Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.529

КОНТИНУАЛЬНАЯ МЕХАНИКА МОНОДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЙ. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СУСПЕНЗИИ УМЕРЕННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Ю. А. Буевич, В. Г. Марков

(Москва)

Получены реологические соотношения, связывающие средние напряжения и моментные напряжения, а также силу и момент межфазового взаимодействия в макроскопическом течении суспензии мелких твердых сфер с кинематическими характеристиками течения, что позволяет замкнуть систему уравнений гидромеханики суспензий. Введены и вычислены коэффициенты вязкости и моментной вязкости суспензии.

Уравнения сохранения массы, импульса и момента импульса суспензии и ее фаз, рассматриваемых (с макроскопической точки зрения) как сосуществующие сплошные среды, были сформулированы в общей форме в [1]. Уравнения содержат неизвестные векторы и тензоры, характеризующие взаимодействие между указанными сплошными средами, а также напряжения и моментные напряжения, появляющиеся при их движении. Для замыкания уравнений сохранения все эти величины должны быть выражены через неизвестные переменные этих уравнений (средние концентрации суспензии, давление в жидкой фазе и скорости фаз), что представляет собой вторую из указанных в [1] основных проблем гидромеханики суспензий.

Ниже эта проблема решена при помощи теории типа теории самосогласованного поля. По-существу, эта теория представляет дальнейшее развитие и обобщение методов развивавшихся в работах [2–7]. Получены представления для всех указанных выше величин, которые могут рассматриваться как реологические уравнения состояния для суспензии, а также обсуждены выражения для различных коэффициентов в этих уравнениях и их зависимость от параметров фаз и частотного спектра течения.

1. Как следует из [1], для выражения неизвестных членов уравнений сохранения через наблюдаемые переменные, характеризующие макроскопическое движение суспензии, необходимо найти аналогичные представления для средних напряжений, действующих на поверхности отдельной частицы, причем усреднение в данном случае производится по большому числу частиц, находящихся в идентичных условиях. Поэтому естественно начать анализ с введения статистического ансамбля частиц (точнее их допустимых конфигураций в пространстве) и определения процедуры усреднения по ансамблю.

Прежде всего, таким же образом, как и в [8], введем функцию распределения для одной из N сферических частиц системы, такую, что вероятность нахождения центра этой частицы в элементе объема $d\mathbf{r}$ вблизи точки $\mathbf{r}$ есть $\varphi(t, \mathbf{r})d\mathbf{r}$. Ввведем также условную унарную функцию распределения $\varphi(t, \mathbf{r}\mid\mathbf{r}')$ нахождения центра частицы в точке $\mathbf{r}$ при условии, что в $\mathbf{r}'$ находится центр другой частицы. Фактически последняя величина представляет собой бинарную (двухчастичную) функцию распределения.

Аналогично, введем безусловную функцию распределения $\varphi(t, C_N)$ для ансамбля N частиц, где C_N обозначает набор векторов $\mathbf{r}^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, определяющих положения центров всех частиц, и соответствующие условные функции распределения $\varphi(t, C_{N-1} \mid \mathbf{r})$ и $\varphi(t, C_{N-2} \mid \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, отвечающие ситуациям, когда относительно одной или двух сфер системы известно, что их центры находятся в $\mathbf{r}$ или в $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ соответственно. Имеют место соотношения

$$\varphi(t, C_N) = \varphi(t, \mathbf{r})\,\varphi(t, C_{N-1} \mid \mathbf{r}) \tag{1.1}$$
$$\varphi(t, C_{N-1} \mid \mathbf{r}') = \varphi(t, \mathbf{r} \mid \mathbf{r}')\,\varphi(t, C_{N-2} \mid \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Введем операции усреднения по ансамблю при помощи определений

$$\langle F \rangle = \langle F \rangle_N = \int F(t, \mathbf{r}; C_N)\,\varphi(t, C_N)\,dC_N \tag{1.2}$$
$$\langle F \rangle' = \langle F \rangle_{N-1}' = \int F(t, \mathbf{r}; C_N)\,\varphi(t, C_{N-1} \mid \mathbf{r}')\,dC_{N-1}$$
$$\langle F \rangle'' = \langle F \rangle_{N-2}'' = \int F(t, \mathbf{r}; C_N)\,\varphi(t, C_{N-2} \mid \mathbf{r}', \mathbf{r}'')\,dC_{N-2}$$

где F — произвольная функция t и $\mathbf{r}$, зависящая от конфигурации частиц C_N, а dC_N понимается как элемент объема в $3N$-мерном пространстве, образованном радиус-векторами центров N частиц. Очевидно, что $\langle F \rangle$ есть функция t и $\mathbf{r}$, $\langle F \rangle'$ — функция t, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, а $\langle F \rangle''$ — функция t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$. Ясно, что

$$\langle F \rangle = \int \langle F \rangle'(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}')\,\varphi(t, \mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \tag{1.3}$$
$$\langle F \rangle' = \int \langle F \rangle''(t, \mathbf{r}; \mathbf{r}', \mathbf{r}'')\,\varphi(t, \mathbf{r}'' \mid \mathbf{r}')\,d\mathbf{r}''$$

В дальнейшем под средними величинами понимаем величины, получаемые именно усреднением по ансамблю в соответствии с (1.2). Усреднение по малому физическому объему (типа использованного в [1]) будет оговариваться особо.

Операции усреднения (1.2) и дифференцирования по независимой переменной $\mathbf{r}$ коммутируют, т. е.

$$\langle \partial F / \partial r_i \rangle = (\partial / \partial r_i)\,\langle F \rangle \tag{1.4}$$

и такие же коммутационные соотношения справедливы для условных средних в (1.2)

Далее, для функций F, характерное время изменения которых значительно меньше временного масштаба T функций распределения, приближенно справедливо следующее коммутационное соотношение:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \int \frac{\partial F}{\partial t}(t, \mathbf{r}; C_N)\,\varphi(t, C_N)\,dC_N = \frac{\partial}{\partial t} \int F(t, \mathbf{r}; C_N)\varphi(t, C_N)\,dC_N + \tag{1.5}$$
$$+ \int F(t, \mathbf{r}; C_N)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, C_N) \approx \frac{\partial}{\partial t}\langle F \rangle$$

Изменение функций распределения со временем обусловлено перераспределением большого числа частиц системы. Поэтому масштаб T должен быть значительно больше временного масштаба микроскопических величин, характеризующих течение на уровне отдельных частиц, определяемого скоростью изменения гидродинамической обстановки вблизи единичной частицы, так что для указанных величин соотношение (1.5) всегда выполняется. Временной масштаб τ соответствующих усредненных величин определяется скоростью изменения граничных условий, наложенных на суспензию. Ниже при исследовании нестационарных течений считаем

(1.6) $$T \gg \tau$$

В случае, когда это неравенство нарушается ($T \sim \tau$), процесс изменения течения со временем можно считать медленным и, как следует из анализа ниже, нестационарность макроскопического движения суспензии практически не влияет на формирование ее реологических свойств. Более подробное обсуждение соотношений между временными масштабами содержится в [1].

Далее считаем также, что пространственный масштаб L макроскопического течения значительно превосходит среднее расстояние между соседними взвешенными частицами, т. е.

