Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ОБ ИГРОВОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ ТЕЛ

Н. В. Баничук

(Москва)

Задачи оптимизации упругих тел рассматриваются обычно в детерминированной постановке, и для их решения применимы методы вариационного исчисления и теории оптимального управления (см., например, работу [1] и обзоры [2–4]). В данной работе дается рассмотрение тех случаев, когда либо не имеется полной информации относительно прикладываемых нагрузок, либо известно, что на конструкцию последовательно могут действовать различные силы из некоторого класса. Приводится постановка задачи об определении формы упругого тела, оптимальной для класса нагрузок, и указывается общая схема ее решения, основанная на «минимаксном» подходе, используемом в теории игр. Рассмотрены задачи оптимизации упругих балок, и в результате их решения выявлены некоторые особенности оптимальных форм.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу отыскания оптимальной формы упругого тела, находящегося в равновесии под действием приложенных сил. Уравнения равновесия запишем в виде

$$L(v)\,u = f \tag{1.1}$$

Здесь $u = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ — вектор-функция, определяющая состояние упругой среды; $f(x)$ — вектор внешних воздействий; x — вектор пространственных координат, принимающих значения из некоторой заданной области D, занимаемой упругим телом. В конкретных задачах в качестве составляющих вектора u могут выбираться компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}, перемещения w_i, моменты M_i, возникающие в деформируемой среде и т. д. Через $L(v)$ в (1.1) обозначен оператор дифференцирования по пространственным координатам x_i. Коэффициенты оператора зависят от вектор-функции $v = (v_1(x), \ldots, v_m(x))$. Функции $v_i(x)$ определяют форму деформируемого тела и играют в рассматриваемой задаче роль управлений. В качестве функций $v_i(x)$ могут фигурировать распределения толщины и площадей сечений тела, а также функции, служащие для задания геометрии конструкции (например, функции, определяющие положение линии, соединяющей центры сечений криволинейного стержня).

Требования, предъявляемые к конструкции, приводят к ограничениям на управления

$$v \in V \tag{1.2}$$

Через V обозначено некоторое заданное множество допустимых управлений. Если, например, в качестве управлений v рассматриваются распределения толщин пластины или балки, то ограничение (1.2) может иметь вид $\delta_1 \leqslant v(x) \leqslant \delta_2$, где δ_1, δ_2 — заданные положительные константы ($\delta_1 \leqslant \delta_2$).

Вид прикладываемой к телу нагрузки заранее не фиксируется, а предполагается заданным множество F, содержащее все возможные реализации внешних сил. Запишем это в виде

$$(1.3) \qquad f \in F$$

и при решении задачи оптимизации формы тела будем допускать к рассмотрению только силы из (1.3). Если, к примеру, объект оптимизации — пластина переменной толщины, а внешние воздействия — односторонние нагрузки, результирующая которых не превосходит величины P, то множество F в (1.3) имеет вид $F\ (f \geqslant 0,\ \int f(x)\, dx \leqslant P,\ x \in D)$.

Внешние воздействия могут входить и в граничные условия для уравнения (1.1). Вид граничных условий существенно зависит от решаемой задачи и здесь в общих рассмотрениях не конкретизирован.

Задача оптимизации заключается в отыскании функции $v(x)$ из (1.2), минимизирующей функционал (вес тела)

$$(1.4) \qquad G(v) = \gamma \int_D \varphi(v)\, dx \to \min$$

и удовлетворяющей при любых f из (1.3) прочностным и геометрическим условиям

$$(1.5) \qquad \omega(x, y, u, u_x, v, v_x) \leqslant 0$$

Через γ обозначен удельный вес материала среды, а величина φ, фигурирующая в (1.4),— заданная функция от v. Величина $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ — заданная вектор-функция своих аргументов, а условия (1.5) представляют собой систему неравенств. Векторная переменная $y \in Y$ служит для обозначения части пространственных координат, не входящих в выражение для оператора L и в формулу (1.4).

Например, если рассматривается задача об изгибе пластины из плоскости x_1x_2, то в качестве переменной y может быть выбрана координата, задающая расстояние по нормали от нейтральной (срединной) поверхности пластины. Область Y изменения этой координаты определяется положением поверхностей пластины. В конкретных задачах в качестве неравенств (1.5) могут фигурировать ограничения разных типов. К одному типу относятся прочностные условия, сводящиеся к ограничениям на напряжения. В качестве прочностных условий могут рассматриваться, например, условия $|\sigma_{ij}| \leqslant \sigma_{ij}^\circ$ (σ_{ij}° — заданные положительные константы), ограничивающие в отдельности допустимые значения каждой из компонент тензора напряжений либо условие $g(\sigma_{ij}) - k^2 \leqslant 0$, представляющие собой критерий перехода среды в пластическое состояние (k — константа пластичности). К другому типу относятся ограничения на упругие перемещения, вытекающие из геометрических или жесткостных требований, предъявляемых к конструкции. В качестве примера приведем условия $|w_i| \leqslant e_i$ (e_i — заданные положительные константы) ограничивающие допустимые прогибы деформируемого тела. Возможны также совместные ограничения на напряжения и перемещения. Анализ разных ограничений, учитываемых при оптимизации конструкций, и перечень полученных результатов содержится в обзорах [2–4].

