Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 536.46 : 533.6

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ДВУХСТАДИЙНОЙ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ГАЗЕ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Методом сращиваемых асимптотических разложений построено приближенное решение задачи о распространении плоского фронта двухстадийной экзотермической последовательной химической реакции в газе. В качестве параметра разложения используется отношение адиабатической температуры горения к сумме температур активации обеих реакций. В зависимости от значений характерных параметров задачи рассмотрено несколько решений с различным асимптотическим поведением, соответствующих разным режимам распространения фронта пламени. Полученные аналитические результаты сопоставляются с имеющимися в литературе численными данными.

1. Формулировка задачи. Стационарное распространение плоского фронта двухстадийной последовательной экзотермической реакции $A_1 \to A_2 \to A_3$ в газе может быть при ряде упрощающих предположений описано следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{\lambda}{c}\frac{d^2T}{dx^2} - m\frac{dT}{dx} + \frac{Q_1}{c}a_1\rho k_1 \exp\frac{-E_1}{RT} + \frac{Q_2}{c}a_2\rho k_2 \exp\frac{-E_2}{RT} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho D\frac{d^2a_1}{dx^2} - m\frac{da_1}{dx} - a_1\rho k_1 \exp\frac{-E_1}{RT} = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho D\frac{d^2a_2}{dx^2} - m\frac{da_2}{dx} + a_1\rho k_1 \exp\frac{-E_1}{RT} - a_2\rho k_2 \exp\frac{-E_2}{RT} = 0 \tag{1.3}$$

$$x = -\infty,\quad T = T_-,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 0 \tag{1.4}$$

$$x = \infty,\quad a_1 = a_2 = 0,\quad dT\,/\,dx = 0 \tag{1.5}$$

Здесь x — координата, a_1, a_2 — массовые доли вещества A_1 и A_2, T — температура, ρ — плотность, m — массовая скорость горения, c — теплоемкость, λ — теплопроводность, R — газовая постоянная, Q_1, Q_2 — тепловые эффекты реакций, k_1, k_2 — предэкспоненциальные множители, E_1, E_2 — энергии активации, D — коэффициент диффузии веществ A_1 и A_2. Предполагается, что плотность и все теплофизические характеристики среды сохраняют постоянные значения.

Решение задачи (1.1)—(1.5) заключается в определении функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $T(x)$ и собственного значения m. Для существования решения достаточно, чтобы константа k_1 равнялась нулю на малом интервале вблизи T_- [1].

Задача (1.1)—(1.5) имеет первый интеграл

$$\frac{\lambda}{mc}\frac{dT}{dx} = T - T_+ + \frac{Q_1+Q_2}{c}\left[a_1 - \frac{D\rho}{m}\frac{da_1}{dx}\right] + \tag{1.6}$$
$$+\frac{Q_2}{c}\left[a_2 - \frac{D\rho}{m}\frac{da_2}{dx}\right], \quad T_+ = T_- + c^{-1}(Q_1+Q_2)$$

С учетом (1.6) задачу (1.1)—(1.5) можно представить в форме

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{L(r-H)}{\tau - \sigma_Q H - (1-\sigma_Q)G} \tag{1.7}$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{L(q-G)}{\tau - \sigma_Q H - (1-\sigma_Q)G} \tag{1.8}$$

$$\mu\frac{dH}{d\tau} = \frac{\sigma_k(1-r)}{\tau - \sigma_Q H - (1-\sigma_Q)G}\exp\frac{-\beta\sigma_E(1+\sigma)}{\tau+\sigma} \tag{1.9}$$

$$\mu\frac{dG}{d\tau} = \frac{(1-\sigma_k)(r-q)}{\tau - \sigma_Q H - (1-\sigma_Q)G}\exp\frac{-\beta(1-\sigma_E)(1+\sigma)}{\tau+\sigma} \tag{1.10}$$

$$\tau = 0, \qquad r = q = G = H = 0 \tag{1.11}$$

$$\tau = 1, \qquad r = q = G = H = 1 \tag{1.12}$$

Переменная τ, неизвестные функции r, q, H, G, собственное значение μ и безразмерные константы L, σ_Q, σ_k, σ_E, β и σ определяются формулами

$$\tau = \frac{T-T_-}{T_+-T_-}, \quad r = 1-a_1, \quad q = 1-a_1-a_2, \quad L = \frac{\lambda}{\rho Dc} \tag{1.13}$$
$$G(\tau) = q - \frac{\rho D}{m}\frac{dq}{dx}, \quad H(\tau) = r - \frac{\rho D}{m}\frac{dr}{dx}, \quad \sigma_k = \frac{k_1}{k_1+k_2},$$
$$\sigma_E = \frac{E_1}{E_1+E_2}, \quad \sigma_Q = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}, \quad \beta = \frac{E_1+E_2}{RT_+}$$
$$\sigma = \frac{T_-}{T_+-T_-}, \qquad \mu = \frac{m^2c}{\lambda\rho(k_1+k_2)}$$