(1.7) $$L \gg l \sim a\rho^{-1/3}$$

где $\rho(t, \mathbf{r})$ — объемная концентрация, а a — радиус частиц суспензии. Последнее представляет собой непременное условие применимости методов механики сплошных сред к описанию макроскопического поведения суспензий [1] и означает, что введенный ансамбль микроскопически однороден, т. е. можно выделить объем, содержащий большое число частиц, внутри которого функция $\varphi(t, \mathbf{r})$ практически не зависит от $\mathbf{r}$. Однако в макроскопическом отношении, т. е. на расстояниях, сравнимых с масштабом L, функция распределения $\varphi(t, \mathbf{r})$ в общем случае неоднородна. Связь между $\varphi(t, \mathbf{r})$ и введенными в [1] средними объемной $\rho(t, \mathbf{r})$ и счетной $n(t, \mathbf{r})$ концентрациями частиц определяется соотношениями

(1.8) $$n(t, \mathbf{r}) = N\varphi(t, \mathbf{r}), \qquad \rho(t, \mathbf{r}) = {}^4/_3\pi a^3 N\varphi(t, \mathbf{r})$$

Для любой случайной функции $F(t, \mathbf{r};\ C_N)$, существенно зависящей от положения многих частиц, введем условие «ослабления корреляций». А именно, считаем, что условные средние $\langle F\rangle'$ и $\langle F\rangle''$, вычисляемые для конфигураций, когда центры одной или двух частиц зафиксированы в точках $\mathbf{r}'$ или $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, асимптотически стремятся к соответствующей безусловной средней $\langle F\rangle$ при неограниченном увеличении расстояний между точкой $\mathbf{r}$ и центрами зафиксированных частиц. Таким образом,

(1.9) $$\lim \langle F\rangle'' = \lim \langle F\rangle' = \langle F\rangle, \qquad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}''| \to \infty$$

Физически это означает, например, что средние значения скорости или давления жидкости в некоторой точке практически не зависят от состояния частиц, находящихся достаточно далеко от этой точки. В действительности условие (1.9) начинает выполняться, когда $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|$ превышают «масштаб взаимодействия» L_i в системе, который без нарушения общности можно считать величиной порядка L. Как известно, условие (1.9) выполняется в большинстве случаев, представляющих практический интерес, за исключением движения в узких каналах с поперечным линейным размером порядка или меньше L_i, когда корреляции, обусловленные дальнодействующими взаимодействиями между взвешенными частицами, существенны и могут повести, например, к формированию «пробкового» режима течения в канале.

Неравенства (1.7) и (1.9) несколько ограничивают класс систем, к которым применим последующий анализ. Однако они всегда справедливы для определенного достаточно широкого класса суспензий и их течений.

Сделаем основное упрощающее допущение о структуре и свойствах введенного ансамбля. А именно, примем распределение частиц суспензии случайным, так что

$$\varphi(t, \mathbf{r} \mid \mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < 2a \\ \varphi(t, \mathbf{r}), & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > 2a \end{cases} \tag{1.10}$$

Как следует из обсуждения в [8], допущение о полной случайности возможных конфигураций C_N облака частиц (об одинаковом статистическом весе разных конфигураций) может строго выполняться лишь в условиях однородного течения при случайном же начальном распределении взвешенных частиц, а во всех остальных случаях гидродинамическое взаимодействие должно приводить к формированию нетривиальной отличной от (1.10) бинарной функции распределения, зависящей от свойств течения (пример последовательного расчета такой функции для потока простого сдвига содержится в [9]). Однако, с эвристической точки зрения, представление о системе со случайным некоррелированным расположением частиц можно рассматривать как первое приближение к реальным системам с выраженной микроструктурой, определяемой спецификой гидродинамического взаимодействия между частицами в том или ином потоке. Можно полагать, что результаты вычислений, основанных на гипотезе об отсутствии корреляций между положениями соседних частиц (за исключением условия непроницаемости частиц, отраженного в (1.10)), окажутся приближенно справедливыми и для широкого класса движений, когда сама эта гипотеза заведомо неверна. Свидетельством в пользу последнего утверждения может служить распространенное представление, подтверждаемое также экспериментами, что реологические параметры суспензии (например, ее эффективная вязкость) достаточно универсальны в том смысле, что они практически одинаковы для течений и суспензий разных типов и, следовательно, разной микроструктуры.

2. Естественный путь получения представлений для средних напряжений на поверхности частицы, необходимых для формулировки реологических уравнений состояния и замыкания системы уравнений сохранения, мог бы состоять в решении задачи об обтекании решетки частиц, расположенных в некоторый момент произвольным образом, неоднородным нестационарным потоком жидкости и в последующем усреднении выражений для напряжений, следующих из этого решения, по допустимым конфигурациям частиц в соответствии с (1.2).

Решение первой задачи в общем случае, когда концентрация частиц не мала и нельзя пренебречь их гидродинамическим взаимодействием, неизвестно и в настоящее время вряд ли может быть получено. Даже если частицы неподвижны (как, например, в стационарном зернистом слое), а число Рейнольдса, характеризующее их обтекание, мало, требуется удовлетворить условиям прилипания на многосвязной поверхности весьма сложной формы. Если к тому же частицы могут перемещаться, возникает специфическая «физическая» нелинейность — решение гидродинамической задачи существенно зависит от скоростей поступательного движения и вращения всех частиц, а последние определяются, в свою очередь, силами и моментами, действующими на частицы, т. е.

полями скорости и давления жидкости. В нестационарных условиях эти силы и моменты зависят также от истории движения. Кроме того, возникает дополнительная трудность, обусловленная появлением в процессе решения расходящихся интегралов [8]. Как показано ниже, эти трудности удается преодолеть, если обратить задачу и получить сначала уравнения, характеризующие обтекание частиц «в среднем», решение которых в окрестности пробной частицы суспензии позволит непосредственно найти искомые средние напряжения.

Прежде всего, сформулируем уравнения для движения жидкости в промежутках между частицами, формально определенные во всех точках пространства, занятого суспензией. Течение жидкости, которую считаем несжимаемой, между частицами управляется уравнениями Навье — Стокса

$$d_0(\partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \nabla\Sigma - d_0\nabla\Phi, \qquad \nabla\mathbf{V} = 0 \tag{2.1}$$

$$\Sigma = -P\mathbf{I} + 2\mu_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial V_i}{\partial r_j} + \frac{\partial V_j}{\partial r_i} \right\|, \quad \mathbf{I} = \|\delta_{ij}\|$$

Здесь $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ и $P(t, \mathbf{r})$ — микроскопические поля скорости и давления (для упрощения записи символ C_N не записан в качестве аргумента этих функций), а $\Phi(t, \mathbf{r})$ — потенциал внешних массовых сил. Чтобы распространить определение уравнений (2.1) на все пространство, введем функцию $\theta(t, \mathbf{r})$, равную единице в точках, занятых жидкостью, и нулю внутри частиц, и рассмотрим течение жидкости с плотностью $d_0\theta(t, \mathbf{r})$, в котором действует сила $\theta\nabla\Sigma$, обусловленная напряжениями (см. также [7]). При этом можно сохранить определение (2.1) микроскопического тензора напряжений $\Sigma(t, \mathbf{r})$, заменив в нем $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ на микроскопическую скорость суспензии $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$, совпадающую с $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ вне частиц и с истинной скоростью материала частиц внутри них. Уравнения движения такой жидкости имеют вид

$$d_0\theta(\partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \theta\nabla\Sigma - d_0\theta\nabla\Phi, \qquad \partial\theta/\partial t + \nabla(\theta\mathbf{V}) = 0 \tag{2.2}$$

и совпадают с (2.1) в пространстве между частицами.

Учитывая свойства (1.4) и (1.5) операции усреднения по ансамблю конфигураций и то, что $\nabla\Phi$ не изменяется при таком усреднении, получаем из (2.2) следующие усредненные уравнения:

$$d_0\langle\theta(\partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\rangle = \nabla\langle\theta\Sigma\rangle - \langle\Sigma\nabla\theta\rangle - d_0\langle\theta\rangle\nabla\Phi \tag{2.3}$$

$$\partial\langle\theta\rangle/\partial t + \nabla\langle\theta\mathbf{V}\rangle = 0$$

Все члены этих уравнений должны быть выражены через наблюдаемые величины, характеризующие макроскопическое движение суспензии. Для этой цели, используя метод работы [7], можно получить

$$\langle\theta\Sigma\rangle = -\langle\theta P\rangle\mathbf{I} + 2\mu_0\langle\mathbf{E}\rangle, \qquad \langle\mathbf{E}\rangle = \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial\langle C_i\rangle}{\partial r_j} + \frac{\partial\langle C_j\rangle}{\partial r_i} \right\| \tag{2.4}$$

Далее, из определения $\theta(t, r)$ следует

$$\nabla\theta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}|}\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{n}\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a)$$

где $\mathbf{r}^{(j)}$ — радиус-вектор центра j-й частицы, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали на поверхностях частиц, а суммирование производится по всем частицам в системе. Используя это выражение, концепцию неразличимости и статистической эквивалентности частиц ансамбля и первое соотношение (1.1), получаем

$$\langle \Sigma\nabla\theta\rangle = \sum_{j=1}^{N} \int \varphi(t, C_N)\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(j)}| - a)(\Sigma\mathbf{n})\,dC_N = \tag{2.5}$$
$$= N\int \varphi(t, \mathbf{r}')\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - a)(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n})\,d\mathbf{r}' =$$
$$= N\int d\mathbf{a}\int d\mathbf{r}'\varphi(t, \mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{a})\,(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n})$$

где $\mathbf{a}$ — вектор модуля a, соединяющий центр частицы с произвольной точкой на ее поверхности. Величина (2.5) описывает полную реакцию, оказываемую жидкостью на взвешенные частицы. Из чисто физических соображений аналогичные члены вводились в уравнения типа (2.3) и ранее [3-5].