Сформулированная задача (1.1) — (1.5) в силу имеющейся неопределенности в конкретном виде прикладываемой нагрузки относится к игровым задачам (игры с природой), и для ее решения может использоваться минимаксный (или гарантированный) подход.

2. Минимаксный подход. Укажем один способ, позволяющий в ряде случаев свести решение задачи (1.1) — (1.5) к отысканию экстремалей некоторой вариационной задачи. Предположим, что решение краевой задачи для уравнения (1.1) с соответствующими граничными условиями и при ограничениях (1.2), (1.3) может быть найдено в замкнутом виде $u = u(x, f, v, v_x)$. Зависимость u от f и v может быть, вообще говоря, функциональной. Подставим выражение для u в левые части неравенств (1.5). В результате приходим к системе функциональных неравенств

$$\Omega_j(x, y, f, v, v_x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.1}$$
$$\Omega_j(x, y, f, v, v_x) \equiv \omega_j(x, y, u(x, f, v, v_x), u_x(x, f, v, v_x), v, v_x)$$

Определим максимумы величин $\Omega_j(x, y, f, v, v_x)$ по переменным $f \in F$ и $y \in Y$. Максимизация производится при фиксированных $x \in D$ и $v \in V$. Предположим, что максимум j-й компоненты вектора Ω, т. е. величины Ω_j, достигается при $f_j = f_j^*$ и $y_j = y_j^*$, т. е.

$$\Omega_j(x, y_j^*, f_j^*, v, v_x) = \max_{y \in Y} \max_{f \in F} \Omega_j(x, y, f, v, v_x)$$

и введем обозначения

$$\Omega_j^*(x, v, v_x) \equiv \Omega_j(x, y_j^*(x, v, v_x), f_j^*(x, v, v_x), v, v_x) \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.2}$$

Если максимум Ω_j по f достигается сразу на нескольких различных функциях из (1.3), то в качестве f_j^* можно выбрать любую из этих функций. Совершенно аналогично можно поступить, если неединственная величина y, реализующая максимум функции Ω_j. Используя далее условия (2.1) и обозначения (2.2), приходим к неравенствам

$$\Omega_j^*(x, v, v_x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

Таким образом исходная задача (1.1) — (1.5) сводится к вариационной задаче минимизации по v интеграла (1.4) при дифференциальных неравенствах (2.3) и условиях (1.2), накладываемых на вектор-функцию v. Для решения этой задачи можно использовать методы, развитые в теории оптимального управления.

При решении задач на основе указанного подхода реализуется одна из двух возможностей. Либо оказывается, что в рассматриваемом классе существует «наихудшая» нагрузка, для которой конструкция минимального веса, найденная в расчете только на эту нагрузку, удовлетворяет условиям прочности и жесткости (1.5) и для всех остальных реализаций сил из заданного класса (конструкция данной формы и является оптимальной для класса сил, т. е. решением исходной задачи). Либо не существует наихудшей нагрузки, и оптимальное для класса сил решение не оптимально ни для какой в отдельности реализации нагрузок из данного множества. Примеры того и другого типа приводятся ниже.

Заметим, что минимаксный подход можно также применить к задачам с неполной информацией о граничных условиях и о свойствах материала, из которого изготовляется конструкция.

Описанный выше способ сведения игровой задачи к задаче вариационного исчисления применим в тех случаях, когда удается в явном виде получить зависимости упругих решений от управлений. Это ограничивает возможности использования метода при аналитическом решении многомерных задач оптимизации конструкций.

