Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Александров, М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

Излагается метод сведения важного для приложений класса парных интегральных уравнений к бесконечным алгебраическим системам первого рода. Последние путем точного обращения главной сингулярной части приводятся к системам второго рода, решение которых можно получить методом последовательных приближений [1-6]. В качестве примеров рассматриваются парные интегральные уравнения, порожденные интегральными преобразованиями Конторовича — Лебедева и Мелера — Фока. Рассматриваются задачи о кручении усеченного упругого шара штампом и о кольцевой трещине в упругом пространстве.

1. Общая теория. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка по x

$$(L - u^2)\, y = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{1.1}$$

Путем решения соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для этого уравнения на интервале $x \in [0, \infty)$ построим интегральное преобразование

$$g(x) = \int_0^\infty G(u)\, B(u, x)\, du, \quad G(u) = \int_0^\infty g(\xi)\, M(u, \xi)\, d\xi \tag{1.2}$$

Здесь $B(u, x)$ — собственная функция уравнения (1.1) при любом $u \in [0, \infty)$, исчезающая на бесконечности и ограниченная в нуле; назовем ее решением первого рода.

Рассмотрим теперь парное интегральное уравнение

$$\int_0^\infty Q(u)\, K(u)\, B(u, x)\, du = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{1.3}$$

$$\int_0^\infty Q(u)\, B(u, x)\, du = 0, \quad 0 < x < a, \quad b < x < \infty$$

$$K(u) = A \frac{P_1(u^2)}{P_2(u^2)} = A \prod_{n=0}^\infty \left(1 + \frac{u^2}{\delta_n^2}\right)\left(1 + \frac{u^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1}, \quad A = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Здесь $K(u)$ — четная, мероморфная функция, представимая в виде (1.4), где $i\delta_n$ и $i\gamma_n$ — счетное множество нулей и полюсов функции $K(u)$. Будем предполагать, что кратных нулей и полюсов нет и $\delta_n \neq \gamma_m$ $(n, m = 1, 2, 3 \ldots)$. Пусть также δ_n и γ_n монотонно возрастают по модулю с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (1.4), а на любой правильной системе контуров C_n $(C_n \subset C_{n+1})$ имеет место оценка

$$K(u) = O(|u|^p), \quad p \leqslant 1 \tag{1.5}$$

Используя тот факт, что применение операции L к функции $B(u, x)$ дает $u^2 B(u, x)$, а также принимая во внимание (1.4), представим первое соотношение парного уравнения (1.3) в форме

$$AP_1(L)\, q(x) = P_2(L)\, f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{1.6}$$

$$q(x) = \int_0^\infty Q(u) B(u, x)\, du \tag{1.7}$$

Здесь $P_1(L)$ и $P_2(L)$ — дифференциальные операторы по x бесконечного порядка.

Решение дифференциального уравнения (1.6) относительно $q(x)$ можно представить в виде

$$q(x) = \frac{P_2(L)}{AP_1(L)} f(x) + \sum_{n=1}^\infty [C_n B(i\delta_n, x) + D_n R(i\delta_n, x)] \tag{1.8}$$

$$a \leqslant x \leqslant b$$

Здесь первое слагаемое — частное решение неоднородного уравнения, определяемое символическим методом, а бесконечная сумма дает общее решение однородного уравнения, причем функция $R(u, x)$ — решение второго рода уравнения (1.1), линейно независимое с $B(u, x)$.

Из формул (1.7), (1.8) и второго соотношения (1.3) имеем

$$Q(u) = \int_a^b q(\xi) M(u, \xi)\, d\xi \tag{1.9}$$

Для дальнейшего положим $f(x) = B(\varepsilon, x)$, имея в виду, что в общем случае функция $f(x)$ может быть представлена интегралом (1.2) или аппроксимирована линейной комбинацией функций $B(\varepsilon_k, x)$ $(k = 1,2,3, \ldots, N)$. Первое слагаемое в (1.8) принимает вид $K^{-1}(\varepsilon) B(\varepsilon, x)$. С учетом этого, подставляя (1.8) в (1.9), получим

$$Q(u) = K^{-1}(\varepsilon) \varphi(u, -i\varepsilon) + \sum_{n=1}^\infty [C_n \varphi(u, \delta_n) + D_n \psi(u, \delta_n)] \tag{1.10}$$

$$\varphi(u, x) = \int_a^b B(ix, \xi) M(u, \xi)\, d\xi, \quad \psi(u, x) = \int_a^b R(ix, \xi) M(u, \xi)\, d\xi$$

Теперь постоянные C_n и D_n необходимо определить из условия удовлетворения исходного парного уравнения (1.3) решением (1.10).

