Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАССМОТРЕНИЯ ПАРЫ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. И. Шерман

(Москва)

Работа посвящена обращению двух сингулярных интегральных уравнений соответственно первого и второго рода определенной структуры. К этим уравнениям и разрешающим их формулам приходим на основе анализа одной конкретной смешанной задачи теории потенциала для квадранта.

1. Допустим, что разыскиваются две функции $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$, регулярные в правом верхнем квадранте, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на ограничивающих его лучах условиям

$$\varkappa\varphi_1(t) + \overline{\chi_1(t)} = f_1(t), \quad t = x, \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\chi_1(t)} = f_2(t); \quad t = iy, \quad 0 \leqslant y < \infty \tag{1.2}$$

При этом $\varkappa$, вообще говоря, — комплексный параметр, а заданные $f_1(t)$ и $f_2(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и на бесконечности имеют порядок $O(1/t)$. В дальнейшем, без потери общности будем считать $f_2(t) = 0$. К этому случаю придем, вычтя из искомого частное решение для правой полуплоскости при условии (1.2) на всей ее границе (и, в частности, нулевом значении $f_2(t)$ на отрицательной полуоси ординат).

Введем на луче $(0 \leqslant x < \infty)$ вспомогательную функцию $\omega(t)$

$$A\varphi_1(t) - \overline{\chi_1(t)} = 2\omega(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{1.3}$$

где A — некоторая комплексная постоянная. Складывая и вычитая почленно одно из другого равенства (1.1) и (1.3), получим

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{A+\varkappa}[2\omega(t) + f_1(t)] \tag{1.4}$$

$$\chi_1(t) = \frac{1}{\bar{A}+\bar{\varkappa}}[-2\bar{\varkappa}\,\overline{\omega(t)} + \bar{A}\overline{f_1(t)}]$$

Определим новые, регулярные в правом верхнем квадранте, функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ соотношениями

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-z}dt - \frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-z}dt \tag{1.5}$$

$$\chi(z) = \chi_1(z) + \frac{\bar{\varkappa}}{\bar{A}+\bar{\varkappa}}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt - \frac{\bar{A}}{\bar{A}+\bar{\varkappa}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{f_1(t)}}{t-z}dt$$

Эти функции аналитически продолжимы (сквозь положительную полуось) в правый нижний квадрант посредством формул

$$\varphi(z) = \frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-z}dt - \frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-z}dt \tag{1.6}$$

$$\chi(z) = \frac{\bar\varkappa}{\bar A+\bar\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt - \frac{\bar A}{\bar A+\bar\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{f_1(t)}}{t-z}dt$$

Внесем выражения для $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ из (1.5) в (1.1) и (1.3). Тогда, опираясь на формулу Сохоцкого — Племели и проделав несложные выкладки, получим (вдоль полуоси $x \geqslant 0$)

$$\varkappa\varphi(t_0) + \overline{\chi(t_0)} + \frac{2\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt = \frac{f_1(t_0)}{2} + \frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt \tag{1.7}$$

$$A\varphi(t_0) - \overline{\chi(t_0)} + \frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt + \frac{A}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt = \omega(t_0) \tag{1.8}$$

Соотношения (1.5) и (1.6) приводят для регулярных в правой полуплоскости функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ к такому условию на оси ординат:

$$\varphi(t_0) + \overline{\chi(t_0)} = -\frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt - \frac{\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t+t_0}dt - \tag{1.9}$$
$$-\frac{1}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt + \frac{A}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt$$

Добавив к этому уравнению сопряженное, после элементарных операций найдем

$$\varphi(z) = \frac{\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t+z}dt + \frac{A}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t+z}dt \tag{1.10}$$

$$\chi(z) = \frac{1}{\bar A+\bar\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{\omega(t)}}{t+z}dt + \frac{1}{\bar A+\bar\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t+z}dt$$

Подставив отсюда значения $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ сначала в (1.7), а затем в (1.8), придем к паре сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода

$$\frac{2\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \omega(t)\left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\frac{1}{t+t_0}\right)dt = \tag{1.11}$$
$$= \frac{f_1(t_0)}{2} + \frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt + \frac{1-A\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t+t_0}dt$$

$$\omega(t_0) - \frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt - \frac{1-Ax}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t+t_0}dt = \tag{1.12}$$
$$= \frac{A}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt + \frac{1-A^2}{A+\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t+t_0}dt$$