Для окончательного определения связи усредненных членов в (2.3) с наблюдаемыми величинами используем условие эргодичности в следующей форме. Требуем, чтобы уравнения (2.3), описывающие среднее движение жидкой фазы суспензии, тождественно совпадали с аналогичными уравнениями, полученными в [1] при помощи усреднения по малому физическому объему суспензии. Последние имеют вид

$$d_0\varepsilon(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \nabla\boldsymbol{\sigma} - d_0\varepsilon\nabla\Phi - \mathbf{f}, \quad \partial\varepsilon/\partial t + \nabla(\varepsilon\mathbf{v}) = 0 \tag{2.6}$$
$$(\varepsilon = 1-\rho)$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ — средняя сила межфазового взаимодействия, отнесенная к единичному объему суспензии, $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{r})$ — тензор средних напряжений, определенный в [1] как

$$\boldsymbol{\sigma} = -\varepsilon p\mathbf{I} + 2\mu_0\mathbf{e} + n\int(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n}) * \mathbf{a}\,d\mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial c_i}{\partial r_j} + \frac{\partial c_j}{\partial r_i}\right\| \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, $p(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{c}(t, \mathbf{r})$— средние по объему скорость и давление жидкости и скорость суспензии соответственно [1], звездочка означает диадное умножение, а интегрирование проводится по поверхности частицы.

Сравнение (2.3) и (2.4) с (2.6) и (2.7) дает

$$\langle\theta\rangle = \varepsilon = 1-\rho, \quad \langle\theta\mathbf{V}\rangle = \langle\theta\mathbf{C}\rangle = \varepsilon\mathbf{v}, \quad \langle\mathbf{C}\rangle = \mathbf{c}, \quad \langle\theta P\rangle = \varepsilon p \tag{2.8}$$
$$\langle\mathbf{E}\rangle = \mathbf{e}, \quad \langle\theta(\partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\rangle = \varepsilon(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$$

Кроме того, имеем равенство

$$-\langle\Sigma\nabla\theta\rangle = \nabla n\int(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n}) * \mathbf{a}\,d\mathbf{a} - \mathbf{f} \tag{2.9}$$

Отметим, что соотношения такого типа постулируются во всех известных авторам работах на аналогичную тему (см., например, [3-8]). В частности, равенства (2.8), за исключением последнего, были записаны в явной форме в [7]. Соотношение (2.9) подробно рассмотрено ниже; одно из его следствий приводит к обычно используемому условию самосогласованности теории. Детальное обсуждение смысла гипотезы об эквивалентности усреднений по ансамблю и по объему дано в [10].

Ниже представят интерес также усредненные уравнения, описывающие (в среднем) обтекание некоторой выделенной (пробной) частицы суспензии. Эти уравнения получаются из (2.2) при помощи усреднения по условной функции распределения $\varphi(t, C_{N-1} | \mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор центра пробной частицы. При этом удобно использовать систему координат, связанную с центром пробной частицы, скорость которого в лабораторной системе отсчета есть $\mathbf{W}(t)$. Кроме того, считаем число Рейнольдса, характеризующее обтекание, малым. Линейный масштаб возмущений, вносимых в поток пробной частицей, имеет порядок a. Поэтому в соответствии с (1.6) и (1.7) при исследовании обтекания пробной частицы величину $\rho(t, \mathbf{r})$ можно считать независящей от координат и времени, т. е. рассматривать фактически обтекание частицы однородного облака, пористость которого равна мгновенному значению локальной пористости суспензии.

Допущение о случайности распределения частиц, отраженное в (1.10), приводит к следующему выражению для величины $\langle\theta\rangle'$:

$$\langle\theta\rangle' = \begin{cases} \theta^*(r^*), & a < |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < 3a \\ \varepsilon, & |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > 3a \end{cases}, \qquad r^* = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{2.10}$$

Функцию $\theta^*(r^*)$ можно вычислить, рассматривая геометрическую задачу о доле объема сферического слоя $(r^*, r^* + dr^*)$, занятой частицами при условии, что центры частиц распределены однородно в области $r > 2a$ таким образом, что в этой области такая доля равна $\rho = 1 - \varepsilon$. Очевидно, $\theta^*(a) = 1$ и $\theta^*(3a) = \varepsilon$, причем ε рассматривается здесь как константа.

Вводя относительную скорость жидкости $\mathbf{V}^*(t, \mathbf{r}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{W}(t)$ и учитывая малость числа Рейнольдса, в системе отсчета, связанной с центром пробной частицы, запишем вместо (2.2)

$$d_0(\partial/\partial t)(\theta\mathbf{V}^*) = \theta\nabla\Sigma - d_0\theta(\nabla\Phi + d\mathbf{W}/dt), \qquad \partial\theta/\partial t + \nabla(\theta\mathbf{V}^*) = 0 \tag{2.11}$$

Величина $\langle\mathbf{W}\rangle' = \mathbf{W}(t, \mathbf{r}')$ представляет собой среднюю скорость дисперсной фазы в точке $\mathbf{r}'$ и не зависит от $\mathbf{r}$. Если ввести дополнительно трансляционную скорость $\mathbf{W}^*(t, \mathbf{r})$ вещества частиц в произвольной точке $\mathbf{r}$, вычисляемую в используемой здесь координатной системе, то величина $\langle\mathbf{W}^*\rangle' = \mathbf{w}^*(t, \mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathbf{w}(t, \mathbf{r}')$ будет описывать среднюю скорость дисперсной фазы в точке $\mathbf{r}$ в указанной системе. Существенно, что линейный масштаб этой величины, равной нулю при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, совпадает с L и намного превосходит, согласно (1.7), масштаб a возмущений, вносимых в поток пробной частицей. Поэтому при исследовании обтекания пробной частицы (т. е. на расстояниях, малых по сравнению с L) можно принять

$$\mathbf{U}^* = \langle\theta\mathbf{V}^*\rangle' = \langle\theta\mathbf{V}^* + (1-\theta)\mathbf{W}^*\rangle' = \langle\mathbf{C}^*\rangle' = \langle\mathbf{C}\rangle' - \mathbf{w}(t, \mathbf{r}') \tag{2.12}$$

где $\mathbf{C}^*(t, \mathbf{r})$ — микроскопическая скорость суспензии в рассматриваемой системе координат, а также считать, что производные $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{r})$ по компонентам вектора r равны соответствующим производным от $\langle\mathbf{C}\rangle'$, т. е.

$$\partial\mathbf{U}^*/\partial r_i = \partial\langle\mathbf{C}\rangle'/\partial r_i \tag{2.13}$$

Усредняя (2.11) по условной функции распределения $\varphi(t, C_{N-1}|\mathbf{r}')$, используя (1.4) и определение (2.12), а также учитывая соотношение между линейными масштабами (1.7), получаем уравнения

$$d_0\partial\mathbf{U}^*/\partial t = \nabla\langle\theta\Sigma\rangle' - \langle\Sigma\nabla\theta\rangle' - d_0\langle\theta\rangle'\nabla\Psi, \quad \nabla\mathbf{U}^* = 0 \tag{2.14}$$
$$\Psi = \Phi + \mathbf{r}d\mathbf{w}/dt$$

где введен эффективный потенциал $\Psi(t, \mathbf{r})$ внешних массовых сил в используемой системе отсчета. Учитывая (2.12) и (2.13) и поступая аналогично предыдущему, имеем

$$\langle\theta\Sigma\rangle' = -\langle\theta\rangle' P^*\mathbf{I} + 2\mu_0\langle\mathbf{E}\rangle', \quad \langle\theta\rangle' P^* = \langle\theta P\rangle' \tag{2.15}$$
$$\langle\mathbf{E}\rangle' = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial U_i^*}{\partial r_j} + \frac{\partial U_j^*}{\partial r_i}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\langle C_i\rangle'}{\partial r_j} + \frac{\partial\langle C_j\rangle'}{\partial r_i}\right\|$$
$$\langle\Sigma\nabla\theta\rangle' = (N-1)\int\varphi(t, \mathbf{r}''|\mathbf{r}')\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-a)(\langle\Sigma\rangle''\mathbf{n})\,d\mathbf{r}''$$

В силу свойства (1.9), а также соотношений (2.8), (2.12) и (2.13) вдали от пробной частицы справедливы асимптотические равенства

$$\lim P^* = p, \quad \lim\mathbf{U}^* = \mathbf{c}-\mathbf{w} = \varepsilon(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \varepsilon\mathbf{u}, \quad \lim\langle\mathbf{E}\rangle' = \mathbf{e} \tag{2.16}$$
$$\lim\operatorname{rot}\mathbf{U}^* = \operatorname{rot}\mathbf{c} \qquad (|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty)$$

где $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ — средняя по объему относительная скорость жидкости. Эти соотношения описывают невозмущенное течение, каким оно было бы в точке $\mathbf{r}'$ при отсутствии пробной частицы.