Заметим, что мероморфную функцию $K(u)$ при сделанных относительно нее предположениях можно представить в виде суммы главных значений

$$K(u) = A - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{s_k u^2}{\gamma_k (u^2 + \gamma_k^2)}, \quad s_k = \pi i \{[K^{-1}(i\gamma_k)]'\}^{-1} \tag{1.11}$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{s_k}{\gamma_k} = A \quad \text{при } p < 0$$

На основании (1.11) имеем выражения для $K(u)-K(\varepsilon)$ и $K(u)-$ $-K(i\delta_n)$.

Подставляя теперь (1.10) в первое соотношение (1.3) и принимая во внимание, что по построению

$$\int_0^\infty \varphi(u, -i\varepsilon) B(u, x)\, du = f(x) = B(\varepsilon, x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

а также, что $K(i\delta_n) = 0$, имеем

$$K^{-1}(\varepsilon) \int_0^\infty \varphi(u, -i\varepsilon)[K(u) - K(\varepsilon)] B(u, x)\, du +$$
$$+ \sum_{n=1}^\infty \Big\{C_n \int_0^\infty \varphi(u, \delta_n)[K(u) - K(i\delta_n)] B(u, x)\, du +$$
$$+ D_n \int_0^\infty \psi(u, \delta_n)[K(u) - K(i\delta_n)] B(u, x)\, du\Big\} = 0$$

Учитывая далее соотношения для разностей в квадратных скобках получим

$$\sum_{k=1}^\infty s_k\gamma_k \left\{\frac{K^{-1}(\varepsilon)}{\gamma_k^2 + \varepsilon^2} T_k(x, -i\varepsilon) + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_k^2 - \delta_n^2}[C_n T_k(x, \delta_n) + \right.$$
$$\left. + D_n U_k(x, \delta_n)]\right\} = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{1.12}$$

$$T_k(x, \mu) = \int_0^\infty \frac{u^2 + \mu^2}{u^2 + \gamma_k^2} \varphi(u, \mu) B(u, x)\, du$$

$$U_k(x, \mu) = \int_0^\infty \frac{u^2 + \mu^2}{u^2 + \gamma_k^2} \psi(u, \mu) B(u, x)\, du$$

Для дальнейшего исследования соотношения (1.12) необходимо знание конкретного вида функций $B(u, x)$, $\varphi(u, x)$ и $\psi(u, x)$. Тем не менее окончательный вид структуры соотношения (1.12) может быть установлен. Решим для этого дифференциальное уравнение (1.6) относительно функции $f(x)$. Имеем

$$f(x) = \frac{AP_1(L)}{P_2(L)} q(x) + \sum_{k=1}^\infty [E_k B(i\gamma_k, x) + F_k R(i\gamma_k, x)], \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{1.13}$$

Постоянные E_k и F_k определим из условия совпадения (1.13) с первым соотношением (1.3), следовательно, и с (1.12).

Очевидно E_k и F_k будут некоторыми линейными функционалами от $q(x)$, т. е. $E_k = E_k(q)$, $F_k = F_k(q)$. Подставим теперь в (1.13) выражение (1.8) функции $q(x)$.

Учитывая далее, что

$$\frac{AP_1(L)}{P_2(L)} B(i\delta_n, x) = K(i\delta_n) B(i\delta_n, x) = 0$$

$$\frac{AP_1(L)}{P_2(L)} R(i\delta_n, x) = K(i\delta_n) R(i\delta_n, x) = 0$$

приведем (1.13), а следовательно, и (1.12) к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n E_{kn}^+ + D_n F_{kn}^+) B(i\gamma_k, x) + (C_n E_{kn}^- +$$

$$+ D_n F_{kn}^-) R(i\gamma_k, x)] + K^{-1}(\varepsilon) \sum_{k=1} [E_k{}^* B(i\gamma_k, x) + F_k{}^* R(i\gamma_k, x)] = 0$$

$$E_k[B(\varepsilon, x)] = E_k{}^*, \quad E_k[B(i\delta_n, x)] = E_{kn}^+, \quad E_k[R(i\delta_n, x)] = E_{kn}^-$$

$$F_k[B(\varepsilon, x)] = F_k{}^*, \quad F_k[B(i\delta_n, x)] = F_{kn}^+, \quad F_k[R(i\delta_n, x)] = F_{kn}^-$$