3. Оптимизация для класса нагрузок упругих балок. Равновесие упругой балки длины l, расположенной в плоскости xy и нагруженной внешними силами $f(x)$, параллельными оси y, описывается уравнениями

$$dM/dx = Q, \quad dQ/dx = -f \tag{3.1}$$

Здесь $M = M(x)$ и $Q = Q(x)$ — соответственно изгибающий момент и поперечная сила, действующая в сечении балки плоскостью, перпендикулярной оси x. В недеформированном состоянии балка расположена вдоль оси x и закреплена либо на обоих концах в точках $x = 0$ и $x = l$, либо на одном конце в точке $x = 0$. Балка имеет прямоугольное поперечное сечение постоянной ширины $v_2 = a$ и переменной высоты $v_1 = v_1(x)$. Функция $v_1 = v_1(x)$, определяющая форму балки — искомая величина. Предполагается, что прикладываемая к балке нагрузка положительна (направление действия нагрузки совпадает с положительным направлением оси y), а ее равнодействующая не превосходит заданной величины P, т. е.

$$f(x) \geqslant 0, \qquad \int_0^l f(x)\,dx \leqslant P \tag{3.2}$$

Для любой реализации нагрузок, удовлетворяющей условиям (3.2), нормальное и касательное напряжения σ_x и τ_{xy} должны удовлетворять условиям прочности балки

$$\omega_1 \equiv |\sigma_x| - \sigma_0 \leqslant 0, \quad \omega_2 \equiv |\tau_{xy}| - \tau_0 \leqslant 0 \tag{3.3}$$

где σ_0, τ_0 — заданные константы, и вычисляются по формулам

$$\sigma_x = \frac{My}{J}, \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Md}{J}\right) \tag{3.4}$$

$$J = \frac{av_1^3}{12}, \quad d = \frac{a}{2}\left(\frac{v_1^2}{4} - y^2\right), \quad -\frac{v_1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{v_1}{2}$$

Координата y здесь и ниже отсчитывается от центра поперечного сечения балки и меняется в указанных пределах.

Задача оптимизации формы балки заключается в отыскании функции $v_1 = v_1(x)$, удовлетворяющей при любых реализациях $f = f(x)$ из (3.2) условиям (3.3), в которых σ_x и τ_{xy} подсчитываются согласно (3.1), (3.4), и минимизирующей интеграл (вес балки)

$$G = a\gamma \int_0^l v_1(x)\,dx \tag{3.5}$$

4. Определение оптимальной формы шарнирно-закрепленной балки. Граничные условия для уравнений (3.1) в случае шарнирного закрепления концов балки имеют вид

$$M(0) = M(l) = 0 \tag{4.1}$$

Прежде чем перейти к решению задачи, выясним некоторые нужные для дальнейшего свойства функций $M(x)$, $Q(x)$. Для этого проинтегрируем уравнения (3.1) с указанными граничными условиями. В результате получим

$$M(x) = \int_0^l K(x,t) f(t)\,dt, \qquad Q(x) = \int_0^l T(x,t) f(t)\,dt \tag{4.2}$$

$$K(x,t) = \frac{t(l-x)}{l} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x,$$

$$K(x,t) = \frac{x(l-t)}{l} \quad \text{при } x \leqslant t \leqslant l$$

$$T(x,t) = -\frac{t}{l} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant x,$$

$$T(x,t) = 1 - \frac{t}{l} \quad \text{при } x < t \leqslant l$$

Из положительности функций $K(x, t)$ и $f(t)$ вытекает, что $M(x) \geqslant 0$. Зафиксируем точку $x \in [l/2, l]$ и рассмотрим множество значений, принимаемых величинами $M(x)$ и $Q(x)$ при всевозможных реализациях $f = f(t)$ из (3.2). Обозначим через $\max_f M(x)$ и $\max_f |Q(x)|$ максимальные значения изгибающего момента и модуля поперечной силы и покажем, что при $l/2 \leqslant x \leqslant l$

$$\max{}_f M(x) = Px\left(1 - \frac{x}{l}\right), \qquad \max{}_f |Q(x)| = \frac{Px}{l} \tag{4.3}$$

С этой целью, используя формулы (4.2), выполним следующие оценки:

$$M(x) \leqslant \max{}_t K(x,t) \int_0^l f(t)\,dt = Px\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{4.4}$$

Максимум по t в (4.4) вычисляется при $0 \leqslant t \leqslant l$. Заметим также, что для реализации $f(t) = P\delta(t - x)$ момент равен $M(x) = Px(l - x)/l$. Через δ — здесь обозначена δ-функция. Отсюда и из приведенных выше оценок (4.4) следует справедливость формулы (4.3) для M.

Доказательство соотношения (4.3) для Q проведем с помощью аналогичных оценок

$$|Q(x)| \leqslant \operatorname{vrai}\max{}_t |T(x,t)| \int_0^l f(t)\,dt = xP/l \tag{4.5}$$

Здесь через $\operatorname{vrai}\max_t |T|$ обозначен существенный максимум по t $(0 \leqslant t \leqslant l)$ кусочно-непрерывной функции $T(x, t)$, которая разрывна при $t = x$. Подставим реализацию $f(t) = P\delta(t - x^1)$ с $l/2 \leqslant x^1 < x$ в формулу (4.2) для Q и вычислим интеграл. В результате получаем $|Q(x)| = Px^1/l$. В пределе при $x^1 \to x - 0$ имеем $\lim |Q(x)| = Px/l$. Отсюда с учетом неравенства (4.5) получим формулу (4.3) для Q.