Из условий неотрицательности концентрации, последовательности превращения реагентов и из условия неотрицательности градиента температуры следуют неравенства

$$\tau - \sigma_Q H - (1-\sigma_Q)G \geqslant 0, \quad r \geqslant H \geqslant 0, \quad q \geqslant G \geqslant 0 \tag{1.14}$$
$$1 \geqslant r \geqslant q \geqslant 0$$

При построении приближенных аналитических решений задачи (1.7)—(1.12) применим метод сращиваемых асимптотических разложений [2,3], выбрав в качестве параметра разложения малую величину β^{-1}, и воспользуемся результатами работ [4–8].

Из анализа уравнений (1.7)—(1.10) при больших значениях β так же, как в [8], можно установить, что форма асимптотических решений оказывается существенно различной в зависимости от значений параметров σ_E, σ, σ_Q и выделить частные случаи

$$^1/_2 < \sigma_Q < 1, \ (\sigma_Q + \sigma)(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1} < \sigma_E < {}^1/_2$$
$$0 < \sigma_E < (\sigma_Q + \sigma)(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1}$$

2. Решение при $^1/_2 < \sigma_E < 1$ или $1 < E_1/E_2 < \infty$. Разобьем интервал $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ на две области — малую окрестность $\tau = 1$ (внутренняя область), где введем переменную $\tau^* = \beta(1 - \tau)$, и оставшуюся часть интервала (внешняя область). Ограничимся определением двух членов разложения собственного значения μ, которое будем искать в виде

$$\mu = (\mu_0 + \beta^{-1}\mu_1)\beta^{-2} \exp(-\beta\sigma_E) \tag{2.1}$$

Соответствующие разложения функции r, q, H, G во внутренней и внешней областях имеют вид

$$\begin{gathered} r(\tau^*) = r_0(\tau^*) + \beta^{-1}r_1(\tau^*) + \beta^{-2}r_2(\tau^*) \\ q(\tau^*) = q_0(\tau^*) + \beta^{-1}q_1(\tau^*) + \beta^{-2}q_2(\tau^*) \\ H(\tau^*) = H_0(\tau^*) + \beta^{-1}H_1(\tau^*), \quad G(\tau^*) = G_0(\tau^*) + \beta^{-1}G_1(\tau^*) \\ r(\tau) = r_0(\tau) + \beta^{-2}r_1(\tau), \quad q(\tau) = q_0(\tau) + \beta^{-2}q_1(\tau) \\ H(\tau) = \bar{H}(\tau, \beta), \qquad G = \bar{G}(\tau, \beta) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь, как и в последующих разделах, вид разложений (2.1), (2.2) установлен из анализа различных вариантов и отбрасывания тех из них, которые не удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к решению задачи (1.1)—(1.12). Чертой сверху обозначаются функции, убывающие с ростом β быстрее, чем любая степень малого параметра β^{-1}, например по экспоненциальному закону.

Уравнения для последовательных членов разложения (2.1), (2.2) определяются подстановкой (2.1), (2.2) в (1.7)—(1.10), группировкой и приравниванием членов одинакового порядка малости. Внешние разложения должны удовлетворять граничным условиям (1.11), внутренние — условиям (1.12). Кроме того, внешние и внутренние разложения должны быть связаны условием сращивания, которое выражается в требовании эквивалентности асимптотического поведения внутренних и внешних разложений, представленных в виде функций от промежуточной переменной [3,5].

Подставив (2.1) и внутренние разложения (2.2) в уравнения (1.7)—(1.10) и граничные условия (1.12), последовательно находим

$$\frac{dr_0}{d\tau^*} = \frac{dq_0}{d\tau^*} = 0, \quad r_0(0) = q_0(0) = 1, \quad r_0(\tau^*) = q_0(\tau^*) = 1 \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} r_1(\tau^*) = q_1(\tau^*), \quad r_2(\tau^*) = q_2(\tau^*) \\ H_0(\tau^*) = G_0(\tau^*), \quad H_1(\tau^*) = G_1(\tau^*) \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\frac{dr_1}{d\tau^*} = -L, \quad r_1(0) = 0, \quad r_1(\tau^*) = -L\tau^* \tag{2.5}$$

$$\mu_0 \frac{dH_0}{d\tau^*} = \frac{\sigma_k r_1}{1 - H_0} \exp\frac{-\sigma_E \tau^*}{1 + \sigma}, \quad H_0(0) = 1 \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.6) следует

$$H_0(\tau^*) = 1 - \left[\frac{2\sigma_k L(1+\sigma)^2}{\mu_0 \sigma_E^2} \gamma\left(\frac{-\sigma_E \tau^*}{1+\sigma}\right)\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