Предполагая, наконец, линейную независимость функций $B(i\gamma_k, x)$ и $R(i\gamma_k, x)$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, получим для определения постоянных C_n и D_n, входящих в решение (1.10) парного уравнения (1.3), две бесконечные алгебраические системы первого рода

$$K^{-1}(\varepsilon) E_k{}^* + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n E_{kn}^+ + D_n F_{kn}^+) = 0 \tag{1.14}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$K^{-1}(\varepsilon) F_k{}^* + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n E_{kn}^- + D_n F_{kn}^-) = 0$$

Далее, при рассмотрении конкретных примеров, будем строить системы (1.14) путем непосредственного вычисления интегралов в (1.12).

2. Парные интегральные уравнения, порождаемые интегральными преобразованиями Конторовича — Лебедева и Мелера — Фока. Если предположить, что в (1.1)

$$L = x^2 - x^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}, \quad 0 < x < \infty \tag{2.1}$$

то в интегральном преобразовании (1.2) функции $B(u, x)$ и $M(u, \xi)$ примут вид

$$B(u, x) = K_{iu}(x), \quad M(u, \xi) = 2u\pi^{-2}\operatorname{sh}\pi u \xi^{-1} K_{iu}(\xi) \tag{2.2}$$

где $K_{iu}(x)$ — функция Макдональда. Полученное в этом случае преобразование (1.2), (2.2) будет интегральным преобразованием Конторовича — Лебедева. Им порождаемое парное интегральное уравнение (1.3), согласно п. 1, может быть приведено к соотношению (1.12), в котором

$$\varphi(u, x) = \frac{2u \operatorname{sh} \pi u}{\pi^2} \int_a^b K_{-x}(\xi) K_{iu}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \tag{2.3}$$

$$\psi(u, x) = \frac{2u \operatorname{sh} \pi u}{\pi^2} \int_a^b I_{-x}(\xi) K_{iu}(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

($I_{-x}(\xi) = R(ix, \xi)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента), а решение этого парного интегрального уравнения можно представить в виде (1.10).

Преобразуем соотношения (1.12) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_n и D_n разложения (1.8), для этого вычислим интегралы в (2.3) и в (1.12). Интегралы в (2.3) вычисляются с помощью известных соотношений [7]. Вычисление интегралов в (1.12) можно свести к вычислению интеграла вида

$$S(x, d) = \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\tau^2 + \gamma_k^2} K_{i\tau}(x) K_{i\tau}(d)\, d\tau \tag{2.4}$$

Используя интегральные представления

$$K_{i\tau}(x) = \operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \cos(x \operatorname{ch} s)\cos\tau s\, ds$$

$$K_{i\tau}(x) = \operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} y)\sin\tau y\, dy$$

$$I_{i\tau}(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}\int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} y)\, e^{-i\tau y}\, dy$$

вычислим интеграл (2.5) для любых γ_k

$$S(x, d) = \begin{cases} {}^1/_2\pi^2 I_{\gamma_k}(x) K_{\gamma_k}(d), & 0 < x < d \\ {}^1/_2\pi^2 K_{\gamma_k}(x) I_{\gamma_k}(d), & d < x < \infty \end{cases}$$

При $\gamma_k = k\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$ это значение совпадает с известным (см. [8], стр. 131).

