\sigma(s)\,ds}{|x-s|^\nu}-\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\lambda\pi}{\varkappa(\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi)^2}\int_{-a}^a\frac{\tau(s)\,ds}{|x-s|^\nu}= \tag{2.9}$$

$$=\frac{2\varkappa^{-1}\operatorname{tg}{}^1/_2\lambda\pi}{\pi\theta_1\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi}\int_0^x\frac{f(r)\,r\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\int_{-a}^a\frac{\operatorname{sgn}(x-s)\,\tau(s)\,ds}{|x-s|^\nu}+\frac{\varkappa\operatorname{tg}{}^1/_2\lambda\pi}{(\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi)^2}\int_{-a}^a\frac{\sigma(s)\,ds}{|x-s|^\nu}=$$

$$=\int_{-a}^a\frac{\operatorname{sgn}(-s)\,\tau(s)\,ds}{|s|^\nu}+\frac{\varkappa\operatorname{tg}{}^1/_2\lambda\pi}{(\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi)^2}\int_{-a}^a\frac{\sigma(s)\,ds}{|s|^\nu}+$$

$$+\frac{2\varkappa\operatorname{tg}{}^1/_2\lambda\pi}{\pi\theta_1\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi}\int_0^x\frac{xg(r)\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$(\lambda=\gamma-1, \quad \varkappa=(1+\lambda)(1+\nu)^{-1})$$

Умножив первое уравнение (2.9) на $\sqrt{\varkappa}$, а второе — на $i\varkappa^{-1/2}$ и результаты сложив, получим одно интегральное уравнение

$$\int_{-a}^a[k_\nu(x-s)-k_\nu(-s)]\,\chi(s)\,ds=F(x) \tag{2.10}$$

относительно комплекснозначной функции

(2.11) $\chi(s) = \sqrt{\varkappa}\sigma(s) + \varkappa^{-1/2} i\tau(s)$

Ядро и правая часть уравнения (2.10) определяются формулами

(2.12) $k_\nu(y) = |y|^{-\nu}[\operatorname{sgn} y + i \operatorname{tg} {}^1/_2 \lambda\pi (\operatorname{ctg} {}^1/_2 \nu\pi)^2]$

$$F(x) = \frac{2 \operatorname{tg} {}^1/_2 \lambda\pi x}{\pi\theta_1 \operatorname{tg} {}^1/_2 \nu\pi \sqrt{\varkappa}} \int\limits_0^1 \frac{[f(x\rho)\rho + i\varkappa g(x\rho)]\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

3. Решение полученного интегрального уравнения можно построить в явном виде методом сведения к краевой задаче Римана ([5], стр. 603). Однако представляется более удобным для этой цели воспользоваться следующим спектральным соотношением для многочленов Якоби $P_m^{\alpha,\beta}(x)$:

(3.1)
$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \int\limits_{-a}^{a} \left[\operatorname{sgn}(x-t) + \frac{\operatorname{tg}\pi(\alpha + {}^1/_2\nu)}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \nu\pi}\right] \frac{(a+t)^{k+\nu+\alpha} P_m^{-\alpha,\, k+\nu+\alpha}(t/a)}{(a-t)^\alpha |x-t|^\nu} dt =$$
$$= \frac{\pi\Gamma(m+\nu+k+1) P_m^{k+\nu+\alpha,\, -\alpha}(x/a)}{\Gamma(\nu) \sin {}^1/_2 \nu\pi \cos\pi(\alpha + {}^1/_2\nu)\, m!}$$
$$(0 \leqslant \operatorname{Re}\nu < 1,\ \operatorname{Re}\alpha > -1,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Это соотношение является обобщением спектрального соотношения работы [6] на случай $\nu \neq 0$ и выводится тем же приемом.

Чтобы воспользоваться спектральным соотношением (3.1), продифференцируем обе части уравнения (2.10)

(3.2)
$$\frac{d}{dx} \int\limits_{-a}^{a} \left[\operatorname{sgn}(x-s) + \frac{i \operatorname{tg} {}^1/_2 \lambda\pi}{(\operatorname{tg} {}^1/_2 \nu\pi)^2}\right] \frac{\chi(s)}{|x-s|^\nu} ds = F'(x)$$

Далее из уравнения $\operatorname{tg}\pi(\alpha + {}^1/_2\nu) = i \operatorname{tg} {}^1/_2 \lambda\pi \operatorname{ctg} {}^1/_2 \nu\pi$ найдем, что

(3.3)
$$\alpha = i\beta - \frac{\nu}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sin {}^1/_2 (\nu+\lambda)\pi}{\sin {}^1/_2 (\nu-\lambda)\pi}$$

Можно показать, что всегда $\nu \geqslant \lambda$, $\nu + \lambda < 2$.