Возьмем в последнем уравнении $A = 1/\varkappa$ и вспомогательную функцию, отвечающую этому значению параметра A, назовем $\delta(t)$. Для нее уравнение (1.12) существенно упрощается и вырождается в уравнение Карлемана

$$\delta(t_0) + \frac{\Delta}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\delta(t)}{t - t_0}\,dt = g(t_0), \qquad \Delta = \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 + 1} \tag{1.13}$$

$$g(t_0) = \frac{1}{1+\varkappa^2}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t - t_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t + t_0}\,dt \tag{1.14}$$

Заметим, что при $\varkappa = \pm 1$ из левой части (1.13) выпадает сингулярный интеграл, в связи с чем получается

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t - t_0}\,dt \pm \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t + t_0}\,dt$$

Зная $\delta(t)$ и обращаясь к соотношениям (1.4), найдем в замкнутой форме решения простейших основной и смешанной задач для квадранта

$$\varphi_1(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t - z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t + z}\,dt \tag{1.15}$$

$$\chi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{f_1(t)}}{t - z}\,dt \pm \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{f_1(t)}}{t + z}\,dt$$

Выпишем решение уравнения (1.13) (нетривиальное решение однородного уравнения опущено; в любой момент его легко ввести) [1, 2]

$$\delta(t_0) = \frac{1}{1-\Delta^2}g(t_0) - \frac{\Delta}{1-\Delta^2}\frac{1}{\pi i t_0^{\mu}}\int_0^\infty \frac{t^{\mu}g(t)}{t - t_0}\,dt, \quad \mu = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1-\Delta}{1+\Delta} \tag{1.16}$$

Здесь аргумент логарифма надо выбрать так, чтобы $-1 < \operatorname{Re}\mu < 1$, ибо только тогда (для всякого $t_0 \neq 0$) сохраняет смысл интеграл справа. Заметим, что когда величина $\operatorname{Re}\mu$ положительна, проще провести рассмотрение плотности $\delta(t)$; случай тождественного обращения в нуль величины $1 - \Delta^2$ опускается как особый и прямо не относящийся к стоящей в поле зрения темы. По найденной $\delta(t)$ (для $A = 1/\varkappa$) определим из (1.1) и (1.3) на вещественном луче $\varphi_1(t)$ и $\chi_1(t)$ и при помощи аналитического продолжения восстановим их в квадранте S. Кстати, для них получаются весьма наглядные выражения. Действительно, подставив $g(t)$ из равенства (1.14) в (1.16) и подсчитав внутренний интеграл в появившемся кратном интеграле, по изменении порядка интегрирования, найдем для вспомогательной функции вместо (1.16) более простую формулу

$$\omega(t_0) = -\frac{\varkappa^2 - 1}{4\varkappa^2}f_1(t_0) - \frac{\varkappa^2+1}{4\varkappa^2}\frac{t_0^{-\mu}}{\pi i}\int_0^\infty t^{\mu}f_1(t)\left(\frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{t + t_0}\right)dt \tag{1.17}$$

Опираясь на нее, придем к столь же простым по форме значениям искомых функций

$$(1.18)\qquad \varphi_1(z) = \frac{\varkappa^2+1}{4\varkappa^3}\frac{z^{-\mu}}{\pi i}\int_0^\infty t^\mu f_1(t)\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t+z}\right)dt$$

$$\chi_1(z) = \frac{\bar\varkappa^2+1}{4\bar\varkappa^2}\frac{z^{-\bar\mu}}{\pi i}\int_0^\infty t^{\bar\mu}\overline{f_1(t)}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t+z}\right)dt$$

Они тождественно удовлетворяют основным условиям на краях квадранта (в этом можно убедиться, учитывая, что $\exp(\pi i\mu) = \varkappa^{-1}$).