Подставляя таким образом вычисленные значения функций $T_k(x, \mu)$ и $U_k(x, \mu)$ из (1.12) в первое соотношение (1.12) и приравнивая нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях $K_{\gamma_k}(x)$ и $I_{\gamma_k}(x)$, получим бесконечную систему для определения неизвестных C_n и D_n

$$\begin{aligned}
&\frac{K^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \gamma_k^2}\left[K_{i\varepsilon}'(b) K_{\gamma_k}(b) - K_{i\varepsilon}(b) K'_{\gamma_k}(b)\right] + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \frac{C_n}{\delta_n^2 - \gamma_k^2}\left[K'_{-\delta_n}(b) K_{\gamma_k}(b) - K_{-\delta_n}(b) K'_{\gamma_k}(b)\right] + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \frac{D_n}{\delta_n^2 - \gamma_k^2}\left[I'_{-\delta_n}(b) K_{\gamma_k}(b) - I_{-\delta_n}(b) K_{\gamma_k}(b)\right] = 0 \\
&\frac{K^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \gamma_k^2}\left[K_{i\varepsilon}'(a) I_{\gamma_k}(a) - K_{i\varepsilon}(a) I'_{\gamma_k}(a)\right] + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \frac{C_n}{\delta_n^2 - \gamma_k^2}\left[K'_{-\delta_n}(a) I_{\gamma_k}(a) - K_{-\delta_n}(a) I'_{\gamma_k}(a)\right] + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty \frac{D_n}{\delta_n^2 - \gamma_k^2}\left[I'_{-\delta_n}(a) I_{\gamma_k}(a) - I_{-\delta_n}(a) I'_{\gamma_k}(a)\right] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Аналогичная бесконечная система была получена в работе [6] другим способом. Там же последняя приведена к бесконечной системе второго рода, для которой построено нулевое приближение при $|\delta_n| \to \infty$ и $|\gamma_k| \to \infty$.

Если предположить, теперь, что в (1.1)

$$L = (1-y^2)\frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy} - \frac{m^2}{1-y^2} - \frac{1}{4}, \quad y = \operatorname{ch} x, \ 0 \leqslant x < \infty$$

то в интегральном преобразовании (1.2) функции $B(u, x)$ и $M(u, \xi)$ примут вид

$$B(u,x) = P^m_{-1/2+iu}(\operatorname{ch} x), \qquad M(u,\xi) = u \operatorname{th} \pi u P^{-m}_{-1/2+iu}(\operatorname{ch}\xi) \tag{2.5}$$

где $P^m_{-1/2+iu}(\operatorname{ch} x)$ — функция Лежандра. Полученное в этом случае преобразование (1.2), (2.5) будет интегральным преобразованием Мелера — Фока. Им порождаемое парное интегральное уравнение (1.3) при $a = 0$ принимает вид

$$\int_0^\infty Q(\tau) K(\tau) P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\, d\tau = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant b \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty Q(\tau) P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\, d\tau = 0, \quad b < x < \infty$$

Согласно п. 1, его решение может быть построено в виде

$$Q(u) = u \operatorname{th} \pi u \int_0^b q(\xi) P^{-m}_{-1/2+iu}(\operatorname{ch}\xi) \operatorname{sh}\xi d\xi \tag{2.7}$$

$$q(x) = \frac{P_2(L)}{AP_1(L)} f(x) + \sum_{n=1}^\infty [C_n P^m_{-1/2-\delta n}(\operatorname{ch} x) + D_n Q^m_{-1/2-\delta n}(\operatorname{ch} x)]$$

$$0 \leqslant x \leqslant b$$

Накладывая на функцию $q(x)$ условия ограниченности при $x = 0$ и учитывая, что $Q^m_{1/2-\delta n}(\operatorname{ch} x)$ при $x = 0$ имеет логарифмическую особенность, положим $D_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Для дальнейшего будем считать $m = 0$, так как парное уравнение (2.6) при $m \neq 0$ может быть приведено [9], с использованием соотношения

$$P^m_{-1/2+i\tau}(x) = (x^2-1)^{m/2} \frac{d^m P_{-1/2+i\tau}(x)}{dx^m} \tag{2.8}$$

к парному уравнению (2.6) при $m = 0$.