Здесь и далее $\gamma(x) \equiv 1 - (1 + x)\exp(-x)$

Подставив (2.1) и внешние разложения (2.2) в (1.7)—(1.10), (1.11), получим

$$\frac{dq_0}{d\tau}=\frac{Lq_0}{\tau},\quad \frac{dr_0}{d\tau}=\frac{Lr_0}{\tau},\quad r_0(0)=q_0(0)=0 \tag{2.8}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau}=\frac{Lq_1}{\tau},\quad \frac{dr_1}{d\tau}=\frac{Lr_1}{\tau},\quad r_1(0)=q_1(0)=0 \tag{2.9}$$

Отсюда

$$q_0(\tau)=C_1\tau^L,\ r_0(\tau)=C_2\tau^L,\ q_1(\tau)=C_3\tau^L,\ r_1(\tau)=C_4\tau^L \tag{2.10}$$

Здесь и далее буквой C обозначаются константы интегрирования. Из сращивания внутренних и внешних разложений найдем

$$\mu_0=2\sigma_k L(1+\sigma)^2\sigma_E^{-2},\qquad C_1=C_2=1 \tag{2.11}$$

$$H_0(\tau^*)=1-\gamma^{1/2}\left(\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right)$$

Для следующих членов разложения во внутренней области получаем:

$$\frac{dr_2}{d\tau^*}=\frac{-L(r_1+\tau^*)}{1-H_0},\quad r_2(0)=0 \tag{2.12}$$

$$\frac{dH_1}{d\tau^*}=\frac{\sigma_k L\tau^*}{\mu_0(1-H_0)}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{\tau^*}{1-H_0}-\frac{H_1}{1-H_0}+\frac{\sigma_E\tau^{*2}}{(1+\sigma)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{r_2}{r_1}\right]\exp\left(\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right),\quad H_1(0)=0$$

Откуда

$$r_2(\tau^*)=\frac{(L-1)L(1+\sigma)^2}{\sigma_E^2}j_1\left(\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right),\quad j_1(x)=\int_0^x\gamma^{-1/2}(t)\,t\,dt$$

$$H_1(\tau^*)=\frac{\sigma_k L}{\mu_0(1-H_0)}\int_0^{\tau^*}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{r_2}{r_1}+\frac{\sigma_E x^2}{(1+\sigma)^2}-\frac{x}{1-H_0(x)}\right]\times \tag{2.13}$$
$$\times x\exp\frac{-\sigma_E x}{1+\sigma}dx$$

Сращивая, найдем

$$C_3=C_4=\frac{(L-1)L(1+\sigma)^2}{\sigma_E^2}j_2(\infty),\qquad j_2(x)=j_1(x)-\frac{x^2}{2} \tag{2.14}$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{2}{\sigma_E}\left[(1+\sigma)\left(\frac{j_3(\infty)}{2}+1-L\right)-3\right],\quad j_3(x)=\int_0^x\gamma^{-1/2}(t)\,t^2e^{-t}dt$$

$$j_2(\infty)=2.92;\quad j_3(\infty)=2.688$$

Полученные формулы дают асимптотическое решение задачи в рассмотренном частном случае. Запишем двучленное выражение для массовой скорости горения (2.1), (2.11), (2.14) в размерных переменных

$$m=\left(\frac{2k_1L\lambda\rho}{c}\right)^{1/2}\left(\frac{RT_+}{E_1}\right)\left(\frac{T_+}{T_+-T_-}\right)\left\{1+\right. \tag{2.15}$$
$$\left.+\frac{RT_+}{E_1}\left[\frac{T_+}{T_+-T_-}(2.344-L)-3\right]\right\}\exp\frac{-E_1}{2RT_+}$$

Выражение (2.15) устанавливает аналитическую зависимость скорости горения от характеристик процесса, в том числе от отношения коэффициентов температуропроводности и диффузии. Видно, что в рассмотренном случае скорость горения полностью определяется кинетическими характеристиками первой реакции. Воспользовавшись терминологией [9], этот режим горения следует назвать режимом слияния.