2. Вернемся к уравнениям (1.11) и (1.12) и, полагая $A \neq 1/\varkappa$ и $A^2 + 1 \neq 0$, заменим в них плотность $\omega(t)$ на $\omega^*(t)$ по формулам

$$(2.1)\qquad \omega^*(t) = \omega(t) - \frac{A\varkappa-1}{2(\varkappa^2+1)}f_1(t),\qquad \omega^*(t) = \omega(t) + \frac{1+A^2}{2(1-A\varkappa)}f_1(t)$$

Тогда эти уравнения с заметно упрощенными правыми частями станут соответственно такими:

$$(2.2)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \omega^*(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\frac{1}{t+t_0}\right]dt =$$

$$= \frac{A+\varkappa}{4\varkappa}\left[f_1(t_0) - \frac{\varkappa^2-1}{\varkappa^2+1}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt\right]$$

$$(2.3)\qquad \omega^*(t_0) - \frac{1}{(A+\varkappa)\pi i}\int_0^\infty \omega^*(t)\left[\frac{A-\varkappa}{t-t_0} + \frac{1-A\varkappa}{t+t_0}\right]dt =$$

$$= \frac{1+A^2}{2(1-A\varkappa)}\left[f_1(t_0) + \frac{1-A^2}{1+A^2}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt\right]$$

Отметим, что в первом уравнении остается допустимым переход к значению $A = 1/\varkappa$, при котором $\omega^*(t) = \omega(t)$.

Естественна попытка решить уравнение первого рода

$$(2.4)\qquad \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \mu(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \lambda\frac{1}{t+t_0}\right]dt = f(t_0)$$

и вслед за ним уравнение второго рода

$$(2.5)\qquad \mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \mu(t)\left[\frac{B}{t-t_0} + \frac{C}{t+t_0}\right]dt = f(t_0)$$

связывая каждое из них с краевой задачей (1.1), (1.2). Здесь λ, B и C — известные, вообще говоря, комплексные постоянные, $f(t)$ — любая заданная функция.

В соответствии с выполненным ранее преобразованием, решения уравнений (1.11), (1.12) и (2.2), (2.3) подчинены соотношению (2.1), где $\omega(t)$, в свою очередь, легко увязывается с $\delta(t)$, подсчитываемой по формуле (1.13). С другой стороны, ясно, что решение особого уравнения (2.5) (более сложного по своей структуре) тождественно совпадает с плотностью $\omega^*(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.3), если при заданных коэффициентах B, C и свободном члене $f(t)$ параметр $\varkappa$ и функция $f(t)$ (их можно причислить к исчерпывающим характеристикам отправной краевой задачи), а также A будут найдены из соотношений [1]

$$B = -\frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}, \quad C = -\frac{1-A\varkappa}{A+\varkappa}$$

$$f_1(t_0) + \frac{1-A^2}{1+A^2}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt = \frac{2(1-A\varkappa)}{1+A^2}f(t_0)$$

Как видно, выполнение этих соотношений ведет к идентичности уравнений (2.3) и (2.5).

Следует отметить еще возможность непосредственного и обособленного анализа уравнения первого рода (2.4). Взяв $A = 1/\varkappa$ в (2.2), что правомерно и влечет за собой превращение $\omega^*(t)$ в $\delta(t)$, а затем выбирая параметр $\varkappa$ и функцию $f(t)$ в уравнении (2.4) сообразно условиям

$$\lambda = \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}, \quad f_1(t) - \frac{\varkappa^2-1}{\varkappa^2+1}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt = \frac{4\varkappa^2}{1+\varkappa^2}f(t_0)$$

придадим ему такой же вид, как уравнению (2.2). В силу этого решение уравнения (2.4) совпадет, вообще говоря, со значением плотности, даваемой формулой (1.16) (либо будет отличаться от нее, самое большее, на нетривиальные решения однородного интегрального уравнения (1.13); точно так же соотносятся между собой решения сопоставленных уравнений второго рода).

3. Остановимся более подробно на сингулярном уравнении первого рода

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \omega(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \lambda\frac{1}{t+t_0}\right]dt = f(t_0), \qquad 0 < t_0 < \infty \tag{3.1}$$

Пусть в нем свободный член по-прежнему убывает на бесконечности, не медленней $O(1/t)$; чтобы упростить процедуру решения, параметр λ примем вещественным, не превосходящим единицы, так что $\lambda = \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; положим еще $\alpha = 1 - \theta/\pi \leqslant 1$.