Рассмотрим подробнее выражения для $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle$ из (2.5) и для $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle'$ из (2.15). Предпоследний интеграл в (2.5) представляет собой функцию точки $\mathbf{r}$, т. е. должен вычисляться при условии $\mathbf{r} = \mathrm{const}$. Фактически это — интеграл по возможным положениям центров сферических частиц, таких, что точка $\mathbf{r}$ оказывается лежащей на их поверхности [7]. Для получения физически понятной интерпретации величины $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle$ удобно разложить дельта-функцию в подынтегральном выражении последнего интеграла в (2.5) в ряд Тейлора по степеням компонент вектора $\mathbf{a}$ и проинтегрировать почленно по $\mathbf{r}'$. Получаем в результате

$$\langle\Sigma\nabla\theta\rangle = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q!}\int(\mathbf{a}\nabla)^q(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n})\,N\varphi(t, \mathbf{r})\,d\mathbf{a} \tag{2.17}$$

Учитывая (1.8), для k-й компоненты вектора (2.17) имеем

$$\langle\Sigma\nabla\theta\rangle_k = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r_l}\cdots\frac{\partial}{\partial r_m}[n(t, \mathbf{r})^q R_{l\ldots mk}(t, \mathbf{r})] \tag{2.18}$$
$${}^qR_{l\ldots mk}(t, \mathbf{r}) = \frac{(-1)^q}{q!}\int a_l\ldots a_m(\langle\Sigma\rangle'\mathbf{n})_k d\mathbf{a}$$

Ряд в (2.18) представляет собой разложение полной реакции, фигурирующей в усредненных уравнениях (2.3), по силовым мультиполям, причем соответствующие мультипольные моменты описываются тензорами ${}^q\mathbf{R}$, ранг которых равен порядку мультиполей. Так, первый член этого ряда (монополь) описывает распределенную силу межфазового взаимодействия в суспензии, второй член (диполь) — распределенную пару сил и т. д. Жидкая фаза суспензии эквивалентна, таким образом, некоторой гомогенной среде, заполняющей все пространство, на которую действуют распределенные силовые мультиполи. Представление о фиктивной среде такого типа было введено феноменологически в [2] и было сформулировано более строго в [3–7].

Однако во всех работах за исключением [7] задача рассматривалась в приближении точечных сил, когда влияние каждой частицы на течение жидкости приближенно заменялось влиянием точечной силы, равной силе взаимодействия частицы с жидкостью и приложенной к жидкости в точке расположения центра частицы. Фактически это соответствует пренебрежению всеми мультипольными членами ряда (2.18) за исключением монопольных, хотя, как это легко показать на основании вычислений в [5, 7], такие мультипольные члены дают вклад в уравнения (2.13), сравнимый с вкладом других членов в этих уравнениях. Отметим, что близкие по смыслу гипотезы о фиктивной среде вводились феноменологически при исследовании эффективных теплопроводности и модулей упругости композитных зернистых материалов (см. обзор [11]).

Вектор $\langle \Sigma\nabla\,\theta\rangle'$ из (2.15) можно представить в виде ряда такого же типа, что и (2.18). При этом, как легко видеть, в области $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>3a$ ограничения, налагаемые присутствием пробной частицы в точке $\mathbf{r}'$ на возможные положения других частиц в соответствии с (1.10), не затрагивают тех частиц, которые касаются точки $\mathbf{r}$ и по которым производится интегрирование в (2.15). Поэтому в указанной области величина $\langle\Sigma\nabla\,\theta\rangle'$ представляет собой функционал средних напряжений $\langle\Sigma\rangle''$ на поверхности частиц, имеющий ту же форму, что и функционал средних напряжений $\langle\Sigma\rangle'$, определяющий $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle$.

Однако в области $a<|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<3a$ центры сфер, касающихся точки $\mathbf{r}$, по радиус-вектору $\mathbf{r}''$ которых производится интегрирование в (2.15), могут лежать лишь в точках на поверхности сферы $|\mathbf{r}''-\mathbf{r}|=a$, удаленных от центра пробной частицы на расстояния, превышающие $2a$. (Это легко усмотреть, например, из соотношения (1.10)). Поэтому указанное интегрирование распространено фактически лишь на внешнюю по отношению к пробной частице часть сферы $|\mathbf{r}''-\mathbf{r}|=a$, так что величина $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle'$ в этой области оказывается явно зависящей от $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Аналогично (2.10) можно записать

$$\langle\Sigma\nabla\theta\rangle'=\begin{cases}\mathbf{Q}^*(\mathbf{r}^*), & a<|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<3a\\ \mathbf{Q}, & |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>3a\end{cases}\tag{2.19}$$

где Q — линейный функционал $\langle\Sigma\rangle''$

$$\langle\Sigma\nabla\theta\rangle_k'=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r_l}\cdots\frac{\partial}{\partial r_m}\left[n(t,\mathbf{r})^q\,R'_{l\ldots mk}(t,\mathbf{r})\right]\tag{2.20}$$

$${}^qR'_{l\ldots mk}(t,\mathbf{r})=\frac{(-1)^q}{q!}\int a_l\ldots a_m(\langle\Sigma\rangle''\mathbf{n})\,d\mathbf{a}$$

аналогичный по форме функционалу (2.18), а про функционал $\mathbf{Q}^*(\mathbf{r}^*)$ известно, что он совпадает с (2.20) при $r^*=3a$ и обращается в нуль при $r^*=a$.

Таким образом, пробную частицу можно рассматривать с феноменологической точки зрения как погруженную в фиктивную среду с распределенными силовыми мультиполями, отделенную от поверхности частицы переходным слоем толщины $2a$, концентрическим с частицей, в котором свойства «гомогенной» среды, окружающей частицу, непрерывно изменяются от свойств чистой жидкости до свойств, характерных для указанной фиктивной среды. Представление о существовании переходного слоя такого типа у поверхности пробной частицы было впервые введено в [12] и обсуждалось в [7,11].

3. Соотношения предыдущего раздела позволяют записать линейную задачу об обтекании пробной частицы, управляемом уравнениями (2.14), в виде

$$d_0\partial \mathbf{U}^* / \partial t = -\nabla(\langle\theta\rangle' P^*) + \mu_0 \Delta \mathbf{U}^* - \langle\Sigma\nabla\theta\rangle' - d_0\langle\theta\rangle'\nabla\Psi, \ \nabla\mathbf{U}^* = 0 \tag{3.1}$$
$$\mathbf{U}^* = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r} \ (r = a); \ \mathbf{U}^* \to \mathbf{U}_0, \ P^* \to P_0 \quad (r \to \infty)$$

Здесь начало отсчета выбрано в центре частицы, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{r}' = 0)$ — средняя угловая скорость вращения пробной частицы, $\mathbf{U}_0$ и P_0 и производные $\mathbf{U}_0$ по компонентам $\mathbf{r}$ выражаются через наблюдаемые величины в соответствии с (2.16), а $\langle\theta\rangle'$ и $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle'$ формально описываются выражениями (2.10) и (2.19), (2.20) соответственно.