3. Решение при $(\sigma_Q + \sigma) / (1 + \sigma_Q + 2\sigma) < \sigma_E < {}^1/_2$ **или** $(T_- + C^{-1}Q_1) / T_+ < E_1 / E_2 < 1$. В этом случае выделим на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ две внутренних и две внешних области. Внутренними областями являются малые окрестности точек $\tau = 1$ и $\tau = \tau_1{}^\circ \equiv \sigma_E (1 + \sigma) (1 - \sigma_E)^{-1} - \sigma$, $\sigma_Q < \tau_1{}^\circ < 1$. Внешними областями — отрезки $\tau_1{}^\circ < \tau < 1$ и $0 \leqslant \tau < \tau_1{}^\circ$. Рассмотрим сначала решение в областях $\tau \sim 1$ и $\tau_1{}^\circ < \tau < 1$. Разложение собственного значения μ, внутренние и внешние разложения неизвестных функций здесь следует искать в виде

$$\mu = (\mu_0 + \beta^{-1}\mu_1)\beta^{-2} \exp[-\beta(1 - \sigma_E)] \tag{3.1}$$

$$q(\tau^*) = q_0(\tau^*) + \beta^{-1}q_1(\tau^*) + \beta^{-2}q_2(\tau^*)$$

$$G(\tau^*) = G_0(\tau^*) + \beta^{-1}G_1(\tau^*)$$

$$r(\tau^*) = 1 + \bar r(\tau^*, \beta), \ H(\tau^*) = 1 + \bar H(\tau^*, \beta), \ \tau^* = \beta(1 - \tau) \tag{3.2}$$

$$q(\tau) = q'_0(\tau) + \beta^{-2}q'_1(\tau), \qquad G(\tau) = \bar G(\tau, \beta)$$

$$r(\tau) = 1 + \bar r(\tau, \beta), \qquad H(\tau) = 1 + \bar H(\tau, \beta)$$

Подставив (3.1), (3.2) в (1.7)—(1.10) и выделив слагаемые одинакового порядка малости, с учетом граничных условий можно получить во внутренней области

$$\frac{dq_0}{d\tau^*} = 0, \qquad q_0(0) = 1, \qquad q_0(\tau^*) = 1 \tag{3.3}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau^*} = -L(1 - \sigma_Q)^{-1}, \qquad q_1(0) = 0, \quad q_1(\tau^*) = -L(1 - \sigma_Q)^{-1}\tau^* \tag{3.4}$$

$$\frac{dq_2}{d\tau^*} = \frac{-L[(1 - \sigma_Q)q_1 + \tau^*]}{(1 - \sigma_Q)^2(1 - G_0)}, \qquad q_2(0) = 0 \tag{3.5}$$

$$\mu_0\frac{dG_0}{d\tau^*} = \frac{(1 - \sigma_k)q_1}{(1 - \sigma_Q)(1 - G_0)} \exp\frac{-(1 - \sigma_E)\tau^*}{1 + \sigma}, \qquad G_0(0) = 1 \tag{3.6}$$

$$\frac{dG_1}{d\tau^*} = \frac{(1 - \sigma_k)L\tau^*}{\mu_0(1 - \sigma_Q)^2(1 - G_0)}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0} - \frac{\tau^*}{(1 - \sigma_Q)(1 - G_0)} - \frac{G_1}{1 - G_0} + \frac{(1 - \sigma_E)\tau^{*2}}{(1 + \sigma)^2} - \frac{q_2}{q_1}\right] \exp\frac{-(1 - \sigma_E)\tau^*}{1 + \sigma}, \qquad G_1(0) = 0 \tag{3.7}$$

Во внешней области

$$\frac{dq_0'}{d\tau} = \frac{Lq_0'}{\tau - \sigma_Q}, \quad \frac{dq_1'}{d\tau} = \frac{Lq_1'}{\tau - \sigma_Q} \tag{3.8}$$

$$q_0' = C_5(\tau - \sigma_Q)^L, \qquad q_1' = C_6(\tau - \sigma_Q)^L$$

Из (3.4) и (3.6) найдем

$$G_0(\tau^*) = 1 - \left\{\frac{2L(1 - \sigma_k)(1 + \sigma)^2}{\mu_0(1 - \sigma_Q)^2(1 - \sigma_E)^2}\gamma\left(\frac{-(1 - \sigma_E)\tau^*}{1 + \sigma}\right)\right\}^{1/2} \tag{3.9}$$