По выполнении намеченного процесса удостоверимся, что уравнение (3.1) обладает решениями двоякого рода, назовем их $\omega(t)$ и $\mu(t_0)$; окончательные выражения для них находятся в замкнутой форме

$$\omega(t_0) = t_0^\alpha \int_0^\infty t^{-\alpha}f(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t+t_0}\right]dt + \\ + t_0^{-\alpha}\int_0^\infty t^\alpha f(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t+t_0}\right]dt \tag{3.2}$$

[1] Аналогичный прием был использован [3] при изучении сингулярных уравнений иной структуры.

$$\mu(t_0)=t_0^{\frac{\theta}{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{\theta}{\pi}}f(t)\left[\frac{1}{t-t_0}+\frac{1}{t+t_0}\right]dt+$$
$$+t_0^{-\frac{\theta}{\pi}}\int_0^\infty t^{\frac{\theta}{\pi}}f(t)\left[\frac{1}{t-t_0}+\frac{1}{t+t_0}\right]dt$$

Заметим, что первое из этих решений непрерывно в начале координат, а второе, как правило, претерпевает в нем разрыв. Между тем плотность $\omega(t)$ убывает на бесконечности, вообще говоря, медленнее, чем можно было бы ожидать, а именно — как $O(t^{-(1-\beta)})$. В то же время в удаленной части области решение $\mu(t)$ будет порядка $O\mid t^{-(1+\gamma)}\mid$, где γ, как и β, — положительные числа, заведомо меньшие единицы. В справедливости формул (3.2) можно удостовериться прямым путем, подставив значения плотностей в интегральное уравнение (3.1). После некоторых довольно громоздких выкладок, убедимся, что в каждом случае это уравнение тождественно удовлетворится. При этом понадобятся следующие формулы преобразования встречающихся двойных интегралов в однократные:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t_1^{\mp\alpha}f(t_1)\frac{dt_1}{t_1-t}=\frac{1}{2}f(t_0)\pm$$
$$\pm i\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(t_0^{\pm\alpha}t^{\mp\alpha}-1)f(t)\frac{dt}{t-t_0}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\frac{dt}{t-t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t_1^{\mp\alpha}f(t_1)\frac{dt_1}{t_1+t}=$$
$$=\pm i\frac{1}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(\cos\pi\alpha t_0^{\pm\alpha}t^{\mp\alpha}-1)f(t)\frac{dt}{t+t_0}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\frac{dt}{t+t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t_1^{\mp\alpha}f(t_1)\frac{dt_1}{t_1-t}=$$
$$=\pm i\frac{1}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(t_0^{\pm\alpha}t^{\mp\alpha}-\cos\pi\alpha)f(t)\frac{dt}{t+t_0}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\frac{dt}{t+t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t_1^{\mp\alpha}f(t_1)\frac{dt_1}{t_1+t}=$$
$$=\pm i\frac{1}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty(t_0^{\pm\alpha}t^{\mp\alpha}-1)f(t)\frac{dt}{t-t_0}$$

Плотности (3.2) дополним по очереди слагаемыми вида $C_1t_0^{-(1-\alpha)}$ и $C_2t_0^{-(1-\alpha)}$, представляющими собой решения однородного уравнения (3.1). Тогда, выразив одну из постоянных C_1 и C_2 через другую (в зависимости также и от некоторых функционалов, связанных с $f(t)$), приведем к полному совпадению видоизмененные выражения для плотностей (правда, при этом необходимо будет выполнить достаточно сложные преобразования).

Примечание 1. Разрешающие формулы (3.2) по своей структуре остаются неизменными и пригодными также и тогда, когда интегрирование в уравнении (3.1), а стало быть, и в формулах (3.2), ведется вдоль полубесконечной линии, расположенной либо в первом, либо в четвертом квадранте,— или пожалуй, еще шире, либо поверху, либо понизу луча $(0, \infty)$. Это видно из того, что ни в само уравнение (3.1), ни в отвечающие ему формулы (3.2), не входят величины, сопряженные как с плотностью $\omega(t)$, так и со свободным членом $f(t)$.

Проще всего убедиться в правильности сделанного утверждения, проведя для усложненного случая лобовой контроль формул обращения. Для этого плотность $\omega(t)$ в уравнении (3.1) (с модифицированным контуром интегрирования) следует заменить поочередно ее (аналогично же обновленным) выражением по любой из формул (3.2). После этого остается лишь проверить, что полученный таким образом повторный интеграл для всякого аффикса t_0, принадлежащего полубесконечной линии, тождественно обращается в задаваемый свободный член уравнения (3.1).