Учитывая симметричность условий задачи относительно точки $x = l/2$, будем в дальнейшем все рассмотрения проводить при $l/2 \leqslant x \leqslant l$.

Используя отмеченные свойства функций $M(x)$ и $Q(x)$, перейдем к отысканию явных выражений для $\Omega_1{}^*$ и $\Omega_2{}^*$. Определим сначала величины Ω_1 и Ω_2. Используя для этого формулы (2.1), (3.4), (3.7), (4.2), получим

$$\Omega_1 = \frac{12y}{av_1{}^3}\int_0^l K(x,t)f(t)\,dt - \sigma_0 \tag{4.6}$$

$$\Omega_2 = \frac{6}{a}\left|\left(\frac{1}{4v_1} - \frac{y^2}{v_1{}^3}\right)\int_0^l T(x,t)f(t)\,dt + \left(\frac{3y^2}{v_1{}^4} - \frac{1}{4v_1{}^2}\right)\frac{dv_1}{dx}\int_0^l K(x,t)f(t)\,dt\right| - \tau_0$$

Выражение для функции $\Omega_1{}^*$, получающееся в результате использования формул (2.2), (4.3), (4.6) и вычисления максимумов функции Ω_1 по f из (3.2) и по y из интервала $v_1 / 2 \leqslant y \leqslant v_1 / 2$, имеет вид

$$\Omega_1{}^* = \frac{6Px}{av_1{}^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \sigma_0 \tag{4.7}$$

Определим функцию $\Omega_2{}^*$. Для этого используем формулы (2.2), (4.3), (4.6). Выражение, записанное под знаком модуля в формуле (4.6) для Ω_2, представляет собой линейную функцию относительно y^2, и следовательно, максимум по y функции Ω_2 при $-v_1 / 2 \leqslant y \leqslant v_1 / 2$ достигается либо при $y^2 = v_1{}^2/4$, либо при $y^2 = 0$. Вычисляя указанные максимумы, запишем выражение для $\Omega_2{}^*$ в виде

$$\Omega_2{}^* = \max(\Psi_1, \Psi_2) - \tau_0 \tag{4.8}$$

$$\Psi_1 = \max_f \frac{3}{2av_1}\left|\int_0^l T(x,t)f(t)\,dt - \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}\int_0^l K(x,t)f(t)\,dt\right|$$

$$\Psi_2 = \max_f \frac{3}{av_1{}^2}\left|\frac{dv_1}{dx}\int_0^l K(x,t)f(t)\,dt\right|$$

Применяя для вычисления функции Ψ_2 формулу (4.3), находим

$$\Psi_2 = \frac{3Px}{av_1{}^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left|\frac{dv_1}{dx}\right| \tag{4.9}$$

Поступая аналогично тому, как это делалось при выводе соотношения (4.3) для Q, получим

$$\Psi_1 = \max\left(\frac{3P}{2av_1}\left|\frac{x}{l} + \frac{x}{v_1}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{dv_1}{dx}\right|, \frac{3P}{2av_1}\left|\frac{x}{l} - 1 + \frac{x}{v_1}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{dv_1}{dx}\right|\right) \tag{4.10}$$

Используя полученные выражения для функций $\Omega_1{}^*$ и $\Omega_2{}^*$, приведем условия, которым должна удовлетворять функция $v_1 = v_1(x)$ для того, чтобы выполнялись неравенства (2.3). Первое из неравенств (2.3) после подстановки в него выражения (4.7) для Ω_1^* приводит к условию

$$v_1(x) \geqslant W_1(x) \equiv \left[\frac{6Px}{a\sigma_0}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]^{1/2} \tag{4.11}$$

Подставляя во второе неравенство (2.3) выражение для Ω_2^* из (4.8) — (4.10), имеем ($\lambda = al\tau_0 / 3P$)

$$\frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{1}{x(l-x)} \min(\lambda v_1^2, 2\lambda v_1^2 - xv_1, 2\lambda v_1^2 + (l-x)v_1) \tag{4.12}$$

$$\frac{dv_1}{dx} \geqslant \frac{1}{x(l-x)} \max(-\lambda v_1^2, -2\lambda v_1^2 - xv_1, -2\lambda v_1^2 + (l-x)v_1) \tag{4.13}$$