После сращивания внутренних и внешних разложений получим

$$\mu_0 = \frac{2L(1-\sigma_k)(1+\sigma)^2}{(1-\sigma_Q)^2(1-\sigma_E)^2} \tag{3.10}$$

$$C_5 = \frac{1}{(1-\sigma_Q)^L}, \quad G_0(\tau^*) = 1 - \gamma^{1/2}\left(\frac{(1-\sigma_E)\tau^*}{1+\sigma}\right)$$

Далее из (3.5) с учетом (3.4), (3.9) найдем

$$q_2(\tau^*) = \frac{(L-1)L(1+\sigma)^2}{(1-\sigma_E)^2(1-\sigma_Q)^2} j_1\left[\frac{(1-\sigma_E)\tau^*}{1+\sigma}\right] \tag{3.11}$$

Здесь функция j_1 определена в (2.15). Интегрируя (3.7), получим

$$G_1(\tau^*) = \frac{(1-\sigma_k)L}{\mu_0(1-\sigma_Q)^2(1-G_0)} \int\limits_0^{\tau^*}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0} - \frac{q_2}{q_1} + \frac{(1-\sigma_E)x^2}{(1+\sigma)^2} - \right. \tag{3.12}$$

$$\left. - \frac{x}{(1-\sigma_Q)(1-G_0)}\right] x \exp\frac{-(1-\sigma_E)x}{1+\sigma}dx$$

В результате сращивания имеем

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{2}{1-\sigma_E}\left[\frac{1+\sigma}{1-\sigma_Q}\left(\frac{j_3(\infty)}{2} + 1 - L\right) - 3\right] \tag{3.13}$$

$$C_6 = \frac{(L-1)L(1+\sigma)^2}{(1-\sigma_E)^2(1-\sigma_Q)^{2+L}} j_2(\infty)$$

Здесь функция j_3 определена в (2.13). Воспользовавшись (3.1), (3.10), (3.13), запишем асимптотическое двучленное выражение для скорости горения в размерных переменных

$$m = \left(\frac{2K_2L\lambda\rho}{c}\right)^{1/2}\left(\frac{RT_+}{E_2}\right)\left(\frac{cT_+}{Q_2}\right)\left\{1 + \left(\frac{RT_+}{E_2}\right) \times \right. \tag{3.14}$$

$$\left. \times \left[\frac{T_+}{Q_2}(2.344 - L) - 3\right]\right\} \exp\frac{-E_2}{2RT_+}$$

Чтобы завершить построение решения, необходимо определить функции r, q, H, G в областях $0 < \tau < \tau_1^\circ$ и $\tau \sim \tau_1^\circ$.

Изменение функций r и H от нуля до единицы в основном происходит в узкой зоне вблизи $\tau = \tau_1^\circ = (1-\sigma_E)^{-1}\sigma_E(1+\sigma) - \sigma$ или $T = T_1^\circ = T_+E_1E_2^{-1}$, где обе части уравнения (1.9) становятся равными по порядку величины. Будем искать решения вблизи $\tau = \tau_1^\circ$ в виде внутренних разложений

$$\begin{aligned} r(\tau_1^*) &= r_0(\tau_1^*) + \beta^{-1}r_1(\tau_1^*) + \beta^{-2}r_2(\tau_1^*) \\ H(\tau_1^*) &= H_0(\tau_1^*) + \beta^{-1}H_1(\tau_1^*) \\ q(\tau_1^*) &= q_0(\tau_1^*) + \beta^{-1}q_1(\tau_1^*) + \beta^2 r_2(\tau_1^*) \\ G(\tau_1^*) &= \overline{G(\tau_1^*, \beta)}, \qquad \tau_1^* = \beta(\tau_1^\circ - \tau) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Точка $\tau = \tau_1^\circ$ — внутренняя точка интервала [0,1], поэтому разложения (3.15) должны удовлетворять условиям сращивания с соответствующими разложениями в двух внешних областях. Во внешней области $\tau_1^\circ > 0$ решение определяются формулами (3.2), (3.8), (3.10), (3.13)

$$q(\tau) = \left(\frac{\tau - \sigma_Q}{1-\sigma_Q}\right)^L + \beta^{-2}\frac{(1+\sigma)^2L(L-1)}{(1-\sigma_E)^2(1-\sigma_Q)^{2+L}} j_2(\infty)(\tau - \sigma_Q)^L \tag{3.16}$$

$$G_1(\tau) = \overline{G(\tau, \beta)}, \ H(\tau) = 1 + \overline{H(\tau, \beta)}, \ r(\tau) = 1 + r(\tau, \beta)$$