Для упрощения вычислений пренебрежем ниже существованием промежуточного слоя, отделяющего пробную частицу от фиктивной среды со свойствами, не зависящими от $\mathbf{r}$. Это приближение носит типично аппаратный характер, и отказ от него, значительно затрудняя конкретные вычисления, не вносит принципиальных усложнений. Физически оно означает пренебрежение эффектом непроницаемости сферических частиц (центры двух твердых сфер не могут быть расположены ближе, чем на расстоянии $2a$), существенным лишь при весьма высокой концентрации частиц. Очевидно, это допущение ограничивает сферу применимости развиваемой теории суспензиями умеренной концентрации. Как следует из анализа ниже, а также из результатов [7], эта теория оказывается приближенно справедливой вплоть до $\rho \sim 0.2 - 0{,}3$.

Таким образом, считаем $\langle\theta\rangle' = \varepsilon$, $\langle\Sigma\nabla\theta\rangle' = \mathbf{Q}$. Для замыкания уравнений в (3.1) необходимо выразить вектор $\mathbf{Q}(t, \mathbf{r})$ через другие неизвестные в этих уравнениях. Согласно (2.20), этот вектор представляет собой линейный функционал средних напряжений, действующих на поверхности какой-либо частицы суспензии, расположенной вблизи фиксированной пробной частицы, а последние, ввиду линейности уравнений и вообще задачи (3.1), могут считаться линейными функционалами указанных неизвестных и их производных как в рассматриваемый, так и в предшествующие моменты времени. Таким образом, можно записать $\mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{**}, P^{**})$, где $\mathbf{U}^{**}(t, \mathbf{r})$ и $P^{**}(t, \mathbf{r})$ — средние значения скорости и давления в точке, занятой центром частицы в окрестности пробной частицы, при условии, что эта частица удалена из системы, но усреднение проводится по конфигурациям других частиц, совместимым с требованием присутствия указанной частицы в этой точке. Вообще говоря, эти величины не совпадают с $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{r})$ и $P^*(t, \mathbf{r})$, получаемыми усреднением по всем возможным конфигурациям частиц при условии, что зафиксировано расположение только пробной частицы (см. обсуждение разных типов усреднения в [7, 8]). Здесь предполагаем, что можно принять приближенно

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{**}, P^{**}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^*, P^*) \tag{3.2}$$

Фактически для $\mathbf{U}^{**}(t, \mathbf{r})$ и $P^{**}(t, \mathbf{r})$ можно сформулировать новые уравнения, которые, в свою очередь, будут зависеть от новых условных средних, получаемых усреднением по конфигурациям, в которых зафиксированы положения двух частиц, кроме пробной, и т. д. Продолжая этот процесс, получим практически бесконечную ($N \gg 1$) цепочку уравнений, связанных общими неизвестными, для обрыва и замыкания которой требуется некоторая самостоятельная гипотеза. (В этой связи проблема напоминает известную проблему замыкания бесконечной системы моментных уравнений в статистической теории турбулентности.) Соотношение (3.2) представляет простейший вариант такой гипотезы; оно с успехом использовалось в этом качестве ранее [3–5,7]. В принципе нетрудно продолжить рассмотрение уравнений этой цепочки, используя другие, более тонкие гипотезы для ее замыкания, подобные таковым в теории турбулентности или в статистической физике жидкостей. Первый шаг в этом направлении был сделан Чилдрессом [6], рассмотревшим в явной форме уравнения для $\mathbf{U}^{**}$ и P^{**} при стационарном течении в разреженной системе частиц [1]. Однако учитывая, что ошибка, связанная с использованием (3.2), не слишком велика и искупается, во всяком случае, весьма существенным упрощением выкладок, применение указанного соотношения в этой работе представляется вполне целесообразным.

Чтобы сразу же исключить влияние истории движения и рассматривать вместо функционалов в (3.2) обычные линейные алгебраические соотношения, удобно использовать преобразование Фурье

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{r}) = \int e^{i\omega t}\mathbf{U}^{(\omega)}(\omega, \mathbf{r})\,d\omega, \quad P^*(t, \mathbf{r}) = \int e^{i\omega t}P^{(\omega)}(\omega, \mathbf{r})\,d\omega, \ldots$$

Тогда, используя сформулированные выше упрощения, имеем из (3.1)

$$\begin{gathered}(\mu_0\Delta - id_0\omega)\,\mathbf{U}^{(\omega)} - \varepsilon\nabla G^{(\omega)} - \mathbf{Q}^{(\omega)} = 0, \quad \nabla\mathbf{U}^{(\omega)} = 0,\\ G^{(\omega)} = P^{(\omega)} + d_0\Psi^{(\omega)}\\ \mathbf{U}^{(\omega)} = \boldsymbol{\lambda}^{(\omega)} \times \mathbf{r}\ (r = a); \quad \mathbf{U}^{(\omega)} \to \mathbf{U}_0^{(\omega)}, \quad P^{(\omega)} \to P_0^{(\omega)} \quad (r \to \infty)\end{gathered} \tag{3.3}$$

На основании результатов, полученных в [5, 7], а также приведенных ниже, можно показать, что монопольный член в разложении для $\mathbf{Q}^{(\omega)}$, вытекающем из (2.20), представляется в виде суммы компонент, пропорциональных $\nabla G^{(\omega)}$, $\mathbf{U}^{(\omega)}$ и $\Delta\mathbf{U}^{(\omega)}$, дипольный член — в виде суммы слагаемых, пропорциональных $\nabla P^{(\omega)}$, $\Delta\mathbf{U}^{(\omega)}$ и $\Delta^2\mathbf{U}^{(\omega)}$, квадрупольный член содержит составляющие, пропорциональные $\Delta\mathbf{U}^{(\omega)}$ и $\Delta^2\mathbf{U}^{(\omega)}$, а последующие мультипольные члены включают компоненты с разными $\Delta^q\mathbf{U}^{(\omega)}$ $(q > 1)$, причем q увеличивается с ростом порядка мультиполя. Учитывая, что величины $\Delta^q\mathbf{U}^{(\omega)}$ при $q > 1$ могут быть выражены через $\mathbf{U}^{(\omega)}$ и $\Delta\mathbf{U}^{(\omega)}$ из самих урав-

---

[1] Метод работы [6] был подвергнут критическому анализу и получил дальнейшее развитие в работе Хауэллса, выполненной в Кэмбриджском университете и представленной для опубликования в Journal of Fluid Mechanics.

нений в (3.3), принимаем ниже

$$Q^{(\omega)} = \rho\nabla G^{(\omega)} + A\mathbf{U}^{(\omega)} + B\Delta\mathbf{U}^{(\omega)} \tag{3.4}$$

где A и B — некоторые неизвестные коэффициенты. Вводя кажущуюся вязкость фиктивной среды μ_a и коэффициент эффективного сопротивления β^2 в соответствии с определениями

$$\mu_a = \mu_0 - B, \qquad \beta^2 = \mu_a^{-1}(id_0\omega + A) \tag{3.5}$$

получаем окончательно задачу

$$(\Delta - \beta^2)\,\mathbf{U}^{(\omega)} = \mu_a^{-1}\nabla G^{(\omega)}, \quad \nabla\mathbf{U}^{(\omega)} = 0 \tag{3.6}$$

$$\mathbf{U}^{(\omega)} = \lambda^{(\omega)} \times \mathbf{r} \quad (r = a); \quad \mathbf{U}^{(\omega)} \to \mathbf{U}_0^{(\omega)}, \quad G^{(\omega)} \to G_0^{(\omega)} \quad (r \to \infty)$$

Заметим, что представление (3.4) можно получить, исходя из самых общих соображений. Действительно, пренебрегая согласно (3.2) различием между $\mathbf{U}^{**}$, P^{**} и $\mathbf{U}^*$, P^*, видим, что гидродинамическая ситуация в окрестности некоторой частицы определяется тремя векторами $\nabla G^{(\omega)}$, $\mathbf{U}^{(\omega)}$ и $\Delta\mathbf{U}^{(\omega)}$, причем только два из них линейно независимы (это легко усмотреть из самих уравнений (3.3)). Ввиду линейности задачи заключаем, что $Q^{(\omega)}(\omega, r)$ может быть только линейной комбинацией этих векторов, содержащих два неопределенных коэффициента, т. е. справедлива форма (3.4). Коэффициент при $\nabla G^{(\omega)}$ в (3.4) может быть выбран, вообще говоря, произвольно; как следует из анализа ниже, произведенный выбор, когда этот коэффициент принят равным ρ, наиболее естествен. Коэффициенты A и B (или величины μ_a и β^2 в (3.5) и (3.6)) пока что неизвестны; они определяются далее из эргодического условия (2.9).