Наличие спектрального соотношения (3.1) позволяет для получения точного решения уравнения (3.2) применить метод ортогональных многочленов [7]. В результате получаем

(3.4)
$$\chi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_m P_m^\beta(x)}{\varphi_\beta(x)}, \quad \varphi_\beta(x) = \frac{(a-x)^{i\beta}(a+x)^{-i\beta}}{(a^2-x^2)^{\nu/2}}$$
$$(P_m^\beta(x) = P_m^{{}^1/_2\nu - i\beta,\, {}^1/_2\nu + i\beta}(x/a))$$

(3.5)
$$\chi_n = \frac{n!^2 (\nu + 1 + 2n)\Gamma(\nu) \sin {}^1/_2 \nu\pi \operatorname{ch} \pi\beta F_n}{\pi(2a)^{1+\nu} |\Gamma(1 + n + {}^1/_2\nu + i\beta)|^2}$$

(3.6)
$$F_n = \int\limits_{-a}^{a} \frac{F'(x) P_n^{-\beta}(x)\, dx}{\varphi_{-\beta}(x)}$$

Искомые контактные напряжения под штампом в соответствии с (2.4) и (2.11) определяются формулами

$$rp(r) = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s\,\mathrm{Re}\,[\chi(s)]\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}} \tag{3.7}$$

$$q(r) = -\sqrt{\varkappa}\,\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{\mathrm{Im}\,[\chi(s)]\,ds}{\sqrt{s^2-r^2}}$$

причем для отделения мнимой части от вещественной в (3.4) можно воспользоваться формулой

$$\frac{P_m{}^\beta(x)}{\varphi_\beta(x)} = \frac{(-1)^m}{(2a)^m m!}\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(a^2-x^2)^{1/2\nu+m}\cos\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\, i\frac{d^m}{dx^m}\left[(a^2-x^2)^{1/2\nu+m}\sin\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right]\right\}$$

Учитывая формулы (2.1), (2.3), (2.5) и (2.11), обнаружим, что сила, прижимающая штамп

$$P = 2\pi\int_0^a rp(r)\,dr = \pi\int_{-a}^a \sigma(s)\,ds = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-a}^a \chi(s)\,ds\right]$$

Подставив в последнюю формулу ряд (3.4) и воспользовавшись ортогональностью многочленов Якоби, получим

$$P = \varkappa^{-1/2}\nu^{-1}\sin{}^1/_2\nu\pi\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\,\mathrm{Re}\,[F_0] \tag{3.8}$$

4. В заключение остановимся на важном частном случае рассматриваемой задачи, когда основание штампа плоское и штамп загружен центрально силой P. Искомую величину осадки штампа обозначим через δ. В этом случае правые части системы (1.2) существенно упрощаются

$$f(r) = \delta, \qquad g(r) \equiv 0 \tag{4.1}$$

что в свою очередь приводит к упрощению формул (2.12) и (3.6)

$$F'(x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\lambda\pi\delta}{\pi\theta_1\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\nu\pi\sqrt{\varkappa}}, \qquad F_0 = \frac{2\,|\,\Gamma(1+{}^1/_2\nu+i\beta)\,|^2\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\lambda\pi\delta}{\pi(2a)^{-1-\nu}\,\Gamma(\nu+2)\,\theta_1\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\nu\pi} \tag{4.2}$$

Подставив последнее выражение в (3.8), найдем осадку штампа

$$\delta = \frac{P\varkappa\pi(1-\mu^2)\,\Gamma(\nu+2)\,C_\nu\cos{}^1/_2\lambda\pi}{2E_\nu(2a)^{1+\nu}\,|\,\Gamma(1+{}^1/_2\nu+i\beta)\,|^2\,\mathrm{ch}\,\pi\beta\cos{}^1/_2\nu\pi} \tag{4.3}$$

Формулы для контактных напряжений (3.7) тоже существенно упрощаются, так как в силу (4.2) и ортогональности многочленов Якоби $F_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и в ряду (3.4) остается только первый член, т. е.