Преобразуем выражение (1.12) к бесконечной алгебраической системе относительно неизвестных C_n разложения (2.7), для этого вычислим $\varphi(u, x)$ из (1.10) и $T_k(x, \mu)$ из (1.12). Имеем

$$\varphi(u,x) = u \operatorname{th} \pi u \int_0^b P_{-1/2-x}(\operatorname{ch} y) P_{-1/2+iu}(\operatorname{ch} y) \operatorname{sh} y\, dy = \tag{2.9}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} b}{x^2+u^2} [P_{-1/2+iu}(\operatorname{ch} b) P^1_{-1/2-x}(\operatorname{ch} b) -$$

$$- P_{-1/2-x}(\operatorname{ch} b) P^1_{-1/2+iu}(\operatorname{ch} b)] u \operatorname{th} \pi u$$

Вычисление функции $T_k(x, \mu)$ с использованием (2.9) сводится к вычислению интегралов вида

$$S_1(x, b) = \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau}{\tau^2 + \gamma_k^2} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b)\, d\tau$$

Последний можно вычислить, используя интегральные представления [9] функций $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)$ и $Q_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} b)$. Имеем

$$S_1(x, b) = \begin{cases} P_{-1/2-\gamma_k}(\operatorname{ch} x)\, Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b), & x < b \\ Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} x)\, P_{-1/2-\gamma_k}(\operatorname{ch} b), & b < x \end{cases}$$

Подставляя таким образом найденную функцию $T_k(x, \mu)$ в первое соотношение (1.12) и приравнивая нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях $P_{-1/2-\gamma_k}(\operatorname{ch} x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, получим бесконечную систему относительно неизвестных C_n

$$\frac{K^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \gamma_k^2} [P_{-1/2+i\varepsilon}(\operatorname{ch} b)\, Q^1_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b) - P^1_{-1/2+i\varepsilon}(\operatorname{ch} b)\, Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b)] +$$
$$+ \sum_{n=1}^\infty \frac{C_n}{\delta_n^2 - \gamma_k^2} [P^1_{-1/2-\delta_n}(\operatorname{ch} b)\, Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b) -$$
$$- P_{-1/2-\delta_n}(\operatorname{ch} b)\, Q^1_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b)] = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

В этой системе введем новые неизвестные

$$x_n = -i\sqrt{\pi} C_n [\sqrt{2 \operatorname{ch} b}\, \delta_n Q_{-1/2+\delta_n}(\operatorname{ch} b)]^{-1}$$

Тогда она принимает вид

$$BX = D, \quad X = \| x_n \| \tag{2.10}$$

$$B = \| b_{kn} \| = \left\| \frac{i\delta_n \Gamma(\gamma_k + 1)\, Q_{-1/2+\delta_n}(\operatorname{ch} b)\, \pi^{-1/2}}{(\delta_n^2 - \gamma_k^2)\, \Gamma(\gamma_k + 1/2)\, (2 \operatorname{ch} b)^{-\gamma_k - 3/2}} [P^1_{-1/2-\delta_n}(\operatorname{ch} b) \times \right.$$
$$\left. \times\, Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b) - P_{-1/2-\delta_n}(\operatorname{ch} b)\, Q^1_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b)] \right\|$$

$$D = \| d_k \| = \left\| \frac{-K^{-1}(\varepsilon)\, \Gamma(\gamma_k + 1)\, (2 \operatorname{ch} b)^{\gamma_k + 1}}{(\varepsilon^2 + \gamma_k^2)\, \Gamma(\gamma_k + 1/2)} [P_{-1/2+i\varepsilon}(\operatorname{ch} b) \times \right.$$
$$\left. \times\, Q^1_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b) - P^1_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b)\, Q_{-1/2+\gamma_k}(\operatorname{ch} b)] \right\|$$

Можно проверить, что при $b \to \infty$ матрица B стремится к матрице $A = \| (i\gamma_k - i\delta_n)^{-1} \|$

Используя обратную матрицу A^{-1} [1], систему (2.10) можно привести к виду

$$X = A^{-1}(A - B) X + A^{-1} D \tag{2.11}$$

Решение системы (2.11) можно построить методом последовательных приближений при больших b.

При $b \to \infty$ система (2.10) принимает вид

$$AX = D^\circ, \quad D^\circ = \lim_{b\to\infty} D = \left\| \frac{K^{-1}(\varepsilon)\,\Gamma(i\varepsilon)\,(2\operatorname{ch} b)^{i\varepsilon}}{(\gamma_k - i\varepsilon)\,\Gamma(i\varepsilon + {}^1/{}_2)} \right\|$$

Ее решение [1]

$$x_n = \frac{i\Gamma(i\varepsilon)\,(2\operatorname{ch} b)^{i\varepsilon}}{K_+(-\varepsilon)\,\Gamma(i\varepsilon + {}^1/{}_2)\,(i\delta_n + \varepsilon)\,K_+'(-i\delta_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.12}$$

$$K(u) = K_+(u)\,K_-(u)$$

Здесь $K_+(u)$ и $K_-(u)$ — регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскости функции.