Решение задачи (3.6) было получено в [5]. Существенно, что это решение позволяет определить обычным образом средние напряжения на поверхности пробной частицы и, следовательно, вычислить интегралы, через которые в [1] были выражены различные реологические характеристики суспензии.

Интегрируя по поверхности пробной частицы, после простых, хотя и громоздких вычислений имеем

$$n\int \Sigma^{(\omega)}\mathbf{n}d\mathbf{a} = d_0\rho\nabla\Psi^{(\omega)} + \frac{9}{2}\rho\frac{\mu_a}{a^2}\left(1 + \xi + \frac{1}{3}\xi^2\right)\mathbf{U}_0^{(\omega)} + \tag{3.7}$$

$$+ \frac{9}{2}\rho\frac{\mu_a}{\xi^2}\left(e^\xi - 1 - \xi - \frac{1}{3}\xi^2\right)\Delta\mathbf{U}_0^{(\omega)}, \quad \xi = \beta a$$

$$n\int (\Sigma^{(\omega)}\mathbf{n}) * \mathbf{a}da = -\rho P_0^{(\omega)}\mathbf{I} + \frac{5\rho\mu_a}{1+\xi}\left(1 + \xi + \frac{2}{5}\xi^2 + \frac{1}{15}\xi^3\right)\mathbf{E}_0^{(\omega)} \tag{3.8}$$

где $\Sigma^{(\omega)}$ — фурье-преобразование тензора напряжений $\langle\Sigma\rangle'$ на поверхности пробной частицы, а $\mathbf{E}_0^{(\omega)}$ — фурье-преобразование тензора скоростей деформаций $\langle\mathbf{E}\rangle'$ из (2.15) на удалении от частицы. Интеграл (3.7) представляет собой, очевидно, фурье-преобразование силы, действующей на частицы в единице объема в системе координат, связанной с центром пробной частицы.

Учитывая, что концентрации частиц n и ρ в задаче об обтекании пробной частицы могут считаться константами в соответствии со сказанным выше, из эргодического условия (2.9) и соотношений (2.19), (3.4) и (3.7), (3.8) получаем

$$A = {}^9/_2\rho\mu_a a^{-2}(1 + \xi + {}^1/_3\xi^2) \tag{3.9}$$
$$B = \frac{1}{2}\rho\mu_a\left[\frac{9}{\xi^2}\left(e^\xi - 1 - \xi - \frac{1}{3}\xi^2\right) - \frac{5}{1+\xi}\left(1 + \xi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{5}\xi^2 + \frac{1}{15}\xi^3\right)\right]$$

Из определения β^2 в (3.5) и первого соотношения (3.9) получаем следующее квадратное уравнение для величины $\xi = \beta a$:

$$\xi^2 - i\omega^\circ = {}^9/_2\rho\,(1 + \xi + {}^1/_3\xi^2), \quad \omega^\circ = \omega\,/\,\omega_*, \quad \omega_* = \mu_a\,(d_0a^2)^{-1} \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) определяет ξ как функцию от ρ и безразмерной частоты ω°; следует использовать единственный корень этого уравнения, положительный при $\omega^\circ = 0$. Из определения кажущейся вязкости μ_a в (3.5) и второго соотношения (3.9) имеем новое уравнение

$$\alpha = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \left[1 + \frac{9}{2}\frac{\rho}{\xi^2}\left(e^\xi - 1 - \xi - \right.\right. \tag{3.11}$$
$$\left.\left. - \frac{1}{3}\xi^2\right) - \frac{5\rho}{2(1+\xi)}\left(1 + \xi + \frac{2}{5}\xi^2 + \frac{1}{15}\xi^3\right)\right]^{-1}$$

Таким образом, задача оказывается полностью определенной. В случае стационарного однородного течения условие эргодичности (2.9) превращается в условие самосогласованности, использованное ранее на основании физических соображений в [2-7] и приводящее обычно к уравнению для ξ, следующему из (3.10) при $\omega^\circ = 0$.

Фурье-преобразования силы $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ и момента $\mathbf{m}(t, \mathbf{r})$ межфазового взаимодействия на единицу объема суспензии, действующие в лабораторной системе координат, были фактически вычислены в [5]. Учитывая различие между тензорами $\langle\Sigma\rangle'$ в лабораторной и конвективной системах отсчета, связанное с наличием в последней инерционной силы (так что фурье-преобразование тензора напряжений в лабораторной системе координат $\mathbf{T}^{(\omega)}$ равно

$$\mathbf{T}^{(\omega)} = (\mathbf{\Sigma}^{(\omega)} - d_0\Psi^{(\omega)}\mathbf{I}) + d_0\Phi^{(\omega)}\mathbf{I}$$

получаем

$$\mathbf{f}^{(\omega)} = n\int\mathbf{T}^{(\omega)}\mathbf{n}d\mathbf{a} = d_0\rho\nabla\Phi^{(\omega)} + \frac{9}{2}\rho\frac{\mu_0}{a^2}F^{(1)}\mathbf{U}_0^{(\omega)} + \frac{3}{4}\rho\mu_0F^{(2)}\Delta\mathbf{U}_0^{(\omega)} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{m}^{(\omega)} = n\int(\mathbf{T}^{(\omega)}\mathbf{n}) \times \mathbf{a}d\mathbf{a} = 6\rho\mu_0\,(M^{(1)}\,{}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{U}_0^{(\omega)} - M^{(2)}\boldsymbol{\lambda}^{(\omega)}) \tag{3.13}$$

где введены коэффициенты

$$F^{(1)} = \alpha\,(1 + \xi + {}^1/_3\xi^2), \quad F^{(2)} = 6\alpha\xi^{-2}\,(e^\xi - 1 - \xi - {}^1/_3\xi^2) \tag{3.14}$$
$$M^{(1)} = \alpha\,(1 + \xi)^{-1}e^\xi, \quad M^{(2)} = \alpha\,(1 + \xi)^{-1}\,(1 + \xi + {}^1/_3\,\xi^2)$$

обращающиеся в единицу при $\xi \to 0$, так что выражения (3.12) и (3.13) переходят при $\rho \to 0$ в известные формулы для силы и момента, действующих на n невзаимодействующих частиц в пульсирующем гармоническом течении.

Из (2.7) и (3.8) имеем далее для фурье-преобразования тензора $\sigma(t, \mathbf{r})$

(3.15) $$\sigma^{(\omega)} = -P_0^{(\omega)}\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}_0^{(\omega)}$$

где введен коэффициент эффективной вязкости

(3.16) $$\mu = \mu_0 [1 + {}^5/_2\rho\alpha (1 + \xi)^{-1} (1 + \xi + {}^2/_5\xi^2 + {}^1/_{15}\xi^3)]$$

Наконец, для фурье-преобразования $\chi^{(\omega)}$ тензора средних по объему моментных напряжений $\chi(t, \mathbf{r})$, определенного в [1], после вычислений получаем

(3.17) $$\chi^{(\omega)} + \gamma^{(\omega)} = n\int(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{aa}) * (\mathbf{T}^{(\omega)}\mathbf{n})\,d\mathbf{a} =$$
$$= 2\eta\mathbf{Y}_0^{(\omega)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \|\varepsilon_{ijk}\|, \quad \gamma = \frac{a^2}{5}\|\varepsilon_{ikj}f_j\|$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — альтернирующий тензор Леви — Чивиты, а тензор

$$\mathbf{Y}_0^{(\omega)} = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{U}_0^{(\omega)})_i}{\partial r_j} + \frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{U}_0^{(\omega)})_j}{\partial r_i}\right\|$$

представляет собой фурье-преобразование тензора

(3.18) $$\mathbf{y} = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{c})_i}{\partial r_j} + \frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{c})_j}{\partial r_i}\right\|$$

(здесь были явно учтены соотношения (2.16). В (3.17) введен также эффективный коэффициент «моментной» вязкости

(3.19) $$\eta = a^2\mu_0\alpha\rho\,(1 + \xi + {}^1/_3\xi^2)^{-1}e^{\xi}$$

Отметим, что в действительности вычисления приводят к появлению в (3.15) и (3.17) дополнительных членов, пропорциональных $\Delta\mathbf{E}_0^{(\omega)}$ и $\Delta\mathbf{Y}_0^{(\omega)}$ соответственно. Учитывая, что масштаб $\mathbf{E}_0^{(\omega)}$ и $\mathbf{Y}_0^{(\omega)}$ равен L, нетрудно показать, что отношения таких членов к соответствующим составляющим в (3.15) и (3.17) с $\mathbf{E}_0^{(\omega)}$ или $\mathbf{Y}_0^{(\omega)}$ имеют порядок $(a / L)^2$, т. е. указанные члены должны быть опущены.