$$\chi(s) = \chi_0(a^2-s^2)^{\nu/2}(a-s)^{-i\beta}(a+s)^{i\beta} \tag{4.4}$$

Подставляя это выражение в (3.7) и используя (3.5), (4.2) и (4.3), получим для рассматриваемого случая следующие формулы для контактных напряжений:

$$rp(r) = -\frac{P\Gamma(\nu+2)}{(2a)^{1+\nu}\,|\,\Gamma(1+{}^1/{}_2\nu+i\beta)\,|^2}\,\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{s(a^2-s^2)^{1/2\nu}}{\sqrt{s^2-r^2}}\times \tag{4.5}$$
$$\times\cos\left(\beta\ln\frac{a+s}{a-s}\right)ds$$
$$q(r) = -\frac{\varkappa P\Gamma(\nu+2)}{(2a)^{1+\nu}\,|\,\Gamma(1+{}^1/{}_2\nu+i\beta)\,|^2}\,\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{(a^2-s^2)^{1/2\nu}}{\sqrt{s^2-r^2}}\times$$
$$\times\sin\left(\beta\ln\frac{a+s}{a-s}\right)ds$$

Полагая в полученных формулах $\nu = 0$, получаем соответствующие результаты для классического основания. При этом формула (4.3) переходит в формулу, полученную в работах [8, 9]. Что же касается формул для контактных напряжений (4.5), то они приводят (при $\nu = 0$) к формулам, отличным по структуре от полученных в [8, 9]. Чтобы прийти к формулам работы [8], необходимо предварительно проделать ряд нетривиальных операций (в идейном отношении сходных с проделанными в работе [10] при решении аналогичной задачи для классического основания).

Эти операции заключаются в следующем. Вводим функции.

$$p^*(x) = \int_x^a rp(r)\,dr,\qquad q^*(x) = \int_x^a q(r)\,dr \tag{4.6}$$

и интегрируем обе формулы (3.7) на интервале (x, a), после чего применяем оператор I, определяемый формулой (2.6). В результате вместо (3.7) имеем (с учетом (2.11))

$$I[p^*(x)] = \int_0^a l(x,s)\,s\sigma(s)\,ds,\qquad I[q^*(x)] = \int_0^a l(x,s)\,\tau(s)\,ds \tag{4.7}$$
$$l(x,s) = \int_0^{\min(x,\,s)} \frac{udu}{[(x^2-u^2)(s^2-u^2)]^{1/2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|$$

Учитывая (2.5), заменим интервал интегрирования в соотношениях (4.7) на интервал $(-a, a)$, после чего их продифференцируем. В результате получим (Γ — конечное преобразование Гильберта)

$$\frac{d}{dx}I[p^*(x)] = \frac{1}{2}\Gamma[x\sigma(x)],\qquad \frac{d}{dx}I[q^*(x)] = \frac{1}{2}\Gamma[\tau(x)] \tag{4.8}$$
$$\Gamma(\varphi) = \int_{-a}^a \frac{\varphi(s)\,ds}{s-x}$$

Далее, приняв во внимание тождество

$$s(s-x)^{-1} = 1 + x(s-x)^{-1}$$

первое соотношение (4.8) запишем в виде

$$\frac{d}{dx}I[p^*(x)] = \frac{x}{2}\Gamma[\sigma(x)] + \frac{1}{2}\int_{-a}^a \sigma(s)\,ds$$

Применив к этому и второму соотношению (4.8) формулы обращения Абеля и приняв во внимание (4.6), получим

$$\sqrt{\varkappa}\,p(r) + i\varkappa^{-1/2}q(r) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{\Gamma[\chi(t)]\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \tag{4.9}$$

Подставив сюда решение интегрального уравнения (3.2), получим другую форму решения рассматриваемой задачи. Если использовать решение указанного уравнения в виде ряда (3.4), то приходим к необходимости вычислять конечное преобразование Гильберта от многочлена Якоби с соответствующим весом. Такое вычисление проделано впервые в работе [11]. Соответствующий результат (при $a = 1$) имеет вид

$$\Gamma\left[\frac{(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{-\alpha}} P_m^{\alpha,\beta}(x)\right] = \pi \operatorname{ctg} \pi\alpha (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_m^{\alpha,\beta}(x) - \tag{4.10}$$
$$- \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+m+1) F(m+1, -\alpha-\beta-m; 1-\alpha; {}^1/_2 - {}^1/_2 x)}{\pi 2^{-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta+m+1)}$$

Он содержится также и в работе [6]. Чтобы получить формулы для контактных напряжений для штампа с плоским основанием, указанные в работе [8], следует (4.4) подставить в (4.9), учесть (4.10) и выполнить предельный переход $\nu \to 0$.

Поступила 11 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* К вопросу о распределении напряжений в упругой полуплоскости с переменным модулем упругости. Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ, 1963.
2. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
3. *Александров А. Я.* Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматиздат, 1963.
6. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.
7. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
8. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
10. *Keer L. M.* Mixed bondary-value problems for an elastic half-space. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1967, vol. 63, No. 4.
11. *Tricomi F.* On the finite Hilbert transformation. Quart. J. Math., 1951, vol. 2, p. 199—211.