Неравенства (4.12), (4.13) можно упростить, если заметить, что третье выражение, записанное в (4.12) в круглых скобках, больше второго и что в (4.13) второе выражение меньше третьего. Учитывая это, неравенства (4.12), (4.13) запишем следующим образом:

$$\frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{1}{x(l-x)} \min(\lambda v_1^2, 2\lambda v_1^2 - xv_1) \tag{4.14}$$

$$\frac{dv_1}{dx} \geqslant \frac{1}{x(l-x)} \max(-\lambda v_1^2, -2\lambda v_1^2 + (l-x)v_1) \tag{4.15}$$

Разобьем область S $(l / 2 \leqslant x \leqslant l,\ v_1 \geqslant 0)$, в которой разыскивается решение оптимальной задачи, на три подобласти

$$S_1(l/2 \leqslant x \leqslant l,\ v_1 \geqslant x/\lambda),\quad S_2(l/2 \leqslant x \leqslant l,\ (l-x)/\lambda \leqslant v_1 \leqslant x/\lambda)$$
$$S_3(l/2 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant v_1 \leqslant (l-x)/\lambda)$$

В указанных подобластях неравенства (4.14), (4.15) записываются в виде

$$-\frac{\lambda v_1^2}{x(l-x)} \leqslant \frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{\lambda v_1^2}{x(l-x)}, \quad (x, v_1) \in S_1 \tag{4.16}$$

$$-\frac{\lambda v_1^2}{x(l-x)} \leqslant \frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{2\lambda v_1^2 - xv_1}{x(l-x)}, \quad (x, v_1) \in S_2 \tag{4.17}$$

$$-\frac{2\lambda v_1^2 - (l-x)v_1}{x(l-x)} \leqslant \frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{2\lambda v_1^2 - xv_1}{x(l-x)}, \quad (x, v_1) \in S_3 \tag{4.18}$$

Неравенства (4.16) непротиворечивы для любых $(x, v_1) \in S_1$. Для разрешимости неравенств (4.17) в области S_2 и неравенств (4.18) в области S_3 необходимо, чтобы выполнялись условия

$$v_1 \geqslant x / (3\lambda), \quad v_1 \geqslant l / (4\lambda) \tag{4.19}$$

Итак, исходная задача оптимизации шарнирно закрепленных прямоугольных балок переменной высоты свелась к отысканию непрерывной функции $v_1(x)$, удовлетворяющей конечным неравенствам (4.11), (4.19), дифференциальными неравенствами (4.16) — (4.18) и минимизирующей интеграл

$$G = 2a\gamma \int_{l/2}^{l} v_1(x)\,dx \to \min \tag{4.20}$$

Функции $v_1 = v_1(x)$, удовлетворяющие неравенствам (4.11), (4.16) — (4.19), будем называть допустимыми и исследуем некоторые их свойства, используемые в дальнейшем. Допустимые функции должны удовлетворять дифференциальному неравенству

$$\frac{dv_1}{dx} \leqslant \frac{2\lambda v_1^2 - xv_1}{x(l-x)} \equiv g_1(x, v_1)$$

фигурирующему в (4.17), (4.18). Рассмотрим произвольную допустимую функцию $v_1(x)$, удовлетворяющую условию $v_1(x^\circ) = v_1^\circ$ и являющуюся решением некоторого дифференциального уравнения $dv_1 / dx = g_2(x, v_1)$, правая часть которого в силу приведенного выше неравенства оценивается следующим образом: $g_2(x, v_1) \leqslant g_1(x, v_1)$. Наряду с уравнением для v_1 рассмотрим уравнение $dh / dx = g_1(x, h)$ с начальным условием $h(x^\circ) = v_1^\circ$. По теореме о сравнении решений дифференциальных уравнений получим оценку $v_1(x) \leqslant h(x)$ при $x^\circ \leqslant x < l$.

Выражение для $h(x)$, получающееся в результате интегрирования уравнения $dh / dx = g_1$ и определения произвольной постоянной из условия $h(x^\circ) = v_1^\circ$, имеет вид

$$h = \frac{l-x}{2\lambda \ln(\mu / x)}, \qquad \mu = x^\circ e^{(l-x^\circ)/2\lambda v_1^\circ} \tag{4.21}$$

Рассмотрим поведение интегральных кривых $h(x)$ в зависимости от положения начальной точки (x°, v_1°). Если значения x°, v_1° таковы, что постоянная $\mu > l$, то, как нетрудно заметить из (4.21), имеет место стремление $h(x) \to 0$ при $x \to 0$. В этом случае, учитывая доказанное выше неравенство $v_1(x) \leqslant h(x)$, для допустимой функции $v_1(x)$ имеем $v_1(x) \to 0$ при $x \to l$.