Примечание 2. Вновь обращаясь к первому из соотношений (1.4), перестроим уравнения (1.11) и (1.12) к форме, содержащей вместо вспомогательной функции $\omega(t)$ саму разыскиваемую функцию $\varphi_1(t)$. После элементарных выкладок получим

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \varphi_1(t)\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\frac{1}{t+t_0}\right)dt = \tag{3.3}$$

$$= \frac{1}{2\varkappa}\left[f_1(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt-\frac{\varkappa}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt\right]$$

$$\varphi_1(t_0)-\frac{A-\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t-t_0}dt-\frac{1-A\varkappa}{A+\varkappa}\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t+t_0}dt=$$

$$=\frac{1}{A+\varkappa}\left[f_1(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t-t_0}dt+\frac{A}{\pi i}\int_0^\infty \frac{f_1(t)}{t+t_0}dt\right]$$

Ясно, что значение функции $\varphi_1(z)$ полностью определяется из поставленной вначале краевой задачи и, следовательно, не должно зависеть от постоянной A, участвующей в качестве множителя в побочном условии (1.3), привлеченном единственно для выработки быть может не вполне стандартного приема изучения той же задачи. Это очевидное обстоятельство нашло свое отражение в первом уравнении (3.3), из которого выпадает постоянная A. Тем не менее, как это ни покажется странным, та же постоянная сохраняется во втором уравнении (3.3).

Разумеется, сказанное повышает интерес к выявившейся инвариантности относительно постоянной A тех решений уравнения (3.1), которые одновременно удовлетворяют исходным условиям (1.1) и (1.2). Такие и только такие решения отражает первое уравнение (3.3). Имея в виду только эти решения (3.1), продифференцируем обе части второго уравнения (3.3) по параметру A; тогда сразу придем к первому уравнению (3.3).

4. Продемонстрируем содержание формул (3.2) на примере, принимая свободный член $f(t) = [a/(a+t)]^n$, где n — любое целое положительное число и a — некоторая положительная постоянная. Этот пример позволяет оттенить отличительные черты поведения плотностей уравнения (3.1).

Имеют место следующие разложения (они сходятся в круге $|z+a| < a$ и различаются лишь знаком входящего в них степенного параметра):

$$z^{\pm\alpha} = e^{\pm\pi i\alpha}a^{\pm\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu C_{\pm\alpha}^{\nu}\left(\frac{z+a}{a}\right)^\nu \tag{4.1}$$

Выпишем их по отдельности для положительного и отрицательного параметра α и затем почленно перемножим. Тогда, сравнивая левую и правую части вновь составленного равенства, после преобразований получим такие формулы:

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_{\pm\alpha}^{\nu} C_{\mp\alpha}^{n-\nu} = 0, \qquad n \geqslant 1 \tag{4.2}$$

Заменим в них формально целое n на $n-k$, где $n > k$, а потом введем взамен ν новый индекс суммирования, равный $n-\nu$; после этого придем к равенствам

$$\sum_{\nu=k}^{n} C_{\pm\alpha}^{n-\nu} C_{\mp\alpha}^{\nu-k} = 0, \qquad n > k \tag{4.3}$$

К формулам (4.2), (4.3) присоединим еще одну пару разложений, справедливую в окрестности той же точки $z = -a$, которую опять получим из разложения (4.1), заменив в них α параметром θ/π. Затем сопоставим эти разложения, помня, что $\alpha = 1 - \theta/\pi$. В результате придем к группе соотношений такого рода:

$$C_{\alpha}^{\nu} = C_{-\theta/\pi}^{\nu} + C_{-\theta/\pi}^{\nu+1}, \quad (-1)^{\nu} C_{-\alpha}^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{\theta/\pi}^{k} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

$$C_{\theta/\pi}^{\nu} = C_{-\alpha}^{\nu} + C_{-\alpha}^{\nu-1}, \quad (-1)^{\nu} C_{-\theta/\pi}^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k C_{\alpha}^{k} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Выражения для плотностей (3.2), отвечающие намеченному свободному члену в уравнении (3.1), легко найти. Из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a+t}\right)^n \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{1-e^{\pm 2\pi i\alpha}}\left[z^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a+z}\right)^n - \right. \tag{4.5}$$

$$\left. - e^{\pm\pi i\alpha} a^{\pm\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} C_{\pm\alpha}^{n-\nu} \left(\frac{a}{a+z}\right)^{\nu}\right], \qquad \operatorname{Im} z > 0$$