Параметры α и ξ, входящие в соотношения выше, определены в (3.10) и (3.11). Легко видеть, что они, а также введенные реологические коэффициенты (3.14), (3.16) и (3.19) зависят от частоты потока ω, т. е. имеет место частотная дисперсия этих коэффициентов. Таким образом, величины $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{m}(t, \mathbf{r})$, $\sigma(t, \mathbf{r})$ и $\chi(t, \mathbf{r})$, определяемые как обратные фурье-преобразования величин (3.12), (3.13), (3.15) и (3.17) соответственно, представляют собой в общем случае некие функционалы поля скорости, невозмущенного пробной частицей, и его производных.

Однако частотная дисперсия существенна лишь при $\omega^\circ \gtrsim 1$ $(\omega \gtrsim \omega_*)$. Характерная частота ω_* из (3.10) обычно весьма велика, так что в большинстве случаев, представляющих реальный практический интерес $\omega^\circ \ll 1$, и указанной частотной дисперсией можно вообще пренебречь, вводя «квазистационарные» реологические коэффициенты, получаемые из (3.14), (3.16) и (3.19) при $\omega^\circ = 0$.

Отметим еще, что коэффициенты $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ из (3.14) при $^1/_2\mathrm{rot}\mathbf{U}_0^{(\omega)}$ и $-\lambda^{(\omega)}$ в (3.13) оказываются различными, хотя они и совпадают асимптотически при $\xi \to 0$, т. е. для разбавленных суспензий. Это — несколько неожиданный, важный в принципиальном отношении результат, показывающий, что феноменологические попытки приравнять указанные коэффициенты, предпринимавшиеся во многих известных работах, не имеют достаточных оснований.

4. Рассмотрим подробнее течение, характерная частота которого удовлетворяет условию $\omega^\circ \ll 1$. Из уравнения (3.10) имеем тогда

$$\xi = \frac{3}{2(2-3\rho)}[3\rho + (8\rho - 3\rho^2)^{1/2}] \tag{4.1}$$

что совпадает с результатом, полученным Бринкманом [2], Тэмом [3] и др., а кажущаяся вязкость μ_a (или коэффициент α) вычисляется из (3.11). Как функция от ρ, последняя величина возрастает с увеличением ρ вплоть до $\rho \approx 0.2$; при $\rho > 0.3$ она быстро падает с увеличением ρ. Эта функция, найденная выше при помощи эргодического условия (2.9), совпадает с аналогичной функцией, определенной в [7] путем непосредственного вычисления интеграла, фигурирующего в ее определении в (2.15). Уменьшение μ_a с ростом ρ в области $\rho > 0.2$ объясняется быстрым увеличением в этой области компоненты силы межфазового взаимодействия (3.7), пропорциональной лапласиану скорости, что приводит к возрастанию коэффициента B в (3.9).

Учитывая соотношения (2.16) и условия при $r \to \infty$ в (3.1), (3.3), из последних формул в п. 3 получаем следующие реологические уравнения состояния:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = d_0\rho\nabla\Phi + \frac{9}{2}\rho\frac{\mu_0}{a^2}F^{(1)}\varepsilon\mathbf{u} + \frac{3}{4}\rho\mu_0F^{(2)}\Delta\mathbf{c} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{m}(t, \mathbf{r}) = 6\rho\mu_0(M^{(1)}\,{}^1/_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{c} - M^{(2)}\boldsymbol{\lambda})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{r}) = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \qquad \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{r}) = 2\eta\mathbf{y} - \boldsymbol{\gamma}$$

Входящие в (4.2) тензоры $\mathbf{e}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{y}(t, \mathbf{r})$ определены в (2.7) и (3.18) соответственно, коэффициенты $F^{(i)}$ и $M^{(i)}$ $(i = 1,2)$ и вязкости μ и η выражены в (3.14), (3.16) и (3.19) как функции ξ из (4.1) и α из (3.11).

Выпишем уравнения движения суспензии, сформулированные в [1], с учетом соотношений (4.2), справедливых при $\omega^\circ \ll 1$. Имеем

уравнения сохранения массы фаз

$$\partial\varepsilon / \partial t + \nabla(\varepsilon\mathbf{v}) = 0, \qquad \partial\rho / \partial t + \nabla(\rho\mathbf{w}) = 0 \tag{4.3}$$

уравнения сохранения импульса фаз

$$d_0\varepsilon(\partial / \partial t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + 2\nabla(\mu\mathbf{e}) - {}^3/_4\rho\mu_0F^{(2)}\Delta\mathbf{c} - \tag{4.4}$$
$$-{}^9/_2\rho\mu_0a^{-2}F^{(1)}\varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - d_0\nabla\Phi$$

$$d_1\rho(\partial / \partial t + \mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} = {}^3/_4\rho\mu_0F^{(2)}\Delta\mathbf{c} + {}^9/_2\rho\mu_0a^{-2}F^{(1)}\varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{w}) -$$
$$-(d_1 - d_0)\rho\nabla\Phi$$

уравнения сохранения момента импульса фаз

$$d_0\varepsilon(\partial/\partial t+\mathbf{v}\nabla)\mathbf{K}_0=2\nabla(\eta\mathbf{y})-6\rho\mu_0(M^{(1)}\,{}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{c}-M^{(2)}\boldsymbol{\lambda})-\nabla\gamma \tag{4.5}$$
$$^2/_5\,a^2d_1\rho(\partial/\partial t+\mathbf{w}\nabla)\boldsymbol{\lambda}=6\rho\mu_0(M^{(1)}\,{}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{c}-M^{(2)}\boldsymbol{\lambda})$$

Здесь $d_0\mathbf{K}_0(t,\mathbf{r})$ — средний внутренний момент импульса континуума, имитирующего жидкую фазу суспензии, а аналогичная величина для дисперсной фазы равна $^2/_5a^2d_1\boldsymbol{\lambda}(t,\mathbf{r})$ [1].

Из (4.3) — (4.5) легко получить также уравнения для описания частных типов течений. Например, фильтрация жидкости в стационарном зернистом слое управляется первыми уравнениями в (4.3) — (4.5) с $\mathbf{c}=\varepsilon\mathbf{v}$, $\mathbf{w}=0$, $\boldsymbol{\lambda}=0$. При этом эффективная вязкость фильтрующейся жидкости равна $\mu-{}^3/_4\rho\mu_0F^{(2)}=\mu_a$, т. е. кажущейся вязкости фиктивной среды, рассмотренной выше. Аналогично легко рассмотреть уравнения, соответствующие односкоростной модели «гомогенной» суспензии. При этом уравнение сохранения импульса гомогенной суспензии получается почленным сложением уравнений (4.4), откуда видно, что эффективная вязкость в этом случае равна μ.

Отметим, что реологические характеристики рассмотренной дисперсной системы целиком определяются напряжениями, появляющимися на поверхностях частиц системы, которые, в свою очередь, зависят только от свойств относительного течения жидкости, но не от особенностей абсолютного движения фаз. При этом, как следует из приведенного анализа, вращение частиц совершенно не сказывается на формировании реологических свойств континуумов, моделирующих фазы суспензии. Поэтому, в частности, отсутствует принципиальная разница между задачами о фильтрации жидкости в зернистом слое неподвижных частиц и о течении жидкой фазы суспензии в том смысле, что реологические характеристики течений обоих типов одинаково зависят от свойств относительного движения жидкости и совпадают, если последнее движение в обоих случаях одинаково. Этот вывод, представляющийся здесь очевидным следствием развитой теории, находится в противоречии с распространенным в литературе мнением о существенном качественном различии между указанными задачами.