Для начальных значений x°, v_1° таких, что $\mu < l$, интегральные кривые $h(x)$ уходят на бесконечность при x, стремящемся к μ. Если же величины x°, v_1° удовлетворяют условию

$$x^\circ \frac{(l-x^\circ)}{\exp 2\lambda v_1^\circ} = l$$

то при $x \to l$ имеется неопределенность в формуле (4.21) для h, раскрывая которую по правилу Лопиталя, получим $h(l) = l / 2\lambda$. Функцию $h(x)$ из (4.21) с $\mu = l$ обозначим через $W_2(x)$.

Используя эти свойства функции $h(x)$, покажем, что решение оптимальной задачи (4.11), (4.16) — (4.20) имеет вид

$$v_1 = \begin{cases} W_1(x), & l/2 \leqslant x \leqslant x^* \\ W_2(x), & x^* \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{4.22}$$

$$W_1(x) \equiv \left[\frac{6Px}{a\sigma_0}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]^{1/2}, \qquad W_2(x) \equiv \frac{l-x}{2\lambda \ln(l/x)}$$

Величина x^* определяется следующим образом. Пусть ξ — корень уравнения $W_1(\xi) = W_2(\xi)$, которое может быть записано в виде

$$\left[\frac{\xi}{\varkappa(l-\xi)}\right]^{1/2} \ln\left(\frac{\xi}{l}\right) = \frac{1}{4}, \qquad \varkappa = \frac{6P\sigma_0}{al\tau_0^2} \tag{4.23}$$

Если ξ удовлетворяет неравенству $l/2 \leqslant \xi < l$, то полагаем $x^* = \xi$. В противном случае величина x^* в формулах (4.22) полагается равной

$x^* = l / 2$. Первый случай, как нетрудно проверить, реализуется при $\varkappa \leqslant 16 (\ln 2)^2$, второй — при $\varkappa \geqslant 16 (\ln 2)^2$.

Доказательство оптимальности функции (4.22) заключается в проверке того, что данная функция является допустимой, т. е. удовлетворяет условиям (4.11), (4.16) — (4.19), и что не существует другой допустимой функции $v_1(x)$, для которой функционал (4.20) принимал бы меньшее значение, чем для v_1, из (4.22).

Рассмотрим сначала случай $\varkappa \leqslant 16 (\ln 2)^2$ и определим интервалы изменения x, на которых выполняются неравенства (4.16) — (4.18) при подстановке в них $v_1 = W_1(x)$. Проводя элементарные выкладки, получим, что неравенство (4.16) выполняется при $l / 2 \leqslant x \leqslant \alpha \equiv {}^1/_2 l (1 + \sqrt{4 / (4 + \varkappa)})$, неравенство (4.18) — при $l/2 \leqslant x \leqslant c \equiv {}^1/_8 l (4 + \sqrt{16 - \varkappa})$, а неравенство (4.17) — при $l / 2 \leqslant x \leqslant \beta \equiv \min (\alpha, c)$. Можно убедиться в том, что $x / 2\lambda < W_2(x) < x / \lambda$ при $l / 2 \leqslant x < l$, $W_2(x) = x / 2\lambda$ при $x = l$. Отсюда, в частности, вытекает, что величина $x^1 = 16l / (\varkappa + 16)$ — корень уравнения $x^1 / 2\lambda = W_1(x^1)$ — удовлетворяет неравенству $x^1 \geqslant x^*$. Поэтому для доказательства неравенств $\alpha \geqslant x^*$, $\beta \geqslant x^*$, $c \geqslant x^*$ достаточно убедиться в справедливости соотношений $\alpha \geqslant x^1$, $\beta \geqslant x^1$, $c \geqslant x^1$ при $0 \leqslant \varkappa \leqslant 16 (\ln 2)^2$, что достигается элементарными выкладками. Кривая $W_2(x)$ из (4.22) располагается в зависимости от значений параметра $\varkappa$ либо в области S_2, либо в $S_2 + S_3$ ($W_2(x) \leqslant x / \lambda$). Неравенства (4.17), (4.18) будут выполнены, так как при $v_1 = W_2(x)$ в правых частях этих неравенств реализуется знак точного равенства. Это следует из самого построения функции $W_2(x)$. Следовательно, функция $v_1(x)$, задаваемая равенствами (4.22), является допустимой при $0 \leqslant \varkappa \leqslant 16 (\ln 2)^2$. Для $\varkappa \geqslant 16 (\ln 2)^2$ функция $v_1 = W_2(x)$ ($l / 2 \leqslant x \leqslant l$) также допустима, так как при $v_1 = W_2(x)$ будут удовлетворены условия (4.17), (4.18).