Во внешней области $\tau < \tau_1^\circ$ так же, как в п. 2

(3.17) $$r(\tau) = r_0(\tau) + \beta^{-2} r_1(\tau),\ q(\tau) = q_0(\tau) + \beta^{-2} q_1(\tau)$$
$$r_0(\tau) = C_7 \tau^L,\ r_1(\tau) = C_8 \tau^L,\ q_0(r) = C_9 \tau^L,\ q_1(\tau) = C_{10} \tau^L$$
$$H(\tau) = \overline{H(\tau, \beta)}, \qquad G(\tau) = \overline{G(\tau, \beta)}$$

Подставляя (3.15) в систему (1.7)—(1.10) для $r_0(\tau_1^*)$, $q_0(\tau_1^*)$, получаем уравнения

(3.18) $$dr_0 \,/\, d\tau_1^* = dq_0 \,/\, d\tau_1^* = 0$$

Решение уравнений (3.18), удовлетворяющее условию сращивания с (3.16), имеет вид

(3.19) $$r_0(\tau_1^*) = 1, \qquad q_0(\tau_1^*) = (1 - \sigma_Q)^{-L} (\tau_1^\circ - \sigma_Q)^L$$

Сращивание (3.19) с (3.17) дает

$$C_7 = (\tau_1^\circ)^{-L}, \qquad C_9 = (\tau_1^\circ)^{-L} (1 - \sigma_Q)^{-L} (\tau_1^\circ - \sigma_Q)^L$$

Далее, для $r_1(\tau_1^*)$, $q_1(\tau_1^*)$, $H_0(\tau_1^*)$ можно получить уравнения

(3.20) $$\frac{dr_1}{d\tau_1^*} = \frac{-L(1 - H_0)}{\tau_1^\circ - \sigma_Q H_0}, \quad \frac{dq_1}{d\tau_1^*} = \frac{-L(\tau_0 - \sigma_Q)^L}{(1 - \sigma_Q)^L (\tau_1^\circ - \sigma_Q H_0)}$$
$$\mu_0 \frac{dH_0}{d\tau_1^*} = \frac{\sigma_k r_1}{\tau_1^\circ - \sigma_Q H_0} \exp \frac{-\sigma_E (1 + \sigma) \tau_1^*}{(\tau_1^\circ + \sigma)^2}$$

При анализе (3.20) следует учитывать, что значение параметра μ_0 уже установлено ранее и определяется формулой (3.10). Можно доказать, что при условии $\tau_1^\circ > \sigma_Q$ система уравнений (3.20) имеет решение (единственное), удовлетворяющее условиям сращивания с (3.16), (3.17). Определение его возможно только путем численного интегрирования.

Аналогично (3.20) может быть выписана система уравнений для $r_1(\tau_1^*)$, $q_1(\tau_1^*)$ и $H_1(\tau_1^*)$.
Для определения собственного значения задачи, которое является главной целью рассмотрения, в решении этой системы так же, как и в решении системы (3.20), нет необходимости.

Как показывает формула (3.14), в рассмотренном случае скорость горения определяется кинетическими характеристиками второй реакции. Зоны двух последовательных стадий химического превращения разделены пространственным и температурным интервалом и связаны тепловым потоком.

4. Решение при $0 \leqslant \sigma_E < (\sigma + \sigma_Q)(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1}$ или $0 < E_1 E_2^{-1} < (T_- + c^{-1} Q_1) T_+^{-1}$. В этом случае функции $H(\tau)$ и $r(\tau)$ так же, как в п. 3, в основном изменяются в узкой зоне вблизи $\tau = \tau_1^\circ$, вне которой с точностью до экспоненциальных членов равны нулю и единице. Однако положение точки τ_1° теперь не зависит от σ_E и определяется равенством $\tau_1^\circ = \sigma_Q$. Поведение функций $G(\tau)$ и $q(\tau)$ существенно отличается от п. 3.

Собственное значение μ следует искать в виде

(4.1) $$\mu = (\mu_0 + \beta^{-1} \mu_1) \beta^{-2} \exp \frac{-\beta \sigma_E (1 + \sigma)}{\sigma_Q + \sigma}$$

При построении решения достаточно рассмотреть три области с различным поведением r, q, H, G. Внешнюю область — $0 \leqslant \tau < \sigma_Q$, внутреннюю область — малую окрестность точки $\tau = \tau_1^\circ = \sigma_Q$ и внешнюю область $\sigma_Q < \tau \leqslant 1$.

Во внешней области $0 \leqslant \tau < \sigma_Q$

$$r(\tau) = r_0(\tau) + \beta^{-2} r_1(\tau), \quad q(\tau) = \overline{q(\tau, \beta)} \tag{4.2}$$
$$G(\tau) = \overline{G(\tau, \beta)}, \quad H(\tau) = \overline{H(\tau, \beta)}$$

Подставив (4.2) в (1.7) — (1.10), можно найти

$$r(\tau) = C_{11}\tau^L + \beta^{-2} C_{12}\tau^L \tag{4.3}$$

Во внутренней области $\tau \sim \sigma_Q$ введем переменную $\tau_1^* = \beta(\sigma_Q - \tau)$ и рассмотрим отдельно решения при $\tau_1^* > 0$ $(\tau < \sigma_Q)$ и $\tau_1^* < 0$ $(\tau > \sigma_Q)$

$$\tau_1^* > 0, \quad r(\tau_1^*) = r_0^-(\tau_1^*) + \beta^{-1} r_1^-(\tau_1^*) + \beta^{-2} r_2^-(\tau_1^*) \tag{4.4}$$
$$H_0(\tau_1^*) = H_0^-(\tau_1^*) + \beta^{-1} H_1^-(\tau_1^*), \quad q(\tau_1^*) = q^-(\tau_1^*, \beta)$$
$$G(\tau_1^*) = \overline{G^-(\tau_1^*, \beta)}$$

$$\tau_1^* < 0, \quad r(\tau_1^*) = 1 + \overline{r^+(\tau_1^*, \beta)}, \quad H(\tau_1^*) = 1 + \overline{H^+(\tau_1^*, \beta)} \tag{4.5}$$
$$q(\tau_1^*) = \beta^{-1} q_1^+(\tau_1^*) + q_2^+(\tau_1^*, \beta), \quad G(\tau_1^*) = \beta^{-1} G_1^+(\tau_1^*) + G_2^+(\tau_1^*, \beta)$$

При построении решения во внутренней области учтем, что точка $\tau = \sigma_Q$, $H = r = 1$, $G = q = 0$ — особая, и так же, как в [8], используем условия

$$\tau_1^* = 0, \quad H_0^-(0) = r_0^-(0) = 1 \tag{4.6}$$
$$r_1^-(0) = r_2^-(0) = \bar{H}_1(0) = q_1^+(0) = G_1^+(0) = 0$$

Во внешней области $\sigma_Q < \tau < 1$

$$r(\tau) = 1 + \overline{r'(\tau, \beta)}, \quad H(\tau) = 1 + \overline{H'(\tau, \beta)} \tag{4.7}$$
$$q(\tau) = \frac{\tau - \sigma_Q}{1 - \sigma_Q} + \overline{q'(\tau, \beta)}, \quad G(\tau) = \frac{\tau - \sigma_Q}{1 - \sigma_Q} + \overline{G'(\tau, \beta)}$$

Подставив (4.1), (4.4) в (1.7) — (1.10), найдем

$$\frac{dr_0^-}{d\tau_1^*} = 0, \quad \frac{dr_1^-}{d\tau_1^*} = \frac{-L}{\sigma_Q}, \quad \mu_0 \frac{dH_0^-}{d\tau_1^*} = \frac{\sigma_k r_1^-}{\sigma_Q(1 - H_0^-)} \exp \frac{-\sigma_E(1 + \sigma)}{(\sigma_Q + \sigma)^2} \tau_1^* \tag{4.8}$$

Из (4.8) с учетом (4.6) и условия сращивания имеем

$$r_0^-(\tau_1^*) = 1, \quad r_1^-(\tau_1^*) = \frac{-L\tau_1^*}{\sigma_Q}, \quad \mu_0 = \frac{2\sigma_K L(\sigma_Q + \sigma)^4}{\sigma_Q^2 \sigma_E^2 (1 + \sigma)^2} \tag{4.9}$$
$$C_{11} = \sigma_Q^{-L}, \quad H_0^-(\tau_1^*) = 1 - \gamma^{1/2}\left(\frac{\sigma_E(1 + \sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q + \sigma)^2}\right)$$

Для следующих членов разложений при $\tau_1^* > 0$ можно получить

$$\frac{dr_2^-}{d\tau_1^*} = \frac{-L(\sigma_Q r_1^- + \tau_1^*)}{\sigma_Q^2(1 - H_0^-)}, \quad \frac{dH_1^-}{d\tau_1^*} = \frac{\sigma_k L\tau_1^*}{\sigma_Q^2(1 - H_0)} \left[\frac{\mu_1}{\mu_0} - \frac{r_2^-}{r_1^-} - \right. \tag{4.10}$$
$$\left. - \frac{\tau_1^*}{\sigma_Q(1 - H_0^-)} - \frac{H_1^-}{1 - H_0^-} + \frac{\sigma_E(1 + \sigma)}{(\sigma_Q + \sigma)^3}\tau_1^{*2}\right] \exp \frac{-\sigma_E(1 + \sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q + \sigma)^2}$$

Из (4.10) с учетом (4.6) и условия сращивания найдем

$$r_2^-(\tau_1^*) = \frac{L(L-1)(\sigma_Q+\sigma)^4}{\sigma_Q^2(1+\sigma)^2\sigma_E^2} j_1\left(\frac{\sigma_E(1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q+\sigma)^2}\right)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{2(\sigma_Q+\sigma)^2}{\sigma_E(1+\sigma)}\left[\frac{\sigma_Q+\sigma}{\sigma_Q}\left(\frac{j_3(\infty)}{2}+1-L\right)-3\right]$$

$$H_1^-(\tau_1^*) = \frac{\sigma_K L}{\mu_0\sigma_Q^2(1-H_0^-)}\int_0^{\tau^*}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{r_2^-}{r_1}+\frac{\sigma_E(1+\sigma)}{(\sigma_Q+\sigma)^3}x^2-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{\sigma_Q(1-H_0)}\right]x\exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)x}{(\sigma_Q+\sigma)^2}dx$$

Запишем двучленную формулу для скорости горения в размерных переменных

$$m = \left(\frac{2k_1L\lambda\rho}{c}\right)^{1/2}\left(\frac{RT_+^{(1)}}{E_1}\right)\left(\frac{T_+^{(1)}}{T_+^{(1)}-T_-}\right)\left\{1+\frac{RT_+^{(1)}}{E_1}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{T_+^{(1)}}{T_+^{(1)}-T_-}(2.344-L)-3\right]\right\}\exp\frac{-E_1}{2RT_+^{(1)}},\quad T_+^{(1)} = T_- + \frac{Q_1}{C} \tag{4.11}$$

Подставляя (4.1), (4.5) в (1.7) — (1.10), можно получить

$$q_1^+(\tau_1^*) = G_1^+(\tau_1^*) = -(1-\sigma_Q)^{-1}\tau_1^* \tag{4.12}$$

Функции (4.12) удовлетворяют условию сращивания с (4.6).

Полученные выше формулы дают в рассматриваемом частном случае полное решение задачи. Из (4.11) следует, что скорость горения здесь определяется характеристиками первой реакции, фронт которой распространяется независимо от второй, протекающей в индукционном режиме. Используя терминологию [9], назовем этот режим горения режимом отрыва.

5. Обсуждение результатов. Проведенный анализ позволил выделить характерные режимы горения и области изменения параметров задачи, в которых они реализуются. Полученные приближенные аналитические выражения для скорости горения и распределения параметров в волне определяют зависимость скорости горения и структуры волны от физико-химических характеристик горючей смеси. Как частный случай, результаты включают случай $L = 1$, когда имеется дополнительный интеграл $\tau = r\sigma_Q + (1-\sigma_Q)q$.

Сравнение полученных данных с результатами численного счета, выполненного в [10, 11] при $L = 1$, указывает на хорошее соответствие. При асимптотическом рассмотрении выделены характерные режимы горения, найденные в [10] численным счетом, указаны области их реализации, которые с принятой точностью совпадают с установленными в [10]. Применимость полученных результатов не ограничивается случаем предельно больших β. Как и результаты [4–8], полученные данные с достаточной точностью описывают процесс и при значениях β, существенно меньших десяти.

Поступила 20 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. хим., 1938, т. 12, вып. 1.
2. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
3. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.

4. *Bush W. B., Fendell F. E.* Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general lewis number. Combustion Sci. and Technology, 1970, vol. 1, p. 421—428.
5. *Fendell F. E.* Asymptotic analysis of premixed burning with large activation energy. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 1, p. 81.
6. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
7. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде. ПМТФ, 1972, № 5.
8. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Асимптотический анализ стационарного распространения фронта двухстадийной последовательной экзотермической реакции в конденсированной среде. ПМТФ, 1973, № 1.
9. *Мержанов А. Г., Руманов Э. Н., Хайкин Б. И.* Многофазное горение конденсированных систем. ПМТФ, 1972, № 6.
10. *Хайкин Б. И., Филоненко А. К., Худяев С. И.* Распространение пламени при протекании в газе двух последовательных реакций. Физика горения и взрыва 1968, т. 4, № 4.
11. *Korman H. E.* Theoretical modeling of cool flams. Combustion Sci. and Technology, 1970, vol. 2, p. 149—159.