Кажущееся подтверждение последней точки зрения в работе Лундгрена [7] обусловлено неестественным выбором начального представления для величины $\mathbf{Q}$, существенно отличающегося от (3.4), при исследовании течения суспензии в поле тяжести и последующим использованием усредненного уравнения сохранения импульса фиктивной среды, обтекающей пробную частицу, которое отличается от стационарного аналога уравнения в (3.1) некоторым множителем. Это привело в [7] к неправильному определению тензора средних напряжений в жидкости, обтекающей пробную частицу, так что, например, кажущаяся вязкость этой жидкости не совпадает с аналогичной величиной в уравнении сохранения импульса жидкой фазы, полученном усреднением по малому физическому объему. Следующий отсюда неправильный вывод о различии между силами межфазового взаимодействия $\mathbf{f}(t,\mathbf{r})$ в суспензии и в стационарном зернистом слое был использован в [7] для объяснения эффекта пониженного гидравлического сопротивления псевдоожиженного слоя по сравнению с неподвижным зернистым слоем той же пористости. Ясно, что такое объяснение неверно; в действительности «регулярная» сила $\mathbf{f}(t,\mathbf{r})$ в обоих случаях оказывается одинаковой, а эффект пониженного сопротивления объясняется, по-видимому, появлением в псевдоожиженном слое отличной от нуля дополнительной силы взаимодействия, обусловленной флуктуациями локальной пористости в соответствии с моделью в [13, 14].

При $\rho \ll 1$ из (3.16) с учетом (3.11) и (4.1) получаем известный эйнштейновский результат

$$\mu = \mu_0 (1 + {}^5/_2\rho) \tag{4.6}$$

В этой связи отметим, что в работе В. Н. Покровского [15] сделан вывод об ошибочности этого результата и предложено альтернативное соотношение

$$\mu = \mu_0 (1 + {}^3/_2\rho) \tag{4.7}$$

противоречащее эксперименту и подвергшееся заслуженной критике в литературе (см., например, замечание в обзоре [16]). Учитывая, что этот вывод был повторен в ряде последующих работ В. Н. Покровского, укажем на существо допущенной им ошибки. В. Н. Покровский считает неправильным стандартный метод вывода соотношения (4.6) на том основании, что при этом в качестве среднего по объему (наблюдаемого) тензора скоростей деформаций суспензии $\mathbf{e}(t, \mathbf{r})$ использован тензор

$$ {}^1/_2 \| \partial v_i / \partial r_j + \partial v_j / \partial r_i \| \tag{4.8}$$

и безосновательно предлагает использовать этот тензор, умноженный на пористость суспензии $\varepsilon(t, \mathbf{r})$. Это противоречит строгому результату в (2.7) всегда, за исключением ситуаций, когда $\mathbf{w} = 0$ (т. е. имеет место фильтрация жидкости в неподвижном слое). В то же время ясно, что определение эффективной вязкости как величины, характеризующей суспензию в целом, имеет смысл лишь в противоположном предельном случае $\mathbf{w}(t, \mathbf{r}) \approx \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, когда суспензию можно приближенно рассматривать как некую гомогенную сплошную среду. В последнем случае тензор $\mathbf{e}(t, \mathbf{r})$ из (2.7) совпадает с (4.8), что и подразумевается обычно при выводе (4.6). Более того, при $\mathbf{w} = 0$, когда соображения в [15] о тензоре скоростей деформаций справедливы, соотношение (4.7) вообще не имеет смысла, так как в этом случае движение характеризуется вязкостью μ_a, но не μ.

В заключение обсудим кратко предположения, сделанные выше. Первая группа допущений (о соотношениях (1.6) и (1.7) между характерными масштабами, о незначительном влиянии отдельных частиц на течение в удаленных точках в соответствии с (1.9) и о малости числа Рейнольдса для обтекания частиц) определяет достаточно широкий класс систем и их движений, к которым применима развитая теория.

Вторая группа содержит три допущения, использованных для упрощения рассуждений и выкладок. Во-первых, это предположение о случайном расположении частиц в окрестности любой выделенной частицы, отраженное в (1.10). Очевидно, такое предположение справедливо для хаотически упакованных стационарных зернистых слоев, но обычно не выполняется для суспензий. Однако, как следует из обсуждений в [16], влияние точного вида бинарной функции распределения, описывающей предпочтительные конфигурации пар частиц в потоке, во многих случаях незначительно, что и оправдывает использование указанного допущения. Для отказа от него необходимо, в первую очередь, рассмотреть взаимодействие двух взвешенных частиц в потоках разных типов, как это было сделано в [9] для частиц в потоке простого сдвига, и использовать новое соотношение типа (1.10), в которое введена полученная из такого рассмотрения бинарная функция распределения.

Тесно связано с этим и второе предположение, заключающееся в пренебрежении эффектом непроницаемости частиц и, следовательно, существованием переходного слоя вблизи поверхности пробной частицы, в котором свойства окружающей фиктивной среды существенно зависят от координат. Как указывалось выше и следует из сравнения полученных результатов с экспериментальными данными, это предположение приближенно справедливо для умеренно концентрированных суспензий, когда ρ не превышает 0.2—0.3. Отказ от этого допущения связан с решением значительно более сложной математической задачи об обтекании пробной частицы, но не вносит новых трудностей принципиального характера.

Наконец, было сделано предположение о том, что средние скорость и давление жидкости в некоторой точке приближенно совпадают с соответствующими условными средними в этой точке, полученными путем усреднения только по допустимым конфигурациям частиц, какими они были бы, если бы в указанной точке был расположен центр одной из частиц. Как было сказано выше, это — простейшая гипотеза, позволяющая обеспечить замыкание теории. Детальное исследование степени справедливости этой гипотезы и величины вносимой ею ошибки весьма трудоемко, но может быть проведено при помощи метода в [6].

Заметим, что ввиду малости числа Рейнольдса выше и в [1] полностью пренебрегали влиянием пульсаций частиц и жидкости на формирование реологических свойств суспензии, хотя в ряде случаев это влияние может быть существенным в принципиальном отношении. Отметим также, что все полученные результаты характеризуют суспензию вдали от ее границ, т. е. вопрос об адекватной форме граничных условий, которые следует налагать на поверхностях разных типов, остается открытым.

Укажем кратко на возможные пути обобщения развитой теории. Прежде всего, несложно распространить ее на эмульсии капель или пузырьков, форма которых слабо отличается от сферической. Первый шаг в этом направлении был сделан в [5], где было рассмотрено взаимодействие между фазами эмульсии. Значительный интерес представит также обобщение теории на суспензии частиц, обладающих асимметрическими свойствами. Это, в первую очередь, суспензии сфер, обладающих дипольными моментами, в соответствующем внешнем поле (например, суспензии намагниченных частиц в присутствии магнитного поля или частицы со смещенным центром тяжести в гравитационном поле), а также суспензии сфероидальных или эллипсоидальных частиц.

Поступила 26 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Интегральные и дифференциальные законы сохранения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
2. *Brinkman H. C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. Appl. Scient. Res., A, 1947, vol. 1, No 1, p. 27.
3. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3, p. 537.

4. *Буевич Ю. А.* О взаимодействии коллектива частиц с пульсирующей жидкостью при малых числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
5. *Буевич Ю. А.*, *Марков В. Г.* Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазового взаимодействия. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
6. *Childress S.* Viscous flow past a random array of spheres. J. Chem. Phys., 1972, vol. 56, No. 9, p. 2527.
7. *Lundgren T. S.* Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt 2, p. 273.
8. *Batchelor G. K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 2, p. 245.
9. *Batchelor G. K.*, *Green J. T.* The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 2, p. 375.
10. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of force-free particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 3, p. 545.
11. *Hashin Z.* Assesment of the self-consistent scheme approximation: conductivity of particulate composites. J. Composite Materials, 1968, vol. 2. No 3, p. 284.
12. *Kerner E. H.* The electrical conductivity of composite media. Proc. Phys. Soc. Ser. B, 1956, vol. 69, No. 8. p. 802.
13. *Тодес О. М.* О гидравлическом сопротивлении взвешенного слоя. Теоретические основы химической технологии, 1967, т. I, № 4.
14. *Буевич Ю. А.* Локальные пульсации и взаимодействие фаз в суспензиях мелких частиц. ПМТФ, 1971, № 4.
15. *Покровский В. Н.* Уточнение результатов теории вязкости суспензий. Ж. экспер. и теор. физ., 1968, т. 55, вып. 2 (8).
16. *Brenner H.* Suspension rheology. In: Progress in Heat & Mass Transfer, vol. 5. Oxford — New York, Pergamon Press, 1972.