Покажем теперь, что допустимая функция $v_1(x)$ из (4.22) является оптимальной. Для этого достаточно доказать, что график любой другой допустимой функции $v_1(x)$ расположен не ниже кривых $W_1(x)$ и $W_2(x)$. При $l / 2 \leqslant x \leqslant x^*$ допустимые $v_1(x)$, как следует из (4.12), должны лежать не ниже кривой $W_1(x)$, т. е. $v_1(x) \geqslant W_1(x)$. Докажем, что для $x^* \leqslant x \leqslant l$ выполнено неравенство $v_1(x) \geqslant W_2(x)$. Предположим, противное, т. е. что в некоторой точке $x = x^1$ ($x^* \leqslant x^1 \leqslant l$) допустимая функция $v_1(x)$ удовлетворяет неравенству $v_1(x^1) < W_2(x^1)$. Но, как отмечалось выше, для допустимой кривой $v_1(x)$, проходящей через точку $(x^1, v_1(x^1))$, имеет место стремление $v_1(x) \to 0$ при $x \to l$. Поэтому траектория $v_1(x)$, исходящая из точки $(x^1, v_1(x^1))$, неминуемо попадет в запретную область, определяемую неравенствами (4.19), и будет нарушено предположение о допустимости функции $v_1(x)$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $v_1(x) \geqslant W_2(x)$ для $x^* \leqslant x \leqslant l$. Следовательно, функция $v_1(x)$, определяемая формулой (4.22), является оптимальной.

Для найденного оптимального решения оценим величины напряжений σ_x и τ_{xy}, которые возникают при действии на балку сосредоточенной силы P. Обозначим здесь через σ_x максимальное по поперечному сечению (т. е. по y) значение нормального напряжения, а через τ_{xy} — существенный максимум касательных напряжений. Если сосредоточенная сила P прикладывается к оптимальной балке в точке ξ ($l/2 \leqslant \xi < x^*$), то величины $\sigma_x(x)$ и $\tau_{xy}(x)$, как следует из формул (3.4), (4.2), (4.22), удовлетворяют неравенствам $\sigma_x(x) \leqslant \sigma_0$, $\tau_{xy}(x) < \tau_0$ ($l / 2 \leqslant x \leqslant l$). Равенство $\sigma_x = \sigma_0$ достигается при $x = \xi$. Если же $x^* \leqslant \xi \leqslant l$, то $\sigma_x \leqslant \sigma_0$, $\tau_{xy} \leqslant \tau_0$. В этом случае предельное значение для касательного напряжения $\tau_{xy} = \tau_0$ достигается при $x = \xi$, а равенство $\sigma_x = \sigma_0$ имеет место, если $x = \xi = x^*$.

Таким образом, при приложении сосредоточенной силы к оптимальной балке в любую точку x из интервала $(l\,/\,2,\ l)$ предельное состояние достигается только в этой точке, и, следовательно, при проектировании балки на фиксированную нагрузку будут иметься дополнительные возможности для оптимизации. Это непосредственно подтверждается отысканием оптимальной формы для фиксированных сил (соответствующие выкладки здесь не приводятся). Следовательно, для рассмотренной задачи не существует наихудшей (в указанном выше смысле) нагрузки и оптимальная для класса сил форма балки не является оптимальной ни для какой в отдельности реализации сил из данного класса.

5. Оптимальная форма консольной балки. Для консольных балок, закрепленных в точке $x = 0$, распределения поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ имеют вид

$$Q(x) = \int_x^l f(t)\,dt, \qquad M(x) = \int_x^l (x - t) f(t)\,dt \tag{5.1}$$

$$\max\nolimits_f Q(x) = P, \quad \max\nolimits_f |M(x)| = P(l - x) \tag{5.2}$$

Максимум $Q(x)$ реализуется для любого фиксированного x из интервала $0 < x < l$, когда вся нагрузка приложена правее точки x ($f(t) = 0$ при $t < x$). Нагрузка, доставляющая максимум для $|M(x)'|$, является сосредоточенной силой величины P, которая приложена к свободному концу балки в точке $x = l$, т. е. $f(t) = P\delta(t - l)$. Сформулированные утверждения доказываются аналогично тому, как это делалось в п. 4 при исследовании соответствующих свойств величин Q и M.

Для определения функций $\Omega_1{}^*$ и $\Omega_2{}^*$ воспользуемся формулами (2.2), (3.3), (3.4), (5.1), (5.2) и, не проводя подробных выкладок, которые также аналогичны соответствующим выкладкам из п. 4, запишем окончательные формулы

$$\Omega_1{}^* = \frac{6P(l - x)}{a v_1{}^2} - \sigma_0 \tag{5.3}$$

$$\Omega_2{}^* = \begin{cases} \max\left[\dfrac{3P}{2av_1}\left(1 - \dfrac{(l - x)}{v_1}\dfrac{dv_1}{dx}\right), \dfrac{3P(l - x)}{av_1{}^2}\dfrac{dv_1}{dx}\right] - \tau_0, & \dfrac{dv_1}{dx} > 0 \\ \max\left[\dfrac{3P}{2av_1}, \dfrac{3P(x - l)}{av_1{}^2}\dfrac{dv_1}{dx}\right] - \tau_0, & \dfrac{dv_1}{dx} < 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Подставляя далее выражения (5.3), (5.4) в условия (2.3), получим, что для выполнения этих условий необходимо, чтобы функция $v_1(x)$ удовлетворяла неравенствам

$$v_1(x) \geqslant \left[\frac{6P(l - x)}{a\sigma_0}\right]^{1/2}, \qquad v_1(x) \geqslant \frac{3P}{2a\tau_0}$$

Рассмотрим теперь непрерывную функцию

$$v_1 = \begin{cases} \left[\dfrac{6P(l - x)}{a\sigma_0}\right]^{1/2}, & 0 \leqslant x \leqslant x^* \\ \dfrac{3P}{2a\tau_0}, & x^* \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{5.5}$$

$$(x^* = l - 3P\sigma_0\,/\,8a\tau_0{}^2)$$

и докажем, что она описывает искомую оптимальную форму, т. е. что $v_1 = v_1(x)$ доставляет минимум функционалу (3.5), рассматриваемому на классе непрерывных функций $v_1 = v_1(x)$, удовлетворяющих неравенствам (2.3) с Ω_1^* и Ω_2^* из (5.3), (5.4). Так как условия (5.4) являются необходимыми, то любая другая допустимая (в смысле этих условий) функция $v_1(x)$ будет лежать не ниже графика функции (5.5) и, следовательно, будет сообщать функционалу (3.5) большее значение. Нетрудно проверить также, проводя вычисления по формулам (5.3) — (5.5), что $\Omega_1^* \leqslant 0$ и $\Omega_2^* \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Следовательно, v_1 из (5.5) задает оптимальную форму.

Отметим некоторые свойства найденного оптимального решения. Обозначим здесь через σ_x и τ_{xy} максимальные по поперечному сечению балки (т. е. по переменной y) значения этих величин. Если сосредоточенная сила P приложена к свободному концу балки ($\xi = l$), то при $0 \leqslant x \leqslant x^*$ согласно формулам (3.4), (5.1), (5.5) $\sigma_x(x) = \sigma_0$, $\tau_{xy}(x) \leqslant \tau_0$ ($\tau_{xy} = \tau_0$ в точке $x = x^*$, а на отрезке $x^* < x \leqslant l$ имеем $\tau_{xy}(x) = \tau_0$, $\sigma_x(x) < \sigma_0$. Если же сила P приложена в точке $\xi \in (x^* \leqslant \xi < l)$, то при $0 \leqslant x \leqslant \xi$ имеем $\sigma_x(x) < \sigma_0$, $\tau_{xy}(x) \leqslant \tau_0$ ($\tau_{xy}(x) = \tau_0$, $x^* \leqslant x \leqslant \xi$), а для $\xi < x \leqslant l$ справедливы равенства $\sigma_x(x) = \tau_{xy}(x) = 0$. В случае, когда $0 < \xi < x^*$, на всем отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant l$ выполнены неравенства $\sigma_x < \sigma_0$, $\tau_{xy} < \tau_0$.

Таким образом, одновременно предельные состояния достигаются во всех сечениях балки только при действии сосредоточенной силы на свободный край балки. Поэтому для рассматриваемой задачи (в отличие от задачи, приведенной в п. 4) существует наихудшая сила в рассматриваемом классе F, для которой оптимальное решение, полученное в расчете только на эту силу, является оптимальным и для всего класса в целом.

Автор благодарит Черноусько Ф. Л. за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 3 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 252. Л.— М., «Машиностроение», 1965.
2. *Wasiutynski Z., Brandt A.* The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. Appl. Mech. Revs, 1963, vol. 16, No. 5.
3. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности. В сб.: Итоги науки. Упругость и пластичность. ВИНИТИ АН СССР, 1966.
4. *Sheu C. Y., Prager W.* Recent developments in optimal structural design. Appl. Mech. Revs., 1968, vol. 21, No. 10.