Выражение (2.12) будет, очевидно, главным членом асимптотики решения уравнения (2.10) при $b \to \infty$.

Второе выражение из (2.7) при $b \to \infty$ принимает вид

$$q(x) = K^{-1}(\varepsilon)\,P_{-{}^1/{}_2+i\varepsilon}(\operatorname{ch} x) - \frac{\Gamma(i\varepsilon)\,(2\operatorname{ch} b)^{i\varepsilon+{}^1/{}_2}}{\sqrt{\pi}K_+(-\varepsilon)\,\Gamma(i\varepsilon + {}^1/{}_2)} \times \tag{2.13}$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n Q_{-{}^1/{}_2+\delta_n}(\operatorname{ch} b)\,P_{-{}^1/{}_2-\delta_n}(\operatorname{ch} x)}{(i\delta_n + \varepsilon)\,K_+'(-i\delta_n)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant b$$

3. Примеры. Положим в парном интегральном уравнении (2.6)

$$K(\tau) = \tau^{-1}\operatorname{th}\gamma\tau, \quad f(x) = P_{-{}^1/{}_2+i\varepsilon}(\operatorname{ch} x), \quad m = 0$$
$$\varepsilon = -i\,(l + {}^1/{}_2), \quad b = 1,\ 2,\ \ldots$$

Тогда

$$\delta_n = \pi n/\gamma, \qquad \gamma_k = \pi\,(2k + 1)/2\gamma$$
$$K_+'(-i\delta_n) = i\sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{{}^3/{}_2} \frac{2^n\,(n-1)!}{(2n-1)!!}$$

Используя асимптотику функций Лежандра при большом аргументе, нетрудно убедиться, что ряд в (2.13) сходится при $0 \leqslant x < b$, расходится при $x = b$ и (2.13) можно преобразовать к виду с явно выделенной особенностью, что важно для приложений. Имеем

$$q_l(x) = K^{-1}\left[-i\left(l + \frac{1}{2}\right)\right] P_l(\operatorname{ch} x) + \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)(2\operatorname{ch} b)^{l+1} \times \tag{3.1}$$
$$\times \Gamma\left[1 + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right] \left\{2\gamma\Gamma(l+1)\,\Gamma\left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right] \sqrt{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} x}\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left[1 - \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} b}\right)^{\pi/\gamma}\right]^{-{}^1/{}_2} + \frac{\gamma\,(2l+1)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{\gamma\,(2l+1)}{2\pi}\right]^{-1} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} b}\right)^{\pi n/\gamma}\right\}$$

Бесконечная сумма в (3.1) сходится теперь при $0 \leqslant x \leqslant b$.

1°. Рассмотрим смешанную задачу теории упругости о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель с внутренним и внешним радиусами c и d соответственно и действующими на бесконечности перпендикулярно плоскости щели силами интенсивности p.

Как известно [10], эта задача может быть сведена к парному интегральному уравнению (2.6), в котором (r — расстояние от оси симметрии)

(3.2) $$K(\tau) = \tau^{-1} \operatorname{th} \pi\tau, \quad f(x) = (1 + \operatorname{ch} x)^{-1}, \operatorname{ch} x = \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}, \operatorname{ch} b = \frac{d^2 + c^2}{d^2 - c^2}$$

Напряжения в плоскости кольцевой трещины при $r < c$ [10]

$$\sigma_z(r) = 2\sqrt{2}\, p\, (1 + \operatorname{ch} x)^{3/2} \pi^{-1} q(x)$$

Аппроксимируем функцию $f(x)$ из (3.2) выражением

(3.3) $$(1 + \operatorname{ch} x)^{-1} = \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l P_l (\operatorname{ch} x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant b$$

Тогда при $b \to \infty$ ($c \to d$) приближенное значение $\sigma_z(r)$ найдем по формуле

(3.4) $$\sigma_z(r) = 2\sqrt{2}\, p\, (1 + \operatorname{ch} x)^{3/2} \pi^{-1} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l q_l(x)$$

где $q_l(x)$ есть (3.1) при $\gamma = \pi$.

Критическое значение p^* растягивающих усилий на бесконечности, при которых трещина начнет увеличиваться, найдем из условия [10] (K — модуль сцепления материала)

$$p_* = K\pi^{-1} \lim_{r \to c} [\sqrt{c - r}\, \sigma_z{}^*(r)]^{-1}, \qquad \sigma_z(r) = p\sigma_z{}^*(r)$$

На основании (3.4) имеем

(3.5) $$p_* = \frac{K}{\sqrt{b}} \left[\left(1 - \left(\frac{c}{d}\right)^4\right) \frac{d(1 + \operatorname{ch} b)^3}{2c} \right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l \frac{(2l-1)!!\,(2l+1)!!}{(l!)^2} \left(\frac{\operatorname{ch} b}{2}\right)^l \right\}^{-1}$$

Формула (3.5) справедлива при значениях c, близких к d.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов β_l аппроксимации (3.3), найденные по способу наименьших квадратов при $N = 3$ для разных значений c / d. Последняя колонка содержит значения относительной погрешности такой аппроксимации в процентах.

Таблица 1

c / d	β_0	β_1	β_2	%
0.3	0.893	−0.466	0.0723	0.004
0.4	0.873	−0.437	0.0638	0.03
0.5	0.846	−0.400	0.0534	0.1
0.6	0.807	−0.351	0.0413	0.5

Ниже приведены значения $p_* \sqrt{b}/K$, подсчитанные по формуле (3.5) для разных значений c / d

$$c / d = 0.4 \qquad 0.5 \qquad 0.6$$

$$p_* \sqrt{b} / K = 0.796 \qquad 0.899 \qquad 0.990$$

Для сравнения укажем, что при $c / d = 0.6$ на основании результатов работы [11] $p_* \sqrt{b} / K = 0.922$.

2°. Рассмотрим задачу о кручении усеченного шара, с плоской поверхностью которого сцеплен круговой цилиндрический штамп радиуса c, а сферическая часть поверхности которого неподвижна. Пусть d — радиус сечения шара. Тогда задача может быть сведена (см. [9], стр. 390) к парному интегральному уравнению (2.6) при

$$K(u) = u^{-1} \operatorname{th} \gamma u, \qquad f(x) = (\operatorname{ch} x + 1)^{-1/2} \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}, \qquad \operatorname{ch} b = \frac{d^2 + c^2}{d^2 - c^2}, \quad \gamma = \arcsin \frac{d}{R}, \quad m = 1$$

где r — расстояние в плоскости сечения шара до оси симметрии, R—радиус шара, $\gamma \in [0, \pi]$ характеризует степень усечения шара. Используя соотношение (2.8), уравнение (2.6) в этом случае можно преобразовать к уравнению (2.6) при $m = 0$ и

$$f(x) = c_1 - 2(1 + \operatorname{ch} x)^{-1/2} \tag{3.6}$$

Здесь c_1 — постоянная, которую найдем в дальнейшем из условия интегрируемости касательных напряжений под штампом.

Касательные напряжения под штампом [9]

$$\tau_{\varphi z}(r) = -G\varepsilon(\operatorname{ch} x + 1)^{3/2} \frac{d}{dx} q(x), \qquad \operatorname{ch} x = \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2}$$

Аппроксимируем функцию (3.6) выражением

$$f(x) = c_1 P_0(x) - \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l P_l(x) \tag{3.7}$$

Тогда при $b \to \infty$ $(c \to d)$ приближенное значение $\tau_{\varphi z}(r)$ найдем по формуле

$$\tau_{\varphi z}(r) = -G\varepsilon(\operatorname{ch} x + 1)^{3/2} \left[c_1 q_0'(x) - \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l q_l'(x)\right] \tag{3.8}$$

где $q_l(x)$ есть (3.1). Можно убедиться, что (3.6) содержит неинтегрируемую особенность при $x = b$ $(r = c)$. Полагая нулю коэффициент при этой особенности, найдем постоянную c_1

$$c_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\pi}\right)\Gamma^{-1}\left(1 + \frac{\gamma}{2\pi}\right)\sum_{l=0}^{N-1} \beta_l (2l-1)!!(\operatorname{ch} b)^l \times$$
$$\times \Gamma\left[1 + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right]\left\{l!\,\Gamma\left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{-1}$$

Величина $q_l'(x)$ при этом принимает вид

$$q_l'(x) = \left(l + \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}^{-1}\left[\gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)\right]\frac{d}{dx} P_l(\operatorname{ch} x) + \tag{3.9}$$
$$+ \sqrt{\pi}\,(2l+1)!!\operatorname{th} x(\operatorname{ch} b)^{l+1}\,\Gamma\left[1 + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right] \times$$
$$\times\left\{2\gamma\sqrt{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} x}\,\Gamma\left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{-1}\left\{\left[1 - \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} b}\right)^{\pi/\gamma}\right]^{-1/2} +\right.$$
$$\left. + \frac{l\gamma!}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n - \frac{\gamma(2l+1)}{2\pi}\right]^{-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} b}\right)^{\pi n/\gamma}\right\}$$

Формула (3.6) для касательных напряжений под штампом, очевидно, справедлива при значениях c, близких к d.

В табл. 2 приведены значения коэффициентов β_l аппроксимации (3.7), найденные по способу наименьших квадратов при $N = 3$ для разных значений c / d. В последней колонке дано значение относительной погрешности такой аппроксимации в процентах,

Таблица 2

c / d	β_0	β_1	β_2	%
0.3	1.92	−0.589	0.0787	0.001
0.4	1.81	−0.562	0.0707	0.01
0.5	1.88	−0.526	0.0609	0.04
0.6	1.84	−0.478	0.0490	0.1

Таблица 3

γ	c / d	r / c				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
3.14	0.3	0.132	0.411	0.753	1.28	2.68
3.14	0.5	0.139	0.432	0.791	1.34	2.80
3.14	0.3	0.125	0.388	0.700	1.14	2.20
3.14	0.5	0.142	0.448	0.837	1.42	2.64
0.5	0.3	0.314	0.958	1.66	2.55	4.35
0.5	0.4	0.399	1.21	2.09	3.15	5.14
0.5	0.5	0.489	1.49	2.57	3.87	6.11
1.0	0.3	0.201	0.619	1.09	1.72	3.11
1.0	0.4	0.239	0.736	1.30	2.03	3.54
1.0	0.5	0.275	0.849	1.51	2.38	4.06
1.5	0.3	0.164	0.507	0.903	1.44	2.67
1.5	0.4	0.189	0.584	1.04	1.66	2.99
1.5	0.5	0.209	0.649	1.27	1.91	3.37
2.0	0.3	0.145	0.451	0.807	1.30	2.45
2.0	0.4	0.164	0.509	0.916	1.48	2.71
2.0	0.5	0.176	0.553	1.01	1.67	3.02
2.5	0.3	0.134	0.417	0.749	1.22	2.31
2.5	0.4	0.149	0.464	0.840	1.37	2.54
2.5	0.5	0.157	0.495	0.916	1.54	2.82

В табл. 3 приведены значения $\tau_{\varphi z}(r)(G\varepsilon)^{-1}$, подсчитанные по формулам (3.8), (3.9) для разных значений c / d, r / c и γ. В первых двух строках даны для сравнения значения $\tau_{\varphi z}(r)(G\varepsilon)^{-1}$ при $\gamma = \pi$, взятые из табл. 2 работы [12].

Поступила 29 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
3. *Бабешко В. А.* Об одном типе интегральных уравнений, возникающих в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
4. *Бабешко В. А.*, *Гарагуля В. А.* Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.
5. *Бабешко В. А.* К теории и приложениям некоторых интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 2.
6. *Бабешко В. А.*, *Беркович В. Н.* К теории смешанных задач для пространственного клина. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
7. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
8. *Бейтмен Г.*, *Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., «Наука», 1970.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
10. *Гринченко В. Т.*, *Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 10.
11. *Сметанин Б. И.* Задача о растяжении упругого пространства, содержащего плоскую кольцевую щель. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
12. *Александров В. М.*, *Чебаков М. И.* Смешанные задачи механики сплошных сред, связанных с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера — Фока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.