очевидным образом получаем соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a+t}\right)^n \frac{dt}{t-t_0} =$$

$$= \pm\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left\{\cos\pi\alpha\, t_0^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^n - a^{\pm\alpha}\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} C_{\pm\alpha}^{n-\nu}\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^{\nu}\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a+t}\right)^n \frac{dt}{t+t_0} =$$

$$= \pm\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left\{t_0^{\pm\alpha}\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^n - a^{\pm\alpha}\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} C_{\pm\alpha}^{n-\nu}\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^{\nu}\right\}$$

Добавим к ним пару соотношений, отличающихся от последних лишь тем, что всюду в них место параметра α занимает θ / π. Имея все эти соотношения и обращаясь к формулам (3.2), придем к искомым величинам

$$\omega(t_0) = \frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left\{\left(\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}C_{-\alpha}^{n-\nu}\left[\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^{\nu}-\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^{\nu}\right]-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{t_0}{a}\right)^{-\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}C_{\alpha}^{n-\nu}\left[\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^{\nu}-\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^{\nu}\right]\right\} \tag{4.6}$$

$$\mu(t_0) = \frac{i}{2\sin\theta}\left\{\left(\frac{t_0}{a}\right)^{\frac{\theta}{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}C_{-\theta/\pi}^{n-\nu}\left[\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^{\nu}+\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^{\nu}\right]-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{t_0}{a}\right)^{-\frac{\theta}{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}C_{\theta/\pi}^{n-\nu}\left[\left(\frac{a}{a+t_0}\right)^{\nu}+\left(\frac{a}{a-t_0}\right)^{\nu}\right]\right\} \tag{4.7}$$

Внесем в особое уравнение (3.1) со свободным членом $f(t) = [a / (a + t)]^n$ выражения для плотностей из (4.6) и (4.7). Тогда, проделав ряд выкладок и основываясь на соотношениях (4.2) — (4.4), придем к заключению, что эти плотности на самом деле служат решениями уравнения (3.1) при взятой частной форме правой части.

Ясно, что решение (4.6) ограничено, и более того, принимает нулевое значение в точке $t = 0$. В то же время решение (4.7) претерпевает разрыв в той же точке. Разложение (4.6) вдали от начала луча состоит из совокупности слагаемых, содержащих в качестве множителей $t^{-(2n-1)\pm\alpha}$ ($n = 1, 2, \ldots$). В аналогичном же разложении плотности $\mu(t)$ выпадает слагаемое с $t^{-(1-\alpha)}$. Как видим, решения типа (4.6) и (4.7) качественно различны между собой. Однако решение (4.7), претерпевающее разрыв в начале координат, при должной фиксации постоянной C в добавляемом к нему нетривиальном решении однородного уравнения (3.1) целиком совпадет с ограниченным всюду решением (4.6). К такому выводу легко прийти, привлекая вспомогательные соотношения (4.2) и (4.3). Может показаться, что отмеченные свойства пары решений обусловлены единственно искусной конкретизацией свободного члена. Тем не менее следует полагать, что эти свойства типические, отражающие взаимосвязь решений вида (3.2) при любом свободном члене $f(t)$.

Итак, если плотность $\omega(t)$ ограничена в точке $t = 0$, то тем самым предопределяется ее поведение на бесконечности. Между тем может оказаться, что это не будет совместимо с требованием обеспечения нужного порядка убывания плотности в окрестности бесконечно удаленной точки. Поэтому привнесение в выражение (4.6), конечное при $t = 0$, слагаемого, уже неограниченного в этой же точке и удовлетворяющего однородному уравнению (3.1), поможет необходимым образом выправить поведение искомой плотности в соответствии с условиями задачи.

Поступила 30 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
3. *Шерман Д. И.* По поводу одного особого интегрального уравнения и его применения в некоторых задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Сер. механ., 1969, т. 22